ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2018, том 54, № 7, с. 988–995

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63+517.958:539.3

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОВОЙ МЕРЫ ДЕФОРМАЦИИ

© 2018 г. В. Ю. Саламатова, Ю. В. Василевский, Л. Вонг

Для построения определяющих соотношений гиперупругих материалов всё чаще предлагается использовать новые меры деформации, которые позволяют существенно упростить обработку экспериментальных данных и минимизировать её ошибки. Одна из таких мер деформаций основана на верхнетреугольном (QR) разложении градиента деформации. Описан конечно-элементный метод решения задач нелинейной теории упругости в рамках конечных деформаций для случая определяющих соотношений, записанных с использованием QR-разложения градиента деформации. Предложенный метод позволяет разработать эффективный и легкореализуемый инструмент для моделирования напряжённо-деформированного состояния любого гиперупругого материала.

DOI: 10.1134/S0374064118070154

1. Введение. Определяющими соотношениями (уравнениями состояния) в механике деформируемого твёрдого тела называются зависимости тензора напряжений от величин, характеризующих движение частиц среды [1, с. 80]. Данная зависимость полностью определяет механическое поведение исследуемого материала и играет ключевую роль при решении прикладных задач. Форма определяющего соотношения существенно зависит от выбранной меры деформаций, при этом определяющее соотношение должно удовлетворять ряду условий [1, с. 386; 2, с. 187]. Например, определяющие соотношения должны отражать симметрию физических свойств рассматриваемого материала и не зависеть от системы отсчёта.

Модель гиперупругого материала широко используется при исследовании напряжённо-деформированного состояния мягких биологических тканей. В рамках данной модели постулируется существование упругого потенциала, полностью задающего определяющие соотношения [1, с. 103; 2, с. 171]. При рассмотрении гиперупругих материалов особенно популярна такая мера деформации, как правый тензор деформации Коши–Грина. Это связано с относительной простотой вида определяющих соотношений и разработанным аппаратом для решения задач нелинейной теории упругости при использовании данной меры. Недостатком этой меры деформации являются сложности, возникающие при нахождении вида определяющих соотношений на основе экспериментальных данных, вследствие корреляции членов определяющих соотношений между собой [3]. В связи с этим предлагаются новые меры деформации, которые приводят к определяющим соотношениям с некоррелирующими членами (свойство ортогональности) [4–7]. Одна из таких мер основана на верхнетреугольном (QR) разложении градиента деформации. Свойство ортогональности даёт возможность простого описания механического поведения мягких тканей без использования априорно заданного определяющего соотношения и минимизирует ошибки при обработке имеющихся экспериментальных данных.

В настоящей работе описан подход для моделирования деформации гиперупругих материалов в случае использования меры деформации, основанной на QR-разложении градиента деформации. В рамках этого подхода предлагается использовать интерполяционные свойства барицентрических координат и принцип минимума потенциальной энергии, что в случае линейных треугольных конечных элементов позволяет получить все необходимые формулы в аналитическом и компактном представлении. Первоначально концепция была предложена в работе [8] для материала Сен-Венана–Кирхгофа и в дальнейшем для всего класса изотропных гиперупругих материалов описана в работе [9].

Статья имеет следующую структуру. В п. 2 вводятся основные обозначения и определения. Далее приводится постановка задачи равновесия упругого тела (п. 3) и её конечно-элементной дискретизации, используя характеристики деформации (п. 4). Результаты численных экспериментов представлены в п. 5. Все задачи, рассмотренные в данной работе, представлены в двумерной постановке, но предложенный подход может быть аналогичным образом применён и для трёхмерного случая.

2. Определяющие соотношения для мягких тканей.

2.1. Кинематика. Рассмотрим область $\Omega_t \subset \mathbb{R}^2$, занимаемую упругим телом в момент времени t. Пусть Ω_0 – область в начальный момент времени. Также обозначим положение точки в начальный момент времени через $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ и положение точки в момент времени t через $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Относительно декартова базиса $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$, связанного с начальной конфигурацией Ω_0, и декартова базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, связанного с актуальной конфигурацией Ω_t, можем записать

$$\mathbf{X} = X_1\mathbf{E}_1 + X_2\mathbf{E}_2, \quad \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2.$$

Деформация упругого тела $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$ определяется как взаимно однозначное отображение

$$\phi : \Omega_0 \times [0, t] \to \Omega_t,$$

при этом соответствующие перемещения имеют вид $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) := \phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$.

Ключевой характеристикой кинематики является градиент деформации $\mathbf{F}$, который определяется равенством

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_j,$$

где $\otimes$ обозначает тензорное произведение, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} := (a_1, a_2)^{\mathrm{T}}(b_1, b_2)$. Компоненты матрицы градиента деформации $\mathbf{F}$ имеют следующий вид:

$$[\mathbf{F}]_{ij} = F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}.$$

На её определитель накладывают ограничение $J = \det \mathbf{F} > 0$. Заметим, что градиент деформации связан с перемещениями точек тела $\mathbf{u}$ следующим образом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}},$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор.

Градиент деформаций $\mathbf{F}$ содержит информацию и об изменении расстояний между точками тела, и о жёстких вращениях тела. Жёсткое вращение не приводит к появлению дополнительных напряжений в теле, поэтому вводят разные меры деформации, исключающие подобное вращение.

2.2. Меры деформаций. Широкое применение при построении мер деформации нашло так называемое полярное разложение градиента деформации $\mathbf{F}$ [2, с. 127].

Теорема 1 (о полярном разложении обратимых матриц). *Любая обратимая вещественная матрица* $\mathbf{F}$ *может быть единственным образом представлена в любом из следующих видов:* $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$ *или* $\mathbf{F} = \mathbf{VR}$, *где* $\mathbf{R}$ *– ортогональная матрица, а* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *– симметричные положительно-определённые матрицы.*

Применение теоремы о полярном разложении к градиенту деформации позволяет выделить тензор вращения $\mathbf{R}$, правый тензор растяжения $\mathbf{U}$ и левый тензор растяжения $\mathbf{V}$. Другими словами, полную деформацию элемента материала можно рассматривать как суперпозицию жёсткого вращения и растяжения данного элемента.

Примерами мер, основанных на полярном разложении, могут служить: правый тензор деформации Коши–Грина $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \mathbf{U}^2$, тензор деформации Лагранжа $\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2$, левый тензор Коши–Грина $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{V}^2$ и логарифмическая мера (мера Генки) $\mathbf{E}_H = \ln \mathbf{B}/2 = \ln(\mathbf{V})$, $\mathbf{e}_H = \ln \mathbf{C}/2 = \ln(\mathbf{U})$. Тензор $\mathbf{C}$ характеризует изменения длин (расстояний между точками) после деформации твёрдого тела; в то же время тензор деформации Лагранжа $\mathbf{E}$ служит мерой отклонения заданной деформации от жёсткой деформации $(\mathbf{C} = \mathbf{I})$.

В работе [6] предложено использовать меру деформации, основанную не на полярном разложении, а на QR-разложении градиента деформации.

Теорема 2 (QR-разложение [10, с. 168]). *Для любой невырожденной вещественной матрицы* $\mathbf{F}$ *имеет место разложение* $\mathbf{F} = \mathbf{QR}$, *где* $\mathbf{Q}$ *– ортогональная матрица, а* $\mathbf{R}$ *– верхнетреугольная матрица с положительными элементами на диагонали.*

Таким образом, при QR-разложении градиента деформации полную деформацию элемента материала можно также рассматривать как суперпозицию жёсткого вращения $(\mathbf{Q})$ и изменение формы данного элемента $(\mathbf{R}$ [6, 7]).

Согласно теореме о QR-разложении для градиента деформации $\mathbf{F}$, можем найти такую матрицу $\mathbf{Q} = \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{E}_i$, что

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}} = \sum_{i \le j}^{i,j=1,2} \tilde{F}_{ij}\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j, \quad [\tilde{F}_{ij}] := \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} \\ 0 & \tilde{F}_{22} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{e}'_i$ – новый ортонормированный базис, который можно получить методом ортогонализации Грама–Шмидта системы векторов $\{\mathbf{FE}_1, \mathbf{FE}_2\}$.

Поскольку $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{F}}$, то компоненты тензора $\tilde{\mathbf{F}}$ можно получить с помощью факторизации Холецкого тензора деформаций Коши–Грина $\mathbf{C}$:

$$\tilde{F}_{11} = \sqrt{C_{11}}, \quad \tilde{F}_{12} = C_{12}/\tilde{F}_{11}, \quad \tilde{F}_{22} = \sqrt{C_{22} - \tilde{F}_{12}^2}. \tag{2.1}$$

Тензор $\tilde{\mathbf{F}}$, подобно тензорам $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, характеризует деформацию тела, как изменение расстояний между точками, и все его компоненты имеют физический смысл [6]. В качестве мер деформации принимаются следующие величины ξ_i, $i = 1, 2, 3$:

$$\xi_1 = \ln \tilde{F}_{11}, \quad \xi_2 = \ln \tilde{F}_{22}, \quad \xi_3 = \tilde{F}_{12}/\tilde{F}_{11}.$$

2.3. Гиперупругий материал. По определению гиперупругого материала существует такой упругий потенциал $\psi(\mathbf{F})$, что тензор напряжений Коши σ имеет вид [2, с. 171]

$$\sigma = \frac{1}{J}\frac{\partial\psi(\mathbf{F})}{\partial\mathbf{F}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}.$$

При этом потенциальная энергия U упругого тела также выражается через упругий потенциал

$$U = \int\limits_{\Omega_0} \psi(\mathbf{F})\, d\Omega = \int\limits_{\Omega_t} J^{-1}\psi(\mathbf{F})\, d\Omega. \tag{2.2}$$

Кроме того, упругий потенциал должен удовлетворять требованию материальной независимости от системы отсчёта, т.е.

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{QF}) \quad \text{для любой матрицы } \mathbf{Q} \in \mathrm{SO}(2), \tag{2.3}$$

где $\mathrm{SO}(2)$ – группа собственных вращений двумерного пространства. В случае, когда существует симметрия физических свойств рассматриваемого материала, определяющие соотношения должны быть инвариантны относительно всех преобразований материальных координат, принадлежащих группе симметрии для данного материала. На вид функции энергии деформации (упругого потенциала) накладывается ещё ряд ограничений, которые подробно описываются в монографиях [1, с. 386; 2, с. 187].

Как показано в монографии [2, с. 176], для гиперупругих материалов требование материальной независимости от системы отсчёта выполняется только тогда, когда упругий потенциал является некоторой функцией от $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$, т.е. $\psi(\mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F})$. Поэтому упругий потенциал ψ

часто выражают в виде функции от правого тензора деформации Коши–Грина $\mathbf{C}$, в этом случае

$$\sigma = \frac{2}{J}\mathbf{F}\frac{\partial\psi(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}.$$

В случае использования меры деформации, основанной на QR-разложении, упругий потенциал является функцией ξ_i :

$$\psi = \psi_{QR}(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

В силу равенств (2.1), связывающих компоненты тензоров $\tilde{\mathbf{F}}$ и $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$, условие независимости от системы отсчёта (2.3) выполняется. Определяющие соотношения при использовании данной меры деформации запишутся в следующем виде:

$$\sigma = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\psi_{QR}}{\partial\xi_i}\mathbf{A}_i,$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{e}'_1 \otimes \mathbf{e}'_1, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{e}'_2 \otimes \mathbf{e}'_2, \quad \mathbf{A}_3 = \frac{\tilde{F}_{22}}{2\tilde{F}_{11}}(\mathbf{e}'_1 \otimes \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_2 \otimes \mathbf{e}'_1).$$

Одним из достоинств данной меры с точки зрения задания определяющих соотношений является возможность построения зависимости с некоррелирующими членами, т.е. $\mathbf{A}_i : \mathbf{A}_j = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_j) = 0$, если $i \neq j$. Данное свойство позволяет восстановить функции $\partial\psi_{QR}/\partial\xi_i$ непосредственно по экспериментальным данным (кривые деформирования напряжение–деформация), поскольку

$$\frac{1}{J}\frac{\partial\psi_{QR}}{\partial\xi_i} = \sigma : \mathbf{A}_i. \tag{2.4}$$

В случае, когда условие ортогональности не выполняется (например, при использовании инвариантов тензора Коши–Грина), соответствующие частные производные упругого потенциала зависят друг друга, что усложняет их нахождение по экспериментальным данным, и ошибки в результатах при этом увеличиваются [3]. Использование свойства ортогональности и формул (2.4) способствует минимизации ошибок при нахождении функций $\partial\psi_{QR}/\partial\xi_i$.

3. Уравнения равновесия. Уравнения равновесия упругого тела в дифференциальной формулировке имеют вид

$$\mathrm{div}\,\sigma + \mathbf{b} = 0 \quad \text{в области } \Omega_t, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{b}$ – объёмная плотность массовых сил.

Пусть $\partial\Omega_t$ – граница области Ω_t и $\partial\Omega_t = \Gamma_u(t)\bigcup\Gamma_\sigma(t)$, где $\Gamma_u(t) = \overline{\Gamma}_u(t)$. Рассмотрим смешанные граничные условия

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{на} \quad \Gamma_u(t), \quad \sigma\mathbf{n} = \mathbf{t_0} \quad \text{на} \quad \Gamma_\sigma(t), \tag{3.2}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega_t$, $\bar{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{t_0}$ – заданные перемещения и усилия на границах $\Gamma_u(t)$ и $\Gamma_\sigma(t)$ соответственно.

Поскольку для гиперупругих материалов существует упругий потенциал, конечно-элементный подход к приближённому решению уравнений (3.1), (3.2) может быть основан на принципе виртуальной работы [11, с. 177]: найти такую функцию $\mathbf{u} \in \tilde{H}^1(\Omega_t)$, что

$$\delta W - \delta U = 0, \tag{3.3}$$

где изменение внутренней энергии

$$\delta U = \int\limits_{\Omega_t} \sigma : \nabla\delta\mathbf{u}\, dS$$

обеспечено работой приложенных объёмных и поверхностных сил

$$\delta W = \int\limits_{\Gamma_\sigma(t)} \mathbf{t_0} \cdot \delta\mathbf{u}\, dS + \int\limits_{\Omega_t} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u}\, d\Omega,$$

а множество $\tilde{H}^1(\Omega_t)$ функций определяется следующим образом:

$$\tilde{H}^1(\Omega_t) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega_t) : \mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}} \ \text{ на } \ \Gamma_u(t)\}.$$

Учитывая равенство (2.2), уравнение (3.3) можно записать в виде

$$\delta W - \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\biggl(\int\limits_{\Omega_0} \psi(\mathbf{F})\, d\Omega\biggr) \cdot \delta\mathbf{u} = 0. \tag{3.4}$$

4. Конечно-элементная дискретизация уравнений равновесия. Используемый в данной работе подход предложен в работе [9]. Обозначим его основные моменты.

Пусть задана некоторая конформная триангуляции области Ω_s. Рассмотрим метод конечных элементов, в котором поле перемещений приближается непрерывными функциями, линейными на каждом треугольнике.

Рассмотрим треугольник T_P расчётной сетки с вершинами $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$, который в результате деформации $\phi(\mathbf{X}, t)$ переходит в треугольник T_Q с вершинами $\mathbf{Q_1}, \mathbf{Q_2}, \mathbf{Q_3}$. Площади треугольников T_P и T_Q обозначим через A_p и A_q соответственно; тогда $J = A_q/A_p$.

Если $\lambda_1(\mathbf{X}), \lambda_2(\mathbf{X}), \lambda_3(\mathbf{X})$ – барицентрические координаты точки $\mathbf{X}$, то координаты любой точки треугольника до деформации $\mathbf{X} \in T_P$ и соответствующей точки треугольника после деформации $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}) \in T_Q$ можно представить в виде

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\mathbf{X})\mathbf{P}_i, \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\mathbf{X})\mathbf{Q}_i. \tag{4.1}$$

Для градиента деформации $\mathbf{F} = \partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X}$, учитывая равенства (4.1), получаем представление

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{Q}_i \otimes \mathbf{D}_i, \tag{4.2}$$

где $\mathbf{D}_i := \partial\lambda_i/\partial\mathbf{X}$, и векторы $\mathbf{D}_i$ полностью определяются геометрией треугольника T_P :

$$\mathbf{D}_i = \frac{1}{2A_p}(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_{i+2})^\perp, \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь и далее приняты обозначения $\mathbf{P}_4 := \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_5 := \mathbf{P}_2$, $\mathbf{X}^\perp := (X_2, -X_1)^{\text{т}}$, если $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^{\text{т}}$.

Используя представление (4.2), получаем следующие выражения для правого тензора деформаций Коши–Грина:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\text{т}}\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} (\mathbf{Q_i} \cdot \mathbf{Q_j})\mathbf{D_i} \otimes \mathbf{D_j}.$$

Данная формула с учётом соотношений (2.1) также полностью определяет компоненты матрицы $\tilde{\mathbf{F}}$ и, следовательно, характеристики деформации ξ_1, ξ_2, ξ_3.

В силу линейности базисных функций значение упругого потенциала $\psi(\mathbf{F})$ постоянно на треугольнике, и вклад U_p треугольника T_P во внутреннюю энергию согласно равенству (2.2) равен $U_p = A_p\psi(\mathbf{G})$, где $\mathbf{G}$ – любая точка треугольника T_P.

Теперь, используя уравнение (3.4) для приближённого решения задачи, можно получить уравнения относительно новых координат узлов. Рассмотрим вклад каждого треугольника, содержащего i-й узел, в узловые силы. Пусть $\mathbf{F}_i(T_P)$ – упругая сила и $\mathbf{F}_{i,\mathrm{ext}}(T_P)$ – внешняя силы в i-м узле треугольника T_P, тогда

$$\mathbf{F}_i(T_P) = -\frac{\partial U_p}{\partial \mathbf{Q}_i}, \quad \mathbf{F}_{i,\mathrm{ext}}(T_P) = \int\limits_{\Gamma_\sigma^e(t)} \mathbf{t_0}\lambda_i\, dS + \int\limits_{T_Q} \mathbf{b}\lambda_i\, d\Omega,$$

где $\Gamma_\sigma^e(t)$ – ребро треугольника, вдоль которого распределены заданные усилия $\mathbf{t}_0$. Ассемблируя по соседним треугольникам, получаем уравнение статического равновесия для i-го узла треугольника

$$\sum_{T_p\in S_i} (\mathbf{F}_i(T_p) + \mathbf{F}_{i,\mathrm{ext}}(T_P)) = 0, \tag{4.3}$$

где S_i – множество треугольников, содержащих i-й узел. Имеет место следующая

Теорема 3. *Для гиперупругого материала с упругим потенциалом $\psi(\mathbf{G}) = \psi_{QR}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ выражение для упругих сил в i-м узле треугольника имеет вид*

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U_p}{\partial \mathbf{Q}_i} = -A_p \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \psi_{QR}}{\partial \xi_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \mathbf{Q}_i}, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \mathbf{Q}_i} = \frac{1}{2C_{11}}\frac{\partial C_{11}}{\partial \mathbf{Q}_i}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial \mathbf{Q}_i} = \frac{C_{11}}{2(C_{11}C_{22} - C_{12}^2)}\left(\frac{\partial C_{22}}{\partial \mathbf{Q}_i} - 2\frac{C_{12}}{C_{11}}\frac{\partial C_{12}}{\partial \mathbf{Q}_i} + \frac{C_{12}^2}{C_{11}^2}\frac{\partial C_{11}}{\partial \mathbf{Q}_i}\right), \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial \mathbf{Q}_i} = \frac{1}{C_{11}}\left(\frac{\partial C_{12}}{\partial \mathbf{Q}_i} - \frac{C_{12}}{C_{11}}\frac{\partial C_{11}}{\partial \mathbf{Q}_i}\right), \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_k} = \sum_{n=1}^{3} \mathbf{Q}_n(\mathbf{D_n}\otimes\mathbf{D_k} + \mathbf{D_k}\otimes\mathbf{D_n})_{ij}. \tag{4.8}$$

Производные $\partial\psi_{QR}/\partial\xi_i$ полностью задаются видом определяющих соотношений или восстанавливаются непосредственно по экспериментальным данным. При необходимости можно получить аналитические формулы для производных $\partial\mathbf{F}_i/\partial\mathbf{Q}_j$.

Решение нелинейной системы уравнений (4.3) может быть получено либо классическим методом Ньютона (соответствующий якобиан может быть выписан), либо безъякобианным методом Ньютона–Крылова [12, 13].

Отличительной особенностью предложенного подхода является его общность, а именно формулы (4.5)–(4.8) справедливы для любого гиперупругого материала, определяющее соотношение которого записано с использованием QR-разложения градиента деформации. Поведение материала будет определяться только частными производными потенциала $\partial\psi_{QR}/\partial\xi_i$. Данные производные могут быть заданы явным образом или получены из экспериментальных данных в силу свойства ортогональности (2.4). Таким образом, формулы (4.4)–(4.8) позволяют разработать эффективный и легкореализуемый инструмент для моделирования напряжённо-деформированного состояния любого гиперупругого материала.

5. Численные эксперименты. Рассмотрим задачу об одноосном растяжении квадратной мембраны силой P. В данном случае деформация имеет вид

$$x_1 = \lambda_1 X_1, \quad x_2 = \lambda_2 X_2. \tag{5.1}$$

Величины λ_1, λ_2 называются главными удлинениями, поскольку $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{т}}$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{т}}$.

Для проведения численных экспериментов рассмотрим изотропные модели для мембраны, использовавшиеся ранее в работе [9], а именно: неогуковскую модель и модель Гента. Данные модели при одноосном растяжении, используя меру деформации, основанную на QR-разложении, можно записать следующим образом: неогуковская модель

$$W_{NH} = \frac{\mu}{2}(\exp(2\xi_1) + \exp(2\xi_2) - 2) + \frac{\mu}{2}(d(\exp(2\xi_1 + 2\xi_2) - 1) - 2(d+1)(\exp(\xi_1 + \xi_2) - 1)),$$

модель Гента

$$W_{\text{Gent}} = -\frac{\mu}{2} J_m \ln\left(1 - \frac{\exp(2\xi_1) + \exp(2\xi_2) - 2}{J_m}\right) +$$
$$+\frac{\mu}{2}(d(\exp(2\xi_1 + 2\xi_2) - 1) - 2(d+1)(\exp(\xi_1 + \xi_2) - 1)).$$

Здесь и далее μ, d, J_m – константы материала.

В качестве параметров материалов использовались значения для артерии человека [14]: $\mu = 3 \cdot 10^6$ Н/см, $J_m = 2.3$, $d = 10,\ 10^2,\ 10^3$. Размеры мембраны $1\,\text{см} \times 1\,\text{см}$.

Значения главных удлинений λ_1, λ_2, полученные в результате решения систем уравнений (4.3) для двух материалов, приведены в таблице и совпадают с конечно-элементными решениями, полученными с помощью подходов, описанных в работе [9]. В силу линейности точного решения (5.1) погрешность аппроксимации равна нулю независимо от триангуляции.

Величины главных удлинений λ_1, λ_2 для различных параметров неогуковской модели и модели Гента, рассчитанные с помощью формул (4.3)–(4.8)

P, 10^5 Н/см	d	Модель Гента		Неогуковская модель	
		λ_1	λ_2	λ_1	λ_2
1	10	0.99246	1.00912	0.99252	1.00920
1	100	0.99178	1.00845	0.99178	1.00845
1	1000	0.99171	1.00837	0.99171	1.00838
5	10	0.96298	1.04578	0.96306	1.04665
5	100	0.95975	1.04273	0.95962	1.04291
5	1000	0.95939	1.04240	0.95927	1.04254

6. Заключение. В данной работе описан подход к расчёту деформации гиперупругих материалов при использовании меры деформации, основанной на QR-разложении градиента деформации. Особенностью предложенного метода является аналитическая и компактная запись уравнений, что позволяет достаточно просто реализовывать любое определяющее соотношение для гиперупругого материала, основанное на верхнетреугольном разложении градиента деформаций. Ограничением указанного подхода является использование в нём линейных конечных элементов.

Отметим, что в отличие от работы [9], в которой данный подход применялся только для изотропных материалов, в настоящей работе подобных ограничений нет, а формулы, полученные в ней, имеют общий характер и могут применяться как для изотропных, так и для анизотропных материалов. Соответствующая анизотропия материалов характеризуется видом отвечающих ей производных упругого потенциала $\partial\psi_{QR}/\partial\xi_i$.

Отметим, что производные $\partial\psi_{QR}/\partial\xi_i$ определяют механическое поведение гиперупругого материала и могут быть заданы явно или получены из экспериментальных данных в силу свойства ортогональности (2.4). При этом общий вид формул (4.4)–(4.8) позволяет разработать эффективный и легкореализуемый инструмент для моделирования напряжённо-деформированного состояния любого гиперупругого материала.

В данной работе рассмотрены только статические задачи в двумерной постановке, но предложенный подход можно применить при решении динамических или трёхмерных задач, что будет темой дальнейших исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект 17-71-10102).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М., 1980.
2. *Сьярле Ф.* Математическая теория упругости. М., 1992.
3. *Criscione J.C.* Rivlin's representation formula is ill-conceived for the determination of response functions via biaxial testing // The Rational Spirit in Modern Continuum Mechanics. 2004. P. 197–215.
4. *Criscione J.C., Humphrey J.D., Douglas A.S., Hunter W.C.* An invariant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms in isotropic hyperelasticity // J. of the Mechanics and Physics of Solids. 2000. V. 48. № 12. P. 2445–2465.
5. *Kotiya A.A.* Mechanical characterisation and structural analysis of normal and remodeled cardiovascular soft tissue: Doct. dissertation. Texas A&M University, 2008.
6. *Srinivasa A.R.* On the use of the upper triangular (or QR) decomposition for developing constitutive equations for Green-elastic materials // Intern. J. of Eng. Sci. 2012. V. 60. P. 1–12.
7. *Freed A.D., Srinivasa A.R.* Logarithmic strain and its material derivative for a QR decomposition of the deformation gradient // Acta Mechanica. 2015. V. 226. № 8. P. 2645–2670.
8. *Delingette H.* Triangular springs for modeling nonlinear membranes // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2008. V. 14. № 2. P. 329–341.
9. *Василевский Ю.В., Саламатова В.Ю., Лозовский А.В.* О компактных формулах расчёта деформаций мягких биологических тканей // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 7. С. 935–935.
10. *Тыртышников Е.Е.* Матричный анализ и линейная алгебра. М., 2007.
11. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л., 1935.
12. *Kelley C.T.* Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations. Philadelphia, 1995.
13. *Knoll D.A., Keyes D.E.* Jacobian-free Newton–Krylov methods: a survey of approaches and applications // J. of Comp. Phys. 2004. V. 193. № 2. P. 357–397.
14. *Horgan C.O., Saccomandi G.* A description of arterial wall mechanics using limiting chain extensibility constitutive models // Biomech. and model. in mechanobiology. 2003. V. 1. № 4. P. 251–266.

Институт вычислительной математики РАН,
г. Москва,
Московский физико-технический институт,
г. Долгопрудный,
Сеченовский университет, г. Москва,
Шеньженьский институт передовых технологий
Китайской академии наук

Поступила в редакцию
01.02.2018 г.