



Общероссийский математический портал

В. Ю. Саламатова, Ю. В. Василевский, Об эллиптичности гиперупругих моделей, восстанавливаемых по экспериментальным данным, *СМФН*, 2017, том 63, выпуск 3, 504–515

DOI: <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2017-63-3-504-515>

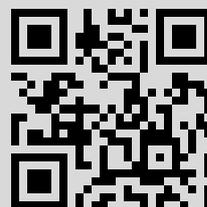
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 83.149.206.163

2 апреля 2018 г., 13:35:40



ОБ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ ГИПЕРУПРУГИХ МОДЕЛЕЙ, ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

© 2017 г. **В. Ю. САЛАМАТОВА, Ю. В. ВАСИЛЕВСКИЙ**

Аннотация. Условие эллиптичности уравнений равновесия играет важную роль для корректного описания механического поведения материала и является обязательным условием для проверки новых определяющих соотношений. Ранее были предложены новые меры деформации, использование которых приводит к отсутствию корреляций между членами, что значительно упрощает восстановление вида определяющих соотношений по экспериментальным данным. Одна из таких новых мер деформации основана на использовании QR-разложения градиента деформации. В данной работе исследуется условие сильной эллиптичности для гиперупругого материала при использовании QR-разложения градиента деформации.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	504
1. Кинематика	505
2. Уравнения равновесия упругого тела	506
3. Упругий потенциал	507
4. Условие эллиптичности для упругого потенциала в инвариантах Сриниваса	509
5. Заключение	510
6. Приложение А	511
Список литературы	512

ВВЕДЕНИЕ

При решении задач механики деформируемого твердого тела на основе принципов механики сплошной среды необходимо задать определяющее соотношение (зависимость напряжений от деформации) [4]. Определяющее соотношение полностью характеризует механическое поведение исследуемого материала и является одним из уравнений, замыкающим систему уравнений, описывающих движение деформируемого тела. Построение и исследование различных видов определяющих соотношений для мягких тканей человека становится все актуальнее в связи с постановками новых биомедицинских задач.

Для описания механического поведения мягких тканей используют подходы нелинейной теории упругости [12], и, как правило, востребована модель гиперупругого материала, предполагающая существование упругого потенциала, который полностью задает вид определяющего соотношения [12, 16]. Построению определяющих соотношений для мягких тканей посвящено огромное количество работ, при этом нет единого рецепта, как выбрать правильное определяющее соотношение. Стандартный подход к построению определяющих соотношений состоит в априорном задании вида определяющего соотношения (из некоторого пула уже известных моделей) и нахождении параметров модели методом фитирования на основе имеющихся экспериментальных данных для исследуемого материала.

Вид определяющего соотношения в первую очередь зависит от определения меры деформации. На данный момент предложено несколько мер деформаций [1]. При описании механики мягких тканей общепринятой является мера деформации Коши—Грина. Как было показано в работе [5], использование инвариантов этой меры деформации при задании определяющего соотношения приводит к корреляции членов определяющего соотношения и при стандартном подходе к построению

определяющих соотношений порождает проблемы при обработке результатов экспериментов для определения параметров модели. На данный момент существует ряд работ, в которых использование других мер деформаций при построении определяющих соотношений приводит к отсутствию корреляций между членами [6, 15, 20]. Отсутствие корреляции позволяет непосредственно по экспериментальным данным найти так называемые *функции отклика* (*response functions*), которые являются соответствующими производными упругого потенциала, и уже по ним восстанавливать вид определяющих соотношений, без априорного задания его вида. Подход с использованием функций отклика был первоначально предложен в классической работе [18], а в случае биомембран развит Хамфри [13]. Использование определяющих соотношений с некоррелирующими членами в рамках подхода с функциями отклика является перспективным направлением исследований для описания механики мягких тканей, подход был успешно применен для описания механического поведения кровеносного сосуда [15] и миокарда [7]. Однако, при использовании новых мер деформаций в рамках данного подхода остаются вопросы теоретического характера, связанные с ограничениями на вид упругого потенциала (и соответственно, функций отклика).

При написании определяющих соотношений должен быть выполнен ряд определенных условий, обеспечивающих корректную постановку задачи [1, 2]. В частности, выполнение условия сильной эллиптичности для упругого потенциала совпадает с условием эллиптичности системы дифференциальных уравнений равновесия, эквивалентно действительности скоростей распространения волн малой амплитуды в упругой среде [1] и является необходимым условием устойчивости равновесной упругой деформации [14, 17]. Для заданного потенциала сильная эллиптичность может иметь место при определенных значениях градиента деформации и отсутствовать для других значений. Выполнение условий эллиптичности играет важную роль для корректного описания механического поведения материала [11], [2, с. 282]. Таким образом, при написании новых гиперупругих моделей условие эллиптичности является одним из обязательных для проверки. В случае новых мер деформации, приводящих к определяющим соотношениям с некоррелирующими членами, в работе [19] исследовалось выполнение условия сильной эллиптичности для определяющих соотношений, записанных в инвариантах, предложенных в [6].

Целью настоящей работы является изучение выполнения условия сильной эллиптичности для определяющих соотношений, основанных на QR-разложении градиента деформаций [20]. Как было отмечено выше, в случае определяющих соотношений с некоррелирующими членами вид упругого потенциала может быть восстановлен непосредственно по экспериментальным данным. Полученные в данной работе условия выполнения эллиптичности могут быть использованы для исследования корректности восстановленных гиперупругих моделей.

1. КИНЕМАТИКА

Рассмотрим область $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$, занимаемую упругим телом в момент времени t (актуальная конфигурация). Обозначим область в начальный момент времени как Ω_0 (начальная конфигурация). Также обозначим положение точки в отсчетной конфигурации как $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ (лагранжевы координаты), и положение точки в актуальной конфигурации как $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ (эйлеровы координаты). Относительно декартова базиса $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$, связанного с начальной конфигурацией Ω_0 , и декартова базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, связанного с актуальной конфигурацией Ω_t , можем записать

$$\mathbf{X} = X_I \mathbf{E}_I, \quad \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i. \quad (1.1)$$

Здесь и далее будем подразумевать суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3, опуская знак суммы.

Деформация упругого тела определяется как взаимно-однозначное отображение

$$\phi : \Omega_s \mapsto \Omega_t,$$

так что в момент времени t

$$\phi(\mathbf{X}, t) : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t), \quad \text{где } x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t).$$

Соответствующие перемещения имеют вид $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) := \mathbf{x} - \phi(\mathbf{X}, t)$.

Одной из ключевых характеристик кинематики является градиент деформации \mathbf{F} , который определяется как

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_J, \quad (1.2)$$

где \otimes обозначает тензорное произведение. Компоненты градиента деформации \mathbf{F} записываются в виде следующей матрицы:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}, \quad [F_{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}.$$

На $J = \det \mathbf{F}$ накладывают следующее ограничение:

$$J = \det \mathbf{F} > 0,$$

которое гарантирует существование \mathbf{F}^{-1} и исключает самопроникновение тела при деформации.

Заметим, что градиент деформации связан с перемещениями точек тела \mathbf{u} следующим образом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (1.3)$$

где \mathbf{I} — единичный тензор.

Большое применение при построении мер деформации нашло так называемое полярное разложение градиента деформации \mathbf{F} (см. [2]).

Теорема 1.1 (о полярном разложении обратимых матриц). *Любая обратимая вещественная матрица \mathbf{F} может быть единственным образом представлена в виде*

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad \text{или} \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (1.4)$$

где \mathbf{R} — ортогональная матрица, а \mathbf{U} , \mathbf{V} — симметричные положительно-определенные матрицы.

Применение теоремы о полярном разложении к градиенту деформации позволяет выделить тензор вращения \mathbf{R} , правый тензор растяжения \mathbf{U} и левый тензор растяжения \mathbf{V} . Другими словами, полную деформацию элемента материала можно рассматривать как суперпозицию жесткого вращения и растяжения данного элемента.

2. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОГО ТЕЛА

Предполагая, что массовые силы отсутствуют, уравнения равновесия упругого материала имеют вид [2]:

$$\operatorname{div}(J\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T}) = 0 \quad \text{в } \Omega_0, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T}, \quad (2.2)$$

где \mathbf{T} — тензор Коши (тензор истинных напряжений), $J = \det \mathbf{F}$. Для замыкания системы уравнений (2.1) необходимо задать определяющее соотношение $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{F}, \mathbf{X})$ и соответствующие граничные условия.

Определяющее соотношение характеризует механическое поведение материала. В случае гиперупругого материала, когда состояние материала не зависит от пути нагружения, существует такой упругий потенциал W (запасенная энергия деформации), что

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T. \quad (2.3)$$

Упругий потенциал должен удовлетворять требованию материальной независимости от системы отсчета, т. е.

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{Q}\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{SO}(3), \quad (2.4)$$

где $SO(3)$ — собственная группа вращений трехмерного пространства. В случае, когда существует симметрия физических свойств рассматриваемого материала, определяющие соотношения должны быть инвариантны относительно всех преобразований материальных координат, принадлежащих группе симметрии для данного материала. На вид функции энергии деформации (упругого потенциала) накладывается еще ряд ограничений, которые подробно описываются в работах [1, 2, 4]. На исследовании одного из таких условий, а именно условия Лежандра—Адамара, мы остановимся подробнее.

2.1. Условие Лежандра—Адамара. Предположим, что функция $W(\mathbf{F})$ является дважды непрерывно дифференцируемой. После подстановки соотношений (2.3) и (1.3) в (2.1) уравнения равновесия (2.1) можно переписать в виде следующего уравнения относительно перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$:

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_i \partial X_l} = 0, \tag{2.5}$$

где C_{ijkl} являются компонентами тензора упругости $\mathbb{C}(\mathbf{F})$

$$\mathbb{C}(\mathbf{F}) = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}}; \quad C_{ijkl} = C_{klij} = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}. \tag{2.6}$$

Отметим, что свойства тензора упругости $\mathbb{C}(\mathbf{F})$ определяют тип системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (2.5).

Определение 2.1 (условие Лежандра—Адамара). Функция энергии деформации $W(\mathbf{F})$ приводит к эллиптической системе уравнений равновесия, если выполняется следующее условие:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : \mathbb{C}(\mathbf{F}) : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbf{0}. \tag{2.7}$$

В случае строгого неравенства (2.7) является условием сильной эллиптичности системы уравнений равновесия упругого тела.

Выполнение условия сильной эллиптичности эквивалентно действительности скоростей распространения волн малой амплитуды в упругой среде [1], в то же время отсутствие эллиптичности уравнений равновесия (2.5) подразумевает возможность потери гладкости решений уравнений равновесия упругого тела [1, 14] и связано с потерей устойчивости упругого тела [14, 17]. Поэтому при разработке новых определяющих соотношений для гиперупругого материала выполнение условия (2.7) является обязательным для проверки.

3. УПРУГИЙ ПОТЕНЦИАЛ

3.1. Меры деформации. Выше было указано одно из ограничений на вид упругого потенциала — материальная независимость от системы отсчета (2.4). Как показано в [2], для гиперупругих материалов данное требование выполняется только тогда, когда функция запасенной энергии является некоторой функцией от $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$, т. е. $W(\mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{F}\mathbf{F}^T)$. На практике стали широко использоваться для характеристики деформации разные меры деформации. Например, правый тензор деформации Коши—Грина

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2;$$

тензор деформации Лагранжа

$$\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2;$$

левый тензор Коши—Грина

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2;$$

логарифмическая мера (мера Генки)

$$\mathbf{E}_H = \ln \mathbf{B} / 2 = \ln(\mathbf{V}); \quad \mathbf{e}_H = \ln \mathbf{C} / 2 = \ln(\mathbf{U}).$$

Здесь \mathbf{U}, \mathbf{V} — тензоры растяжения (деформации) полярного разложения градиента деформации (1.4).

В работе [20] автор предлагает использовать меру деформации, основанную не на полярном разложении, а на QR-разложении градиента деформации. Достоинства данного подхода с точки

зрения численного решения задач механики твердого тела обсуждаются в [10, 20]. Главным достоинством с точки зрения задания определяющих соотношений является возможность построения зависимости с некоррелирующими членами.

3.2. Мера деформации, основанная на QR-разложении градиента деформации. Кратко опишем подход Сриниваса [20] для построения определяющих соотношений.

Теорема 3.1 (QR-разложение, см. [3]). *Для любой невырожденной вещественной матрицы \mathbf{F} имеет место разложение*

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{R}, \quad (3.1)$$

где \mathbf{Q} — ортогональная матрица, а \mathbf{R} — верхнетреугольная матрица с положительными числами на диагонали.

Согласно теореме о QR-разложении для градиента деформации \mathbf{F} , можем найти такую матрицу $\mathbf{Q} = \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{E}_i$, что

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}} = \sum_{i \leq j}^{i,j=1,2,3} \tilde{F}_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j, \quad (3.2)$$

$$[\tilde{F}_{ij}] := \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} & \tilde{F}_{13} \\ 0 & \tilde{F}_{22} & \tilde{F}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{F}_{33} \end{pmatrix},$$

где \mathbf{e}'_i — новый ортонормированный базис, который можно получить методом ортогонализации Грама—Шмидта системы векторов $\{\mathbf{F}\mathbf{E}_1, \mathbf{F}\mathbf{E}_2, \mathbf{F}\mathbf{E}_3\}$.

Отметим, что градиент деформации \mathbf{F} можно переписать в базисе $\{\mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{E}_j\}$ как

$$\mathbf{F} = \sum_{i \leq j}^{i,j=1,2,3} \tilde{F}_{ij} \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{E}_j. \quad (3.3)$$

Поскольку $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{F}}$, то компоненты тензора $\tilde{\mathbf{F}}$ можно получить с помощью факторизации Холецкого тензора деформаций Коши—Грина \mathbf{C} :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{11} &= \sqrt{C_{11}}; & \tilde{F}_{12} &= \frac{C_{12}}{\tilde{F}_{11}}; & \tilde{F}_{13} &= \frac{C_{13}}{\tilde{F}_{11}}; \\ \tilde{F}_{22} &= \sqrt{C_{22} - \tilde{F}_{12}^2}; & \tilde{F}_{23} &= \frac{C_{23} - \tilde{F}_{12}\tilde{F}_{13}}{\tilde{F}_{22}}; & \tilde{F}_{33} &= \sqrt{C_{33} - \tilde{F}_{13}^2 - \tilde{F}_{23}^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тензор $\tilde{\mathbf{F}}$, подобно тензорам \mathbf{U} и \mathbf{V} , характеризует деформацию тела как изменение расстояний между точками, и все его компоненты имеют физический смысл [20]. В качестве мер деформации принимаются следующие величины ξ_i , $i = 1, \dots, 6$:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \ln \tilde{F}_{11}, & \xi_2 &= \ln \tilde{F}_{22}, & \xi_3 &= \ln \tilde{F}_{33}, \\ \xi_4 &= \frac{\tilde{F}_{12}}{\tilde{F}_{11}}, & \xi_5 &= \frac{\tilde{F}_{13}}{\tilde{F}_{11}}, & \xi_6 &= \frac{\tilde{F}_{23}}{\tilde{F}_{22}}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

упругий потенциал является функцией ξ_i :

$$W = \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6). \quad (3.6)$$

В силу равенств (3.4), понятно, что условие независимости материала от системы отсчета (2.4) выполняется.

4. Условие эллиптичности для упругого потенциала в инвариантах Сриниваса

Пусть $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}'_i$ и $\mathbf{b} = b_k \mathbf{E}_k$, тогда

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_k \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{E}_k. \quad (4.1)$$

Перепишем условие сильной эллиптичности (2.7), учитывая (3.2), следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} : \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} : \mathbf{H} &= (\mathbf{Q}^T \mathbf{H}) : \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\mathbf{F}} \partial \bar{\mathbf{F}}} : (\mathbf{Q}^T \mathbf{H}) = \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_n \partial \xi_m} \left(\frac{\partial \xi_n}{\partial \bar{\mathbf{F}}} : (\mathbf{Q}^T \mathbf{H}) \right) \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial \bar{\mathbf{F}}} : (\mathbf{Q}^T \mathbf{H}) \right) + \frac{\partial W}{\partial \xi_n} \left((\mathbf{Q}^T \mathbf{H}) : \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial \bar{\mathbf{F}} \partial \bar{\mathbf{F}}} : (\mathbf{Q}^T \mathbf{H}) \right) > 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Обозначим $\bar{H}_{ij} = (\mathbf{e}'_i, \mathbf{H} \mathbf{E}_j) = a_i b_j$, тогда условие (4.2) эквивалентно условию положительной определенности квадратичной формы

$$\bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{\Pi} \bar{\mathbf{H}} > 0, \quad (4.3)$$

где $\bar{\mathbf{H}} = (H_{11}, H_{22}, H_{33}, H_{12}, H_{23}, H_{13})^T$, и матрица $\mathbf{\Pi}$ определяется в (6.1), (6.2), см. приложение А. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *Необходимым и достаточным условием сильной эллиптичности (4.2) при заданной деформации является положительная определенность матрицы $\mathbf{\Pi}$ (6.1), (6.2).*

Следствие 4.1. Необходимыми условиями для сильной эллиптичности являются следующие ограничения на частные производные функции ψ :

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \frac{1}{\tilde{F}_{11}^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \xi_4^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4^2} + \xi_5^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_5^2} - 2\xi_4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1 \partial \xi_4} - 2\xi_5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1 \partial \xi_5} + \right. \\ &\quad \left. + 2\xi_4 \xi_5 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4 \partial \xi_5} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} + 2\xi_4 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_4} + 2\xi_5 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_5} \right) > 0; \\ \Pi_{22} &= \frac{1}{\tilde{F}_{22}^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} - 2\xi_6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2 \partial \xi_6} + \xi_6^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_6^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} + 2\xi_6 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_6} \right) > 0; \\ \Pi_{33} &= \frac{1}{\tilde{F}_{33}^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi_3} \right) > 0; \\ \Pi_{44} &= \frac{1}{\tilde{F}_{11}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4^2} > 0; \\ \Pi_{55} &= \frac{1}{\tilde{F}_{22}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_5^2} > 0; \\ \Pi_{66} &= \frac{1}{\tilde{F}_{11}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_6^2} > 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Доказательство следует из критерия положительной определенности матрицы $\mathbf{\Pi}$. Согласно неравенствам (4.4), необходимыми условиями эллиптичности гиперупругой модели в инвариантах $\xi_i, i = 1, \dots, 6$ являются экспоненциальный рост функции ψ по ξ_3 и выпуклость по ξ_4, ξ_5, ξ_6 .

Замечание 4.1. Проверка необходимых условий (4.4) для любого упругого потенциала, восстановленного по экспериментальным данным, позволит установить, не нарушается ли условие сильной эллиптичности для исследуемого диапазона деформаций. В силу теоремы 4.1 достаточные условия положительной определенности матрицы $\mathbf{\Pi}$ для заданной деформации также являются достаточными для выполнения условия сильной эллиптичности, однако не приведены здесь в общем виде из-за своей громоздкости.

4.1. Случай $\psi = \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_4)$. Рассмотрим выполнение необходимых условий для эллиптичности для частного случая определяющих соотношений в двумерном случае.

Моделирование работы сердца представляет большой интерес для решения многих биомедицинских задач. Механическое поведение различных участков сердца активно исследовалось и

исследуется. Одним из таких участков является перикард (внешняя оболочка сердца, околосердечная сумка). Согласно экспериментальным данным, перикард может считаться анизотропным ортотропным материалом, т. е. существуют три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии свойств. Анизотропия свойств связана с сетью упругих волокон, расположенных в перикарде.

В работах [8,9] на основании экспериментальных данных было предложено определяющее соотношение для перикарда. Предложенная мера деформации в [8] совпадает с ξ_1, ξ_2, ξ_4 , и полученное соотношение для гиперупругого случая имеет вид

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_4) = q_1 \xi_1 + g_1 \left(\frac{e^{\alpha_1 \xi_1} - \alpha_1 \xi_1 - 1}{\alpha_1^2} \right) + q_2 \xi_2 + g_2 \left(\frac{e^{\alpha_2 \xi_2} - \alpha_2 \xi_2 - 1}{\alpha_2^2} \right) + \quad (4.5)$$

$$+ \alpha_3 \xi_1^2 \xi_2^2 + \alpha_4 \xi_1^2 \xi_2^3 + \xi_4^2 G(\xi_1, \xi_2, \xi_4^2),$$

где $q_1 = 1,78$ кПа, $q_2 = 0,7$ кПа, $g_1 = 146$ кПа, $g_2 = 85$ кПа, $\alpha_1 = \alpha_2 = 23,5$, $\alpha_3 = 5550$ кПа, $\alpha_4 = 26400$ кПа. Функция $G(\xi_1, \xi_2, \xi_4^2)$ из (4.5) не может быть определена на основании использованного набора экспериментальных данных (эксперимент проводился при $\xi_4 = 0$). Необходимые условия для сильной эллиптичности для случая упругого потенциала (4.5) переписываются как

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^2} + \xi_4^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4^2} - 2\xi_4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1 \partial \xi_4} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} + 2\xi_4 \frac{\partial \psi}{\partial \xi_4} > 0; \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_2^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} > 0;$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4^2} > 0.$$

Второе неравенство (4.6) соотносится с известным фактом увеличения жесткости мягких тканей при больших растяжениях [12], что выражается в экспоненциальном законе при описании их механического поведения. Отметим, что упругий потенциал (4.5) при $\xi_4 = 0$ соответствует определяющему соотношению для некоторого изотропного материала, которое выражается в виде некоторой функции $\psi_{iso} = \psi_{iso}(\xi_1, \xi_2)$. При этом необходимые условия в виде экспоненциального роста ψ по ξ_1 и по ξ_2 выполняются, и, более того, ψ_{iso} будет удовлетворять условию сильной эллиптичности для любых значений ξ_1, ξ_2 .

Для описания механического поведения перикарда при различных значениях ξ_1, ξ_2, ξ_4 необходимо найти функцию $G(\xi_1, \xi_2, \xi_4^2)$ из (4.5) на основании экспериментальных данных, при которых $\xi_4 \neq 0$. При этом условия (4.6) накладывают ограничения на вид функции $G(\xi_1, \xi_2, \xi_4^2)$, чтобы выполнялось условие эллиптичности уравнений равновесия. В силу замечания 4.1 и общего вида функции $G(\xi_1, \xi_2, \xi_4^2)$ исследование достаточных условий эллиптичности уравнений не приведено.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнение условий сильной эллиптичности для гиперупругого материала непосредственно связано с корректным описанием механического поведения материала. Данное условие является необходимым условием устойчивости равновесной упругой деформации. Одним из главных следствий выполнения условия сильной эллиптичности является вещественность скорости распространения волн в материале. В данной работе было исследовано условие сильной эллиптичности для определяющих соотношений гиперупругого материала в случае меры деформации, основанной на QR-разложении градиента деформации. Выполнение условия сильной эллиптичности эквивалентно положительной определенности матрицы, вид которой был получен в статье. Были получены необходимые условия, накладывающие ограничения на вид упругого потенциала в новых инвариантах, для выполнения условия сильной эллиптичности. В частности, для предложенной ранее гиперупругой модели перикарда, восстановленной по экспериментальным данным, получены ограничения на вид упругого потенциала.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 17-71-10102.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ А

6.1. Производные инвариантов. Поскольку

$$\xi_1 = \ln \tilde{F}_{11}, \quad \xi_2 = \ln \tilde{F}_{22}, \quad \xi_3 = \ln \tilde{F}_{33}, \quad \xi_4 = \frac{\tilde{F}_{12}}{\tilde{F}_{11}}, \quad \xi_5 = \frac{\tilde{F}_{13}}{\tilde{F}_{11}}, \quad \xi_6 = \frac{\tilde{F}_{23}}{\tilde{F}_{22}},$$

то соответствующие производные запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial \tilde{F}_{ij}} &= \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \delta_{i1} \delta_{j1}; & \frac{\partial \xi_2}{\partial \tilde{F}_{ij}} &= \frac{1}{\tilde{F}_{22}} \delta_{i2} \delta_{j2}; & \frac{\partial \xi_3}{\partial \tilde{F}_{ij}} &= \frac{1}{\tilde{F}_{33}} \delta_{i3} \delta_{j3}; \\ \frac{\partial \xi_4}{\partial \tilde{F}_{ij}} &= \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \delta_{i1} \delta_{j2} - \frac{\tilde{F}_{12}}{\tilde{F}_{11}^2} \delta_{i1} \delta_{j1}; \\ \frac{\partial \xi_5}{\partial \tilde{F}_{ij}} &= \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \delta_{i1} \delta_{j3} - \frac{\tilde{F}_{13}}{\tilde{F}_{11}^2} \delta_{i1} \delta_{j1}; \\ \frac{\partial \xi_6}{\partial \tilde{F}_{ij}} &= \frac{1}{\tilde{F}_{22}} \delta_{i2} \delta_{j3} - \frac{\tilde{F}_{23}}{\tilde{F}_{22}^2} \delta_{i2} \delta_{j2}, \end{aligned}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

6.2. Матрица П. Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \mathbf{e}'_1 \otimes \mathbf{E}_1, & \mathbf{H}_2 &= \mathbf{e}'_2 \otimes \mathbf{E}_2, & \mathbf{H}_3 &= \mathbf{e}'_3 \otimes \mathbf{E}_3, \\ \mathbf{H}_4 &= \mathbf{e}'_1 \otimes \mathbf{E}_2, & \mathbf{H}_5 &= \mathbf{e}'_2 \otimes \mathbf{E}_3, & \mathbf{H}_6 &= \mathbf{e}'_1 \otimes \mathbf{E}_3, \end{aligned}$$

тогда матрица $\mathbf{\Pi}$ определяется как

$$\mathbf{\Pi} = \left[(\mathbf{Q}^T \mathbf{H}_\alpha) : \frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{\mathbf{F}} \partial \tilde{\mathbf{F}}} : (\mathbf{Q}^T \mathbf{H}_\beta) \right]_{6 \times 6}. \quad (6.1)$$

Будем считать, что

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial \xi_i}.$$

Учитывая, что $\Pi_{ij} = \Pi_{ji}$, получим следующие выражения для элементов матрицы $\mathbf{\Pi}$:

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= \sum_{n=1,4,5} \sum_{m=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_m} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}} \frac{\partial \xi_m}{\partial \tilde{F}_{11}} + \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11} \partial \tilde{F}_{11}}; \\ \Pi_{12} &= \sum_{n=1,4,5} \sum_{m=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_m} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}} \frac{\partial \xi_m}{\partial \tilde{F}_{22}}; \\ \Pi_{13} &= \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_3} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}} \frac{\partial \xi_3}{\partial \tilde{F}_{33}} = \frac{1}{\tilde{F}_{33}} \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_3} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}}; \\ \Pi_{14} &= \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_4} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}} \frac{\partial \xi_4}{\partial \tilde{F}_{12}} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_4} \frac{\partial^2 \xi_4}{\partial \tilde{F}_{11} \partial \tilde{F}_{12}} = \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_4} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}} - \frac{1}{\tilde{F}_{11}^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_4}; \\ \Pi_{15} &= \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_6} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}} \frac{\partial \xi_6}{\partial \tilde{F}_{23}} = \frac{1}{\tilde{F}_{22}} \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_6} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}}; \\ \Pi_{16} &= \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_5} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}} \frac{\partial \xi_5}{\partial \tilde{F}_{13}} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_5} \frac{\partial^2 \xi_5}{\partial \tilde{F}_{11} \partial \tilde{F}_{13}} = \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \sum_{n=1,4,5} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_5} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{11}} - \frac{1}{\tilde{F}_{11}^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_5}; \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{22} &= \sum_{n=2,6} \sum_{m=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_m} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}} \frac{\partial \xi_m}{\partial \tilde{F}_{22}} + \sum_{n=2,6} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22} \partial \tilde{F}_{22}}; \\
\Pi_{23} &= \sum_{n=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_3} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}} \frac{\partial \xi_3}{\partial \tilde{F}_{33}} = \frac{1}{\tilde{F}_{33}} \sum_{n=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_3} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}}; \\
\Pi_{24} &= \sum_{n=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_4} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}} \frac{\partial \xi_4}{\partial \tilde{F}_{12}} = \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \sum_{n=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_4} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}}; \\
\Pi_{25} &= \sum_{n=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_6} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}} \frac{\partial \xi_6}{\partial \tilde{F}_{23}} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_6} \frac{\partial^2 \xi_6}{\partial \tilde{F}_{22} \partial \tilde{F}_{23}} = \frac{1}{\tilde{F}_{22}} \sum_{n=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_6} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}} - \frac{1}{\tilde{F}_{22}^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_6}; \\
\Pi_{26} &= \sum_{n=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_5} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}} \frac{\partial \xi_5}{\partial \tilde{F}_{13}} = \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \sum_{n=2,6} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_n \partial \xi_5} \frac{\partial \xi_n}{\partial \tilde{F}_{22}}; \\
\Pi_{33} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3^2} \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial \tilde{F}_{33}} \right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_3} \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial \tilde{F}_{33} \partial \tilde{F}_{33}} = \frac{1}{\tilde{F}_{33}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3^2} - \frac{1}{\tilde{F}_{33}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_3}; \\
\Pi_{34} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3 \partial \xi_4} \frac{\partial \xi_3}{\partial \tilde{F}_{33}} \frac{\partial \xi_4}{\partial \tilde{F}_{12}} = \frac{1}{\tilde{F}_{33}} \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3 \partial \xi_4}; \\
\Pi_{35} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3 \partial \xi_6} \frac{\partial \xi_3}{\partial \tilde{F}_{33}} \frac{\partial \xi_6}{\partial \tilde{F}_{23}} = \frac{1}{\tilde{F}_{33}} \frac{1}{\tilde{F}_{22}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3 \partial \xi_6}; \\
\Pi_{36} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3 \partial \xi_5} \frac{\partial \xi_3}{\partial \tilde{F}_{33}} \frac{\partial \xi_5}{\partial \tilde{F}_{13}} = \frac{1}{\tilde{F}_{33}} \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_3 \partial \xi_5}; \\
\Pi_{44} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4^2} \left(\frac{\partial \xi_4}{\partial \tilde{F}_{12}} \right)^2 = \frac{1}{\tilde{F}_{11}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4^2}; \\
\Pi_{45} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4 \partial \xi_6} \frac{\partial \xi_4}{\partial \tilde{F}_{12}} \frac{\partial \xi_6}{\partial \tilde{F}_{23}} = \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \frac{1}{\tilde{F}_{22}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4 \partial \xi_6}; \\
\Pi_{46} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4 \partial \xi_5} \frac{\partial \xi_4}{\partial \tilde{F}_{12}} \frac{\partial \xi_5}{\partial \tilde{F}_{13}} = \frac{1}{\tilde{F}_{11}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_4 \partial \xi_5}; \\
\Pi_{55} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_6^2} \left(\frac{\partial \xi_6}{\partial \tilde{F}_{23}} \right)^2 = \frac{1}{\tilde{F}_{22}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_6^2}; \\
\Pi_{56} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_6 \partial \xi_5} \frac{\partial \xi_6}{\partial \tilde{F}_{23}} \frac{\partial \xi_5}{\partial \tilde{F}_{13}} = \frac{1}{\tilde{F}_{11}} \frac{1}{\tilde{F}_{22}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_6 \partial \xi_5}; \\
\Pi_{66} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_5^2} \left(\frac{\partial \xi_5}{\partial \tilde{F}_{13}} \right)^2 = \frac{1}{\tilde{F}_{11}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_5^2}.
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980.
2. Сьярле Ф. Математическая теория упругости. — М.: Мир, 1992.
3. Тьртышников Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра. — М.: Физматлит, 2007.
4. Трудделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975.
5. Criscione J. C. Rivlin's representation formula is ill-conceived for the determination of response functions via biaxial testing// В сб.: «The Rational Spirit in Modern Continuum Mechanics». — Dordrecht: Springer, 2004. — С. 197–215.
6. Criscione J. C., Humphrey J. D., Douglas A. S., Hunter W. C. An invariant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms in isotropic hyperelasticity// J. Mech. Phys. Solids. — 2000. — 48, № 12. — С. 2445–2465.
7. Criscione J. C., McCulloch A. D., Hunter W. C. Constitutive framework optimized for myocardium and other high-strain, laminar materials with one fiber family// J. Mech. Phys. Solids. — 2002. — 50, № 8. — С. 1681–1702.

8. *Criscione J. C., Sacks M. S., Hunter W. C.* Experimentally tractable, pseudo-elastic constitutive law for biomembranes: I. Theory// *J. Biomech. Eng.* — 2003. — 125, № 1. — С. 94–99.
9. *Criscione J. C., Sacks M. S., Hunter W. C.* Experimentally tractable, pseudo-elastic constitutive law for biomembranes: II. Application// *J. Biomech. Eng.* — 2003. — 125, № 1. — С. 100–105.
10. *Freed A. D., Srinivasa A. R.* Logarithmic strain and its material derivative for a QR decomposition of the deformation gradient// *Acta Mech.* — 2015. — 226, № 8. — С. 2645–2670.
11. *Hayes M.* Static implications of the strong-ellipticity condition// *Arch. Ration. Mech. Anal.* — 1969. — 33, № 3. — С. 181–191.
12. *Holzapfel G. A.* Biomechanics of soft tissue// *Handb. Mater. Behav. Models.* — 2001. — 3, № 1. — С. 1049–1063.
13. *Humphrey J. D.* Computer methods in membrane biomechanics// *Comput. Methods Biomech. Biomed. Eng.* — 1998. — 1, № 3. — С. 171–210.
14. *Knowles J. K., Sternberg E.* On the failure of ellipticity and the emergence of discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics// *J. Elasticity.* — 1978. — 8, № 4. — С. 329–379.
15. *Kotiya A. A.* Mechanical characterisation and structural analysis of normal and remodeled cardiovascular soft tissue// *Doctoral diss.* — Texas A&M University, 2008.
16. *Martins P., Natal Jorge R. M., Ferreira A. J. M.* A comparative study of several material models for prediction of hyperelastic properties: application to silicone-rubber and soft tissues// *Strain.* — 2006. — 42, № 3. — С. 135–147.
17. *Merodio J., Ogden R. W.* Instabilities and loss of ellipticity in fiber-reinforced compressible non-linearly elastic solids under plane deformation// *Int. J. Solids Structures.* — 2003. — 40, № 18. — С. 4707–4727.
18. *Rivlin R. S., Saunders D. W.* Large elastic deformations of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber// *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* — 1951. — 243, № 865. — С. 251–288.
19. *Sendova T., Walton J. R.* On strong ellipticity for isotropic hyperelastic materials based upon logarithmic strain// *Int. J. Nonlinear Mech.* — 2005. — 40, № 2. — С. 195–212.
20. *Srinivasa A. R.* On the use of the upper triangular (or QR) decomposition for developing constitutive equations for Green-elastic materials// *Internat. J. Engrg. Sci.* — 2012. — 60. — С. 1–12.

В. Ю. Саламатова

Московский физико-технический институт (государственный университет),
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9;
Первый Московский государственный медицинский университет им. И. М. Сеченова,
119991, Москва, ул. Большая Пироговская, д. 2, стр. 4
E-mail: salamatova@gmail.com

Ю. В. Василевский

Институт вычислительной математики РАН,
119333, Москва, ул. Губкина, д. 8;
Московский физико-технический институт,
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9;
Первый Московский государственный медицинский университет им. И. М. Сеченова,
119991, Москва, ул. Большая Пироговская, д. 2, стр. 4.
E-mail: yuri.vassilevski@gmail.com

On Ellipticity of Hyperelastic Models Based on Experimental Data

© 2017 V. Yu. Salamatova, Yu. V. Vasilevskii

Abstract. The condition of ellipticity of the equilibrium equation plays an important role for correct description of mechanical behavior of materials and is a necessary condition for new defining relationships. Earlier, new deformation measures were proposed to vanish correlations between the terms, that dramatically simplifies restoration of defining relationships from experimental data. One of these new deformation measures is based on the QR-expansion of deformation gradient. In this paper, we study the strong ellipticity condition for hyperelastic material using the QR-expansion of deformation gradient.

REFERENCES

1. A. I. Lurie, *Nelineynaya teoriya uprugosti* [Nonlinear Theory of Elasticity], Nauka, Moscow, 1980 (Russian translation).
2. P. Ciarlet, *Matematicheskaya teoriya uprugosti* [Mathematical Elasticity], Mir, Moscow, 1992 (Russian translation).
3. E. E. Tyrtyshnikov, *Matrichnyy analiz i lineynaya algebra* [Matrix Analysis and Linear Algebra], Fizmatlit, Moscow, 2007 (in Russian).
4. C. Truesdell, *Pervonachal'nyy kurs ratsional'noy mekhaniki sploshnykh sred* [A First Course in Rational Continuum Mechanics], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).
5. J. C. Criscione, "Rivlin's representation formula is ill-conceived for the determination of response functions via biaxial testing," In: *The Rational Spirit in Modern Continuum Mechanics*, Springer, Dordrecht, 2004, 197–215.
6. J. C. Criscione, J. D. Humphrey, A. S. Douglas, and W. C. Hunter, "An invariant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms in isotropic hyperelasticity," *J. Mech. Phys. Solids*, 2000, **48**, No. 12, 2445–2465.
7. J. C. Criscione, A. D. McCulloch, and W. C. Hunter, "Constitutive framework optimized for myocardium and other high-strain, laminar materials with one fiber family," *J. Mech. Phys. Solids*, 2002, **50**, No. 8, 1681–1702.
8. J. C. Criscione, M. S. Sacks, and W. C. Hunter, "Experimentally tractable, pseudo-elastic constitutive law for biomembranes: I. Theory," *J. Biomech. Eng.*, 2003, **125**, No. 1, 94–99.
9. J. C. Criscione, M. S. Sacks, and W. C. Hunter, "Experimentally tractable, pseudo-elastic constitutive law for biomembranes: II. Application," *J. Biomech. Eng.*, 2003, **125**, No. 1, 100–105.
10. A. D. Freed and A. R. Srinivasa, "Logarithmic strain and its material derivative for a QR decomposition of the deformation gradient," *Acta Mech.*, 2015, **226**, No. 8, 2645–2670.
11. M. Hayes, "Static implications of the strong-ellipticity condition," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1969, **33**, No. 3, 181–191.
12. G. A. Holzapfel, "Biomechanics of soft tissue," *Handb. Mater. Behav. Models*, 2001, **3**, No. 1, 1049–1063.
13. J. D. Humphrey, "Computer methods in membrane biomechanics," *Comput. Methods Biomech. Biomed. Eng.*, 1998, **1**, No. 3, 171–210.
14. J. K. Knowles and E. Sternberg, "On the failure of ellipticity and the emergence of discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics," *J. Elasticity*, 1978, **8**, No. 4, 329–379.
15. A. A. Kotiya, *Mechanical Characterisation and Structural Analysis of Normal and Remodeled Cardiovascular Soft Tissue*, Doctoral Diss., Texas A&M University, 2008.
16. P. Martins, R. M. Natal Jorge, and A. J. Ferreira, "A comparative study of several material models for prediction of hyperelastic properties: application to silicone-rubber and soft tissues," *Strain*, 2006, **42**, No. 3, 135–147.
17. J. Merodio and R. W. Ogden, "Instabilities and loss of ellipticity in fiber-reinforced compressible nonlinearly elastic solids under plane deformation," *Int. J. Solids Structures*, 2003, **40**, No. 18, 4707–4727.
18. R. S. Rivlin and D. W. Saunders, "Large elastic deformations of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber," *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1951, **243**, No. 865, 251–288.

19. T. Sendova and J.R. Walton, “On strong ellipticity for isotropic hyperelastic materials based upon logarithmic strain,” *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2005, **40**, No. 2, 195–212.
20. A.R. Srinivasa, “On the use of the upper triangular (or QR) decomposition for developing constitutive equations for Green-elastic materials,” *Internat. J. Engrg. Sci.*, 2012, **60**, 1–12.

V. Yu. Salamatova

Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
9 Institutskiy per., 141701 Moscow Region, Russia;
Sechenov First Moscow State Medical University,
2 build. 4 Bol’shaya Pirogovskaya st., 119991 Moscow, Russia
E-mail: salamatova@gmail.com

Yu. V. Vasilevskii

Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences,
8 Gubkina st., 119333 Moscow, Russia;
Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
9 Institutskiy per., 141701 Moscow Region, Russia;
Sechenov First Moscow State Medical University,
2 build. 4 Bol’shaya Pirogovskaya st., 119991 Moscow, Russia
E-mail: yuri.vassilevski@gmail.com