МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2010 год, том 22, номер 11, стр. 131-147

УДК: 517.958: 532.546

НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

© *2010 г.* ***К.Д. Никитин***

Институт вычислительной математики РАН
nikitin.kira@gmail.com

Рассматривается приложение нового нелинейного метода конечных объемов с двухточечной дискретизацией диффузионного потока к задачам двухфазной фильтрации. Проводится сравнительный анализ новой нелинейной и традиционной линейной дискретизаций диффузионного потока. Предлагаемый метод имеет ряд важных преимуществ по сравнению с традиционным подходом, таких как устойчивость к искажению расчетной сетки и сохранение второго порядка аппроксимации в случае полного анизотропного тензора диффузии.

Ключевые слова: задача двухфазной фильтрации, метод конечных объемов, двухточечная дискретизация потока, неструктурированная многогранная сетка.

NONLINEAR FINITE VOLUME METHOD FOR TWO-PHASE FLOW IN POROUS MEDIA

K.D. Nikitin

The Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences

The new finite volume method with nonlinear two-point flux discretization is being studied. We present an application of the method for two-phase flow model and conduct a comparison study of two approaches to discretization of the diffusive flux: conventional linear and proposed nonlinear two-point stencils. New method shows a number of important advantages over traditional approach, such as very low sensitivity to grid distortions and second order approximation in the case of full anisotropic diffusion tensor.

Key words: two-phase flow model, finite volume method, two-point flux discretization, unstructured polyhedral mesh.

1. Введение

Модель двухфазной фильтрации рассматривает вторую стадию добычи нефти, которая называется заводнением. На этой стадии вода закачивается в нагнетательную скважину, вытесняя нефть, которая выходит через производящую скважину. Численное моделирование этого процесса необходимо для построения оптимальной стратегии разработки месторождения.

Для моделирования двухфазного течения в данной работе используется метод, неявный по давлению и явный по насыщенности (IMPES-метод). Метод предполагает дискретизацию и решение уравнения диффузии для давления. Дискретизация основана на методе конечных объемов со степенями свободы, ассоциированными с ячейками, и требует определения дискретного диффузионного потока на границах ячеек. Цель данной работы - показать, что качество дискретизации диффузионного потока оказывает большое влияние на основные показатели моделирования разработки месторождения, такие как объем добычи, время прорыва и поведение водяного фронта. Проводится сравнение двух дискретизаций диффузионного потока с двухточечным шаблоном: традиционной линейной дискретизации и новой нелинейной.

Новый метод конечных объемов с нелинейной двухточечной дискретизацией потока обладает следующими преимуществами по сравнению с традиционным подходом. Во-первых, сеточное решение практически не зависит от искажения расчетной сетки. Во-вторых, новый метод обеспечивает аппроксимацию второго порядка в случае полного анизотропного тензора проницаемости (диффузии).

В случае, если расчетная сетка ортогональна, а тензор проницаемости изотропен или анизотропен, но сонаправлен сетке, коэффициенты линейной и нелинейной дискретизаций потоков совпадают. В противном случае линейная дискретизация не обеспечивает какой-либо аппроксимации, в то время как нелинейная дискретизация сохраняет первый порядок аппроксимации потока.

Моделирование многофазной фильтрации в пористой среде берет свое начало с 70-х годов 20-го века [1,2] и продолжает развиваться по сей день [3-5]. Метод конечных объемов [6] является одним из самых популярных при моделировании нефтяных и газовых месторождений.

Идея монотонного метода конечных объемов для параболических уравнений на треугольных сетках предложена К.ЛеПотье [7]. В дальнейшем метод был обобщен на случай стационарного уравнения диффузии и произвольных многоугольных и многогранных ячеек в двух- и трехмерном пространстве соответственно [8-10]. В отличие от метода конечных объемов с многоточечной аппроксимацией потока [11], новый метод гарантирует неотрицательность сеточного решения в случае неотрицательности дифференциального решения.

Во втором разделе описана основная модель двухфазной фильтрации, рассматриваемая в данной статье. В третьем разделе описывается используемый метод дискретизации по времени, неявный по давлению и явный по насыщенности. В четвертом разделе рассматривается метод дискретизации по пространству и подходы к дискретизации диффузионного потока. В последнем разделе приводятся и анализируются результаты численного моделирования с использованием двух рассматриваемых дискретизаций.

2. Модель фильтрации

Рассмотрим модель двухфазной фильтрации в пористой среде. Фаза, которая смачивает среду, называется смачивающей и обозначается индексом *w*. Другая фаза называется несмачивающей и обозначается индексом *o*.

Запишем основные уравнения двухфазной фильтрации:

– закон сохранения массы в каждой фазе:

$$\frac{\partial(\phi\rho_\alpha S_\alpha)}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + q_\alpha, \qquad \alpha = w, o\,, \tag{1}$$

– закон Дарси:

$$\mathbf{u}_\alpha = -\frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}\mathbb{K}(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha g \nabla z), \;\; \alpha = w, o\,, \tag{2}$$

– уравнение на концентрации жидкостей, заполняющих все пустоты:

$$S_w + S_o = 1, \tag{3}$$

– уравнение на капиллярное давление, определяющее разность давлений между фазами:

$$p_c(S_w) = p_o - p_w\,, \tag{4}$$

где $\mathbb{K}$ – тензор абсолютной проницаемости, ρ_α – фазовая плотность, μ_α – вязкость, $k_{r\alpha}$ – относительная проницаемость фазы α, ϕ – пористость, g – гравитационный член, а q_α – источник или сток для скважины.

3. Метод, неявный по давлению, явный по насыщенности (IMPES)

Опишем метод решения системы уравнений двухфазной фильтрации, неявный по давлению и явный по насыщенности (IMPES) [3,4].

В качестве независимых переменных выбираются давление нефти и насыщенность воды:

$$p = p_o, \quad S = S_w\,.$$

Определим полную скорость Дарси: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_o + \mathbf{u}_w$.

При фиксированной пористости среды и плотностях жидкостей имеем

$$\frac{\partial(\phi S_o)}{\partial t} + \frac{\partial(\phi S_w)}{\partial t} = 0\,,$$

а значит:

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = \frac{q_w}{\rho_w} + \frac{q_o}{\rho_o}\,. \tag{5}$$

Воспользовавшись (4), перепишем (2) в следующем виде:

$$\mathbf{u} = -\mathbb{K}(\lambda(S)\nabla p - \lambda_w(S)\nabla p_c - (\lambda_w\rho_w + \lambda_o\rho_o)g\nabla z)\,, \tag{6}$$

где $\lambda_\alpha = k_{r\alpha}/\mu_\alpha$ – фазовая мобильность, а $\lambda = \lambda_w + \lambda_o$ – полная мобильность.

Подставив (6) в (5), получим уравнение для давления:

$$-\nabla\cdot(\mathbb{K}\lambda\nabla p)=\frac{q_w}{\rho_w}+\frac{q_o}{\rho_o}-\nabla\cdot[\mathbb{K}(\lambda_w\nabla p_c+(\lambda_w\rho_w+\lambda_o\rho_o)g\nabla z)]. \quad (7)$$

Фазовые скорости $\mathbf{u}_w$ и $\mathbf{u}_o$ могут быть выражены через полную скорость $\mathbf{u}$ следующим образом:

$$\mathbf{u}_w=\frac{\lambda_w}{\lambda}(\mathbf{u}+\mathbb{K}\lambda_o\nabla p_c+\mathbb{K}\lambda_o(\rho_w-\rho_o)g\nabla z),$$

$$\mathbf{u}_o=\frac{\lambda_o}{\lambda}(\mathbf{u}-\mathbb{K}\lambda_w\nabla p_c+\mathbb{K}\lambda_w(\rho_o-\rho_w)g\nabla z).$$

С учетом (4) и (6) из законов (1) и (2) (для $\alpha=w$) выводится уравнение для насыщенности:

$$\phi\frac{\partial S}{\partial t}+\nabla\cdot\frac{\lambda_w}{\lambda}(S)\left(\mathbb{K}\lambda_o(S)(\frac{dp_c}{dS}\nabla S+(\rho_o-\rho_w)g\nabla z)+\mathbf{u}\right)=\frac{q_w}{\rho_w}. \quad (8)$$

Сформулируем теперь метод IMPES как серию временных подшагов:

1. Неявно решается уравнение (7) и по текущему значению насыщенности S^n вычисляется текущее давление p^n:

$$-\nabla\cdot(\mathbb{K}\lambda^n\nabla p^n)=\frac{q_w}{\rho_w^n}+\frac{q_o}{\rho_o^n}-\nabla\cdot[\mathbb{K}(\lambda_w^n\nabla p_c+(\lambda_w^n\rho_w^n+\lambda_o^n\rho_o^n)g\nabla z)], \quad (9)$$

где $\lambda_\alpha^n=\lambda_\alpha(S^n,p^n)$ и $\rho_\alpha^n=\rho_\alpha(p^n)$.

2. При помощи (6) находится текущая скорость Дарси по текущим значениям насыщенности S^n и давления p^n:

$$\mathbf{u}^n=-\mathbb{K}(\lambda^n\nabla p^n-\lambda_w^n\nabla p_c-(\lambda_w^n\rho_w^n+\lambda_o^n\rho_o^n)g\nabla z). \quad (10)$$

3. Явно решается уравнение (8) для того, чтобы по текущим насыщенности S^n, давлению p^n и скорости $\mathbf{u}^n$ получить насыщенность S^{n+1} на следующем временном шаге:

$$\phi\frac{S^{n+1}-S^n}{\Delta t^{n+1}}=\frac{q_w}{\rho_w^n}-\nabla\cdot\frac{\lambda_w^n}{\lambda^n}\left(\mathbb{K}\lambda_o^n\left[\frac{dp_c}{dS}\nabla S+(\rho_o^n-\rho_w^n)g\nabla z\right]+\mathbf{u}^n\right). \quad (11)$$

Мобильность на ребре e_{ij} берется «вверх по потоку»:

$$\lambda_\alpha(S)=\begin{cases}\lambda_\alpha(S_i), & \text{если поток направлен из ячейки } i \text{ в ячейку } j,\\ \lambda_\alpha(S_j), & \text{если поток направлен из ячейки } j \text{ в ячейку } i.\end{cases}$$

В уравнении (7) используются граничные условия двух типов:

1) условия непротекания (однородное граничное условие Неймана) на границе резервуара,

2) на скважинах задано фиксированное забойное давление p_{bh}.

Рассмотрим упрощенную модель скважин, в которой каждая скважина считается вертикальной с перфорацией в одном сеточном блоке. Источник или сток для скважины определяется по формуле:

$$q_\alpha = \frac{\rho_\alpha k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} WI(p_{bh} - p - \rho_\alpha(z_{bh} - z)), \tag{12}$$

где WI – коэффициент продуктивности скважины, который не зависит от свойств жидкости, а определяется только свойствами среды [12].

Считается, что для скважин отсутствует капиллярное давление, а, следовательно, давление воды совпадает с давлением нефти. Фазовые мобильности λ_w и λ_o зависят от насыщенности и давления в ячейке, в которой расположена скважина.

Для решения уранений (7) и (8) предлагается использовать метод конечных элементов.

4. Линейный и нелинейный методы конечных объемов

Рассмотрим задачу диффузии: $-\mathrm{div}(\mathbb{K}\nabla p) = g$ в двумерной области Ω с однородным условием Неймана на границе.

Введем обозначение для диффузионного потока: $\mathbf{q} = -\mathbb{K}\nabla p$. Он удовлетворяет уравнению баланса:

$$\mathrm{div}\mathbf{q} = g \quad \text{в области } \Omega. \tag{13}$$

Рассмотрим для области Ω конформную сетку с многоугольными ячейками. Проинтегрируем (13) по ячейке T и воспользуемся формулой Грина:

$$\int_{\partial T} \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}_T\, ds = \int_T g\, dx, \tag{14}$$

где $\mathbf{n}_T$ – внешняя единичная нормаль к ∂T. Обозначим ребро ячейки через e, а соответствующую нормаль через $\mathbf{n}_e$. Если ячейка одна, нормали ко всем ее ребрам считаются внешними. В ином случае для каждой нормали определена ориентация. Будем считать, что $|\mathbf{n}_e| = |e|$, т.е. длина нормали к ребру равна длине этого ребра. Из уравнения (14) получается

$$\sum_{e\in\partial T} \mathbf{q}_e\cdot\mathbf{n}_e = \int_T g\, \mathrm{d}x, \tag{15}$$

где $\mathbf{q}_e$ – средняя плотность потока через ребро e.

Для простоты будем рассматривать постоянный диффузионный тензор $\mathbb{K}$, хотя стоит отметить, что нелинейная дискретизация потока выводится для более общего случая. Расширение метода на случай неоднородного диффузионного тензора описывается в [9,10].

С каждой ячейкой T мы ассоциируем одну степень свободы P_T для давления p. Если две ячейки T_+ и T_- имеют общее ребро e, двухточечная дискретизация диффузионного потока записывается следующим образом:

$$\mathbf{q}_e^h \cdot \mathbf{n}_e = D_e^+ P_{T_+} - D_e^- P_{T_-}, \tag{16}$$

где D_e^+ и D_e^- – некоторые коэффициенты. В случае линейной дискретизации потока эти коэффициенты постоянны и равны. Для нелинейной дискретизации они могут различаться и зависят от концентрации в прилегающих ячейках.

4.1. Обозначения. Введем следующие обозначения. Через E_I и E_B обозначим непересекающиеся множества внутренних и граничных ребер сетки, а через E_T – множество ребер многоугольника T.

Для каждого многоугольника T определяется центр масс x_T, с которым ассоциирована степень свободы. Аналогично для каждого граничного ребра $e \in E_B$ определен центр масс x_e.

4.2. Линейная дискретизация потока. Рассмотрим случай неортогональной сетки с анизотропным тензором проводимости: конормали $\ell_e = \mathbb{K}\mathbf{n}_e$ и векторы $\mathbf{t}_e$, соединяющие точки коллокации, могут не быть ортогональными к ребрам сетки (см. рис.1).

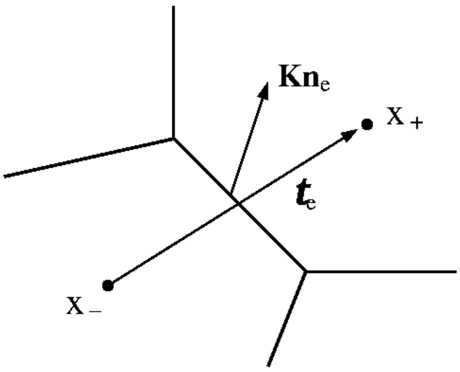


Рис.1. Линейная дискретизация потока.

Для потока через внутреннее ребро $e \in E_I$ верно

$$\mathbb{K}\nabla p \cdot \mathbf{n}_e = \nabla p \cdot (\mathbb{K}\mathbf{n}_e). \tag{17}$$

Линейная двухточечная дискретизация градиента давления имеет вид

$$\nabla p = \frac{P_+ - P_-}{|\mathbf{t}_e|}\mathbf{t}_e. \tag{18}$$

Подставив (18) в (17), получим

$$(\mathbb{K}\nabla p)_e^h \cdot \mathbf{n}_e = \frac{P_+ - P_-}{|\mathbf{t}_e|} \mathbb{K}\mathbf{n}_e \cdot \frac{\mathbf{t}_e}{|\mathbf{t}_e|} = \frac{\mathbb{K}\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{t}_e}{|\mathbf{t}_e|^2} (P_+ - P_-) = \mathbf{T}\ (P_+ - P_-) \tag{19}$$

с проводимостью $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbb{K}\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{t}_e}{|\mathbf{t}_e|^2}$ и коэффициентами $D_e^+ = D_e^- = \mathbf{T}$.

Потоки через граничные ребра определяются через граничные условия Неймана.

4.3. Нелинейная дискретизация потока. Для $i = 1, 2$ обозначим $t_{e,i} = x_{e,i} - x_T$, а угол между $t_{e,i}$ и вектором конормали $\ell_e = \mathbb{K}_T \mathbf{n}_e$ – через $\theta_{e,i}$. Предположим, что для каждого ребра $e \in E_T$ существуют такие две точки коллокации $x_{e,1}$ и $x_{e,2}$, что выполняются следующие условия (см. рис.2):

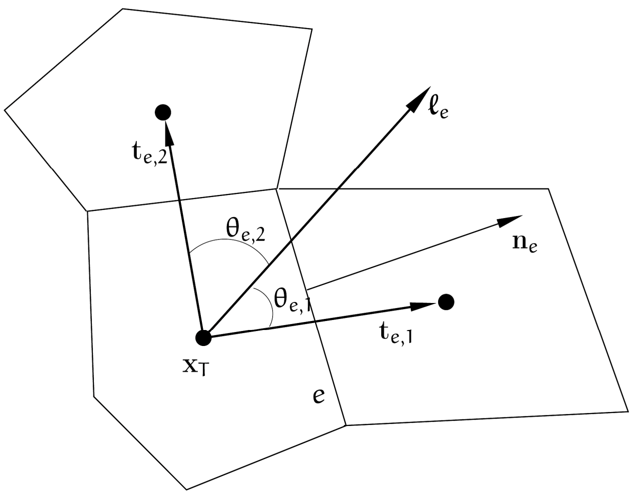


Рис.2. Нелинейная дискретизация потока.

1. $\theta_{e,1} < \pi, \quad \theta_{e,2} < \pi \quad$ и $\quad \theta_{e,1} + \theta_{e,2} < \pi$ (20)

2. Конормаль ℓ_e лежит между векторами $t_{e,1}$ и $t_{e,2}$, т.е.

$$t_{e,1} \times \ell_e \le 0, \qquad t_{e,2} \times \ell_e > 0. \tag{21}$$

Если выполняются (20) и (21), тогда существуют такие неотрицательные α_e и β_e, что

$$\frac{1}{|\ell_e|}\ell_e = \frac{\alpha_e}{|t_{e,1}|} t_{e,1} + \frac{\beta_e}{|t_{e,2}|} t_{e,2}. \tag{22}$$

Предположим, что e – внутреннее ребро. Тогда обозначим через T_+ и T_- ячейки, которые соседствуют по этому ребру, и предположим, что нормаль $\mathbf{n}_e$ направлена из T_+. Через $x_\pm = x_{T_\pm}$ обозначим центры ячеек $T_\pm$ соответственно, а через $P_\pm = P_{T_\pm}$ – давления в этих точках.

Пусть $T = T_+$. Используя определение производной по нормали $\frac{\partial p}{\partial \ell_e} | \ell_e | = \nabla p \cdot (\mathbb{K} \mathbf{n}_e)$ и (22), получаем

$$\mathbf{q}_e \cdot \mathbf{n}_e = -\frac{|\ell_e|}{|e|} \int_e \frac{\partial p}{\partial \ell_e} ds = -\frac{|\ell_e|}{|e|} \int_e \left(\alpha_e \frac{\partial p}{\partial t_{e,1}} + \beta_e \frac{\partial p}{\partial t_{e,2}} \right) ds . \tag{23}$$

Заменим теперь производные по направлению конечными разностями:

$$\int_e \frac{\partial p}{\partial t_{e,i}} ds \approx \frac{P_{e,i} - P_T}{|x_{e,i} - x_T|} |e|, \qquad i = 1, 2. \tag{24}$$

Отметим, что формула (24) точна для линейного давления. Используя (24), приведем уравнение (23) к следующему виду:

$$\mathbf{q}_e^h \cdot \mathbf{n}_e = -|\ell_e| \left(\frac{\alpha_e}{|t_{e,1}|} (P_{e,1} - P_T) + \frac{\beta_e}{|t_{e,2}|} (P_{e,2} - P_T) \right). \tag{25}$$

На данной стадии дискретизация потока включает значения давления больше чем в двух точках. Запишем аналогичное уравнение для соседней ячейки $T = T_-$. Чтобы отличать эти два уравнения, введем индексы $\pm$ вместо индекса *e*. Поскольку нормаль $\mathbf{n}_e$ является внутренней для ячейки T_-, поток будет иметь обратный знак:

$$\mathbf{q}_\pm^h \cdot \mathbf{n}_e = \mp |\ell_e| \left(\frac{\alpha_\pm}{|t_{\pm,1}|} (P_{\pm,1} - P_T) + \frac{\beta_\pm}{|t_{\pm,2}|} (P_{\pm,2} - P_T) \right). \tag{26}$$

Возьмем в качестве новой дискретизации диффузионного потока линейную комбинацию $\mathbf{q}_\pm^h \cdot \mathbf{n}_e$ с неотрицательными коэффициентами $\mu_\pm$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_e^h \cdot \mathbf{n}_e &= \mu_+ \mathbf{q}_+^h \cdot \mathbf{n}_e - \mu_- \mathbf{q}_-^h \cdot \mathbf{n}_e = \\ &= \mu_+ |\ell_e| \left(\frac{\alpha_+}{|t_{+,1}|} + \frac{\beta_+}{|t_{+,2}|} \right) P_+ - \mu_- |\ell_e| \left(\frac{\alpha_-}{|t_{-,1}|} + \frac{\beta_-}{|t_{-,2}|} \right) P_- - \\ &- \mu_+ |\ell_e| \left(\frac{\alpha_+}{|t_{+,1}|} P_{+,1} + \frac{\beta_+}{|t_{+,2}|} P_{+,2} \right) + \mu_- |\ell_e| \left(\frac{\alpha_-}{|t_{-,1}|} P_{-,1} + \frac{\beta_-}{|t_{-,2}|} P_{-,2} \right). \end{aligned} \tag{27}$$

Для того чтобы дискретизация была двухточечной и аппроксимировала диффузионный поток необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} -\mu_+ d_+ + \mu_- d_- &= 0, \\ \mu_+ + \mu_- &= 1, \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$d_\pm = |\ell_e| \left(\frac{\alpha_\pm}{|t_{\pm,1}|} P_{\pm,1} + \frac{\beta_\pm}{|t_{\pm,2}|} P_{\pm,2} \right). \qquad (29)$$

Отметим, что если точка $x_{\pm,i}$ совпадает с одной из точек $x_\pm$, соответствующее давление исключается из (29). Таким образом, в случае $\mathbb{K}$-ортогональной сетки схема принимает вид традиционного пятиточечного шаблона.

Система уравнений (28) может быть решена явно. Поскольку $\alpha_\pm \ge 0$ и $\beta_\pm \ge 0$, то $d_\pm \ge 0$ для всех $P \ge 0$. Если $d_\pm = 0$, положим $\mu_\pm = 0.5$. Иначе

$$\mu_+ = \frac{d_-}{d_- + d_+} \quad \text{и} \quad \mu_- = \frac{d_+}{d_- + d_+}. \qquad (30)$$

Из того, что $d_\pm \ge 0$ следует, что и $\mu_\pm \ge 0$. Подставив коэффициенты в (27), получим двухточечную дискретизацию диффузионного потока (16) с коэффициентами

$$D_e^\pm = \mu_\pm |\ell_e| (\alpha_\pm / |t_{\pm,1}| + \beta_\pm / |t_{\pm,2}|). \qquad (31)$$

Предположим теперь, что *e* – граничное ребро с условием Неймана:

$$\mathbf{q}_e^h \cdot \mathbf{n}_e = \bar{g}_{N,e} \, |e|, \qquad (32)$$

где $\bar{g}_{N,e}$ – среднее значение диффузионного потока через ребро *e*. Несмотря на то, что поток через ребро *e* задан, для вычисления потоков (27) через другие ребра может использоваться значение давления на ребре P_e. Представим, что ребро *e* – это ячейка с нулевым объемом. Тогда для вычисления потока через ребро справедлива формула

$$\mathbf{q}_e^h \cdot \mathbf{n}_e = D_e^+ P_T - D_e^- P_e, \qquad (33)$$

где *T* – ячейка, которая содержит ребро *e*, а коэффициенты $D_e^\pm$ заданы формулой (31). Таким образом, значение P_e получается из уравнения

$$D_e^- P_e - D_e^+ P_T = -\bar{g}_{N,e} |e|. \qquad (34)$$

4.4. Формирование дискретной системы. Для каждой ячейки T уравнение (14) принимает вид

$$\sum_{e \in E_T} \chi(T,e) \mathbf{q}_e^h \cdot \mathbf{n}_e = \int_T g \, \mathrm{d}x, \qquad (35)$$

где $\chi(T,e) = \pm 1$ в зависимости от ориентации нормали $\mathbf{n}_e$ относительно ячейки T. Подставим формулу (15) с коэффициентами (31) в уравнение (35) и воспользуемся (34) для того, чтобы исключить давление на граничных ребрах. В результате получится линейная или нелинейная система:

$$\mathbb{M}(P)P = G(P)\,, \tag{36}$$

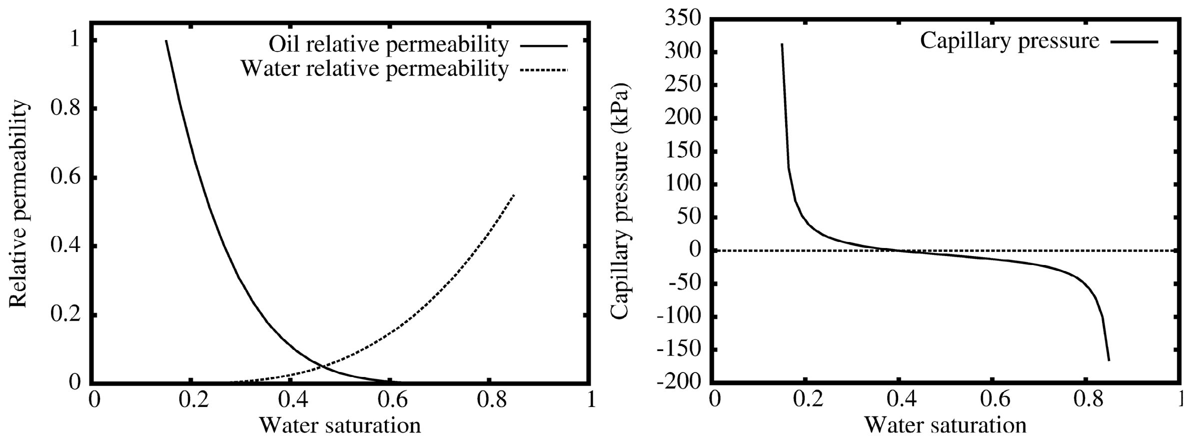
где матрица $\mathbb{M}(P)$ собрана из блоков 2×2:

$$\mathbb{M}_e(P) = \begin{pmatrix} M_e^+(P) & -M_e^-(P) \\ -M_e^+(P) & M_e^-(P) \end{pmatrix} \tag{37}$$

для внутренних граней. Граничные условия и функция внешних источников образуют правую часть системы $G(P)$:

$$G_T(P) = \int_T g\,dx - \sum_{e\in E_B\cap\partial T} |e|\,\bar{g}_{N,e}\,. \tag{38}$$

Если система (35) линейная, используется метод бисопряженных градиентов [13]. В случае нелинейной системы (35) используется метод Пикара для ее решения.



а) б)

Рис.3. Зависимость относительных проницаемостей и капиллярного давления от водонасыщенности.

5. Численные эксперименты

В этом разделе проводится сравнение линейной и нелинейной дискретизаций диффузионного потока на основании численных экспериментов.

Для случаев, когда расчетная сетка ортогональная, а тензор абсолютной проницаемости изотропный, дискретизации совпадают по построению.

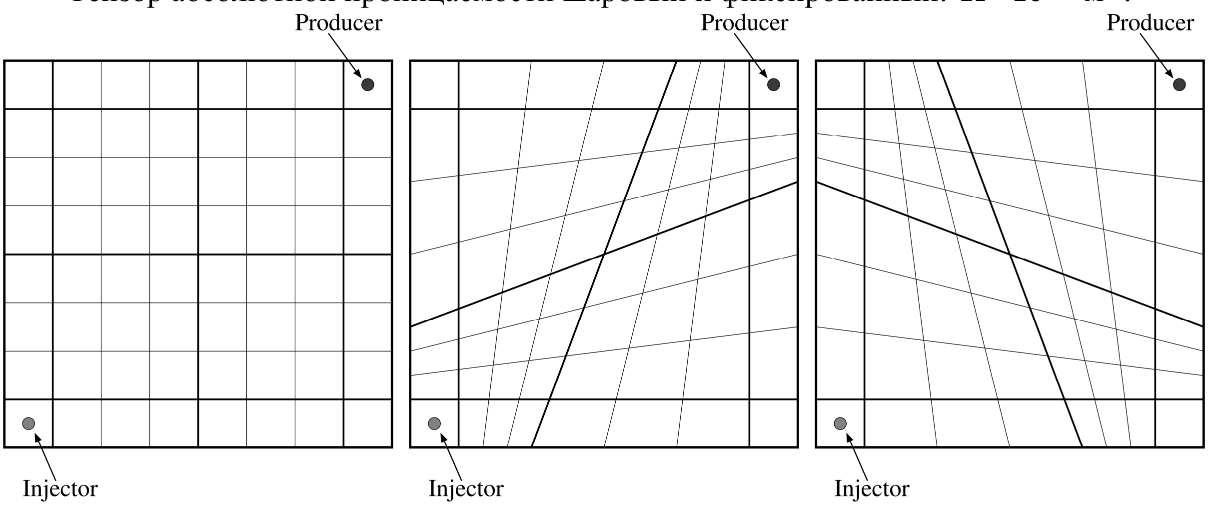
Предлагается две серии экспериментов: расчет на неортогональных сетках и использование полного анизотропного тензора проницаемости. Размеры расчетной области $30.5\text{м}\times 30.5\text{м}$. Для всех экспериментов используются одинаковые свойства жидкостей: относительные проницаемости $k_{r\alpha}$ показаны на рис.3а, зависимость капиллярного давления от водонасыщенности показана на рис.3б. Забойное давление на нагнетательной скважине – $2.827{\cdot}10^7$ Па, на производящей – $2.689{\cdot}10^7$ Па. Коэффициенты продуктивности скважины $WI = 2.67{\cdot}10^{-12}$ м^3. Вязкости μ_α и объемные коэффициенты B_α заданы кусочно-линейными функциями с опорными значениями, представленными в табл.1. Плотности вычисляются по формуле $\rho_\alpha = \rho_\alpha^0 B_\alpha$, где $\rho_w^0 \approx 9.8{\cdot}10^3$ Па/м, а $\rho_o^0 \approx 8.8{\cdot}10^3$ Па/м. Объемы добываемых жидкостей задаются в *SCM* (Standard Cubic Meter), т.е. кубометрах в нормальных условиях.

Таблица 1. Зависимость свойств жидкостей от давления.

p (Па)	B_o (м^3/SCM)	B_w (м^3/SCM)	μ_o (Па·с)	μ_w (Па·с)
$2.827{\cdot}10^7$	1.0030285	1.0131740	$9.0582{\cdot}10^{-2}$	$5.151{\cdot}10^{-4}$
$2.758{\cdot}10^7$	1.0019665	1.0129084	$9.6015{\cdot}10^{-2}$	$5.179{\cdot}10^{-4}$
$2.689{\cdot}10^7$	1.0009032	1.0126377	$1.0172{\cdot}10^{-1}$	$5.207{\cdot}10^{-4}$

5.1. Неортогональные сетки. Основная идея эксперимента с неортогональными сетками заключается в следующем: берется равномерная сетка $N \times N$; подсоединяются скважины и фиксируются ячейки, которые их содержат; сетка искажается так, чтобы ячейки со скважинами остались неизменными; проводится расчет с линейными и нелинейными потоками на исходной и модифицированной сетках; сравниваются результаты.

Тензор абсолютной проницаемости шаровый и фиксированный: $\mathbb{K} = 10^{-13}$м^2.

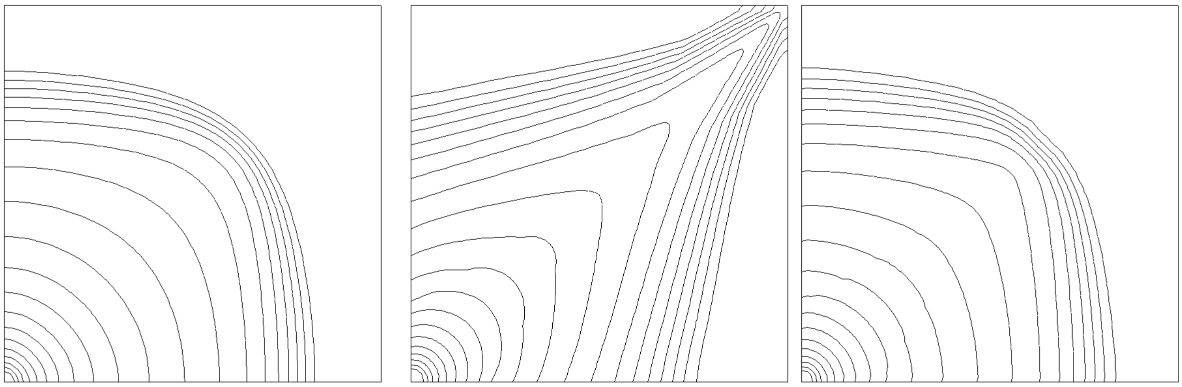


а) Сетка 1 ($\alpha = 0°$) б) Сетка 2 ($\alpha = -30°$) в) Сетка 3 ($\alpha = 30°$)

Рис.4. Пример расчетных сеток для эксперимента 5.1.

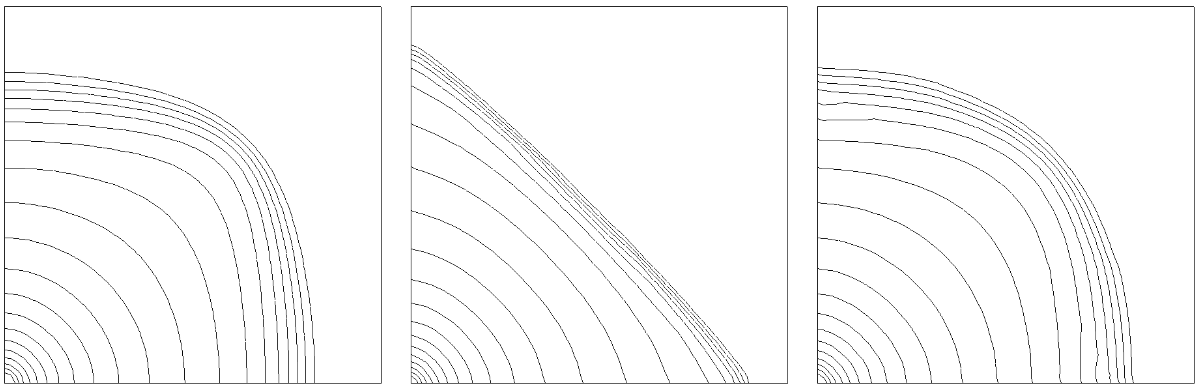
Предлагается следующая модификация расчетной сетки: на равномерной сетке 64×64 фиксируются первая и последняя строки, а также первый и последний столбец с тем, чтобы угловые ячейки оставались без изменений. В центрах двух противоположных угловых ячеек помещаются скважины (рис.4а). Далее вертикальная и горизонтальная центральные линии поворачиваются на 30° в сторону скважин (рис.4б) или от них (рис.4в). После этого сетка заполняется линейно в области между фиксированными боковыми линиями и повернутыми центральными.

На рис.5 показано распределение водонасыщенности на ортогональной сетке (рис.5а) и на Сетке 2 для линейной (рис.5б) и нелинейной (рис.5в) дискретизаций потока. Расчет на ортогональной сетке будем называть контрольным. Легко видеть, что при использовании линейной дискретизации, форма фронта отличается от формы контрольного фронта, в то время как для нелинейной дискретизации отличия незаметны. Аналогично на рис.6 представлено сравнение результатов расчета на ортогональной сетке (рис.6а) и расчетов на Сетке 3 (рис.6б,в). Как и в предыдущем случае, нелинейная дискретизация позволяет получить форму фронта, слабо отличающуюся от контрольной, в то время как для линейной дискретизации поведение фронта не сохраняется.



а) Сетка 1 линейная = нелинейная | б) Сетка 2 линейная | в) Сетка 2 нелинейная

Рис.5. Водонасыщенность на Сетках 1 и 2 линейной и нелинейной аппроксимаций потока в момент T=250 дней.



а) Сетка 1 линейная = нелинейная | б) Сетка 3 линейная | в) Сетка 3 нелинейная

Рис.6. Водонасыщенность на Сетках 1 и 3 линейной и нелинейной аппроксимаций потока в момент T=250 дней.

На рис.7 показана динамика дебита нефти на производящей скважине. В момент, когда фронт воды доходит до производящей скважины, производство нефти заметно падает. Этот момент называется временем водяного прорыва и является важным показателем моделирования разработки месторождения. В табл.2 показаны времена водяного прорыва при использовании ленейной и нелинейной дискретизации на предлагаемых расчетных сетках. Видно, что результаты, получаемые на неортогональных сетках при использовании нелинейной дискретизации потока более приближены к контрольным, по сравнению с результатами использования линейной дискретизации.

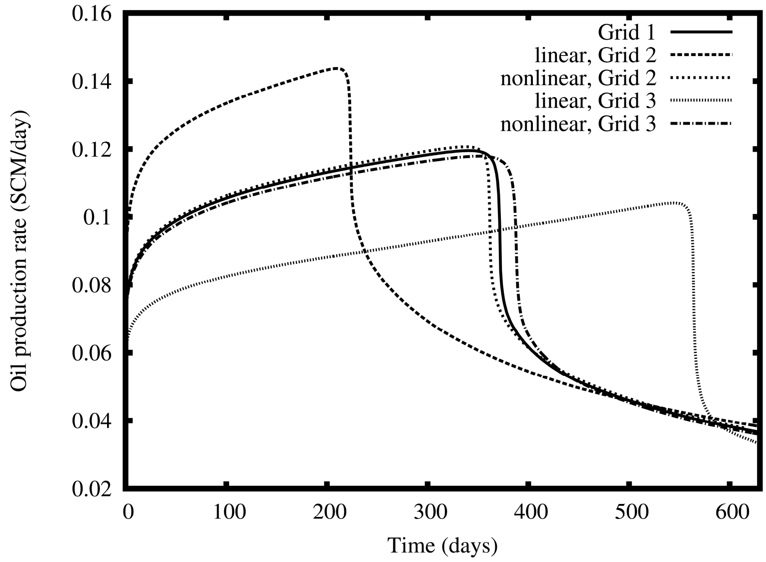


Рис.7. Динамика дебита нефти.

Таблица 2. Время водяного прорыва (в днях).

	Сетка 1	Сетка 2	Сетка 3
линейный поток	372.2	224.1	564.2
нелинейный поток	372.2	362.2	388.5

5.2. Полный анизотропный тензор проницаемости. В следующей серии экспериментов будет рассматриваться равномерная сетка 64×64 из предыдущего примера, но тензор абсолютной проницаемости будет полный и анизотропный:

$$\mathbb{K} = R(-\theta)\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} R(\theta), \qquad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

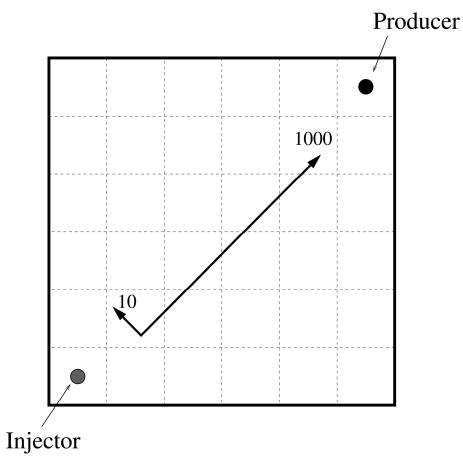
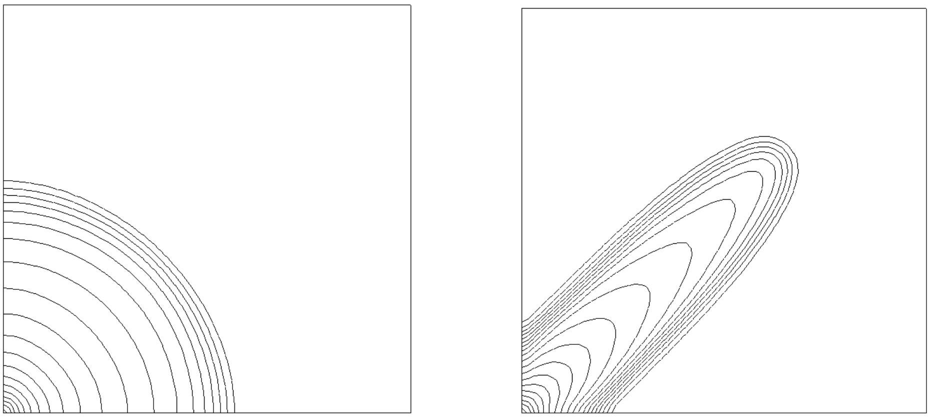


Рис.8. Пример расчетной сетки для эксперимента 5.2.1.

5.2.1. Полный тензор с высокой анизотропией. В следующем эксперименте рассматривается тензор $\mathbb{K}$, у которого $k_1 = 1000\,\text{md} \sim 10^{-12}\text{м}^2$, $k_2 = 10\,\text{md} \sim 10^{-14}\text{м}^2$ и угол $\theta = 45°$ (см. рис.8).

На рис.9 показано распространение водонасыщенности при использовании линейной (рис. 9а) и нелинейной (рис. 9б) дискретизаций потока. Хорошо видно, что при использовании нелинейной дискретизации потока, формируется выраженное направление распространения водяного фронта, которое соответствует направлению с большей абсолютной проницаемостью. В случае линейной дискретизации такое направление отсутствует, и распространение фронта не отражает реальную анизотропию тензора проницаемости.



а) Линейная б) Нелинейная

Рис.9. Водонасыщенность для линейной и нелинейной аппроксимаций потока в момент T=25 дней.

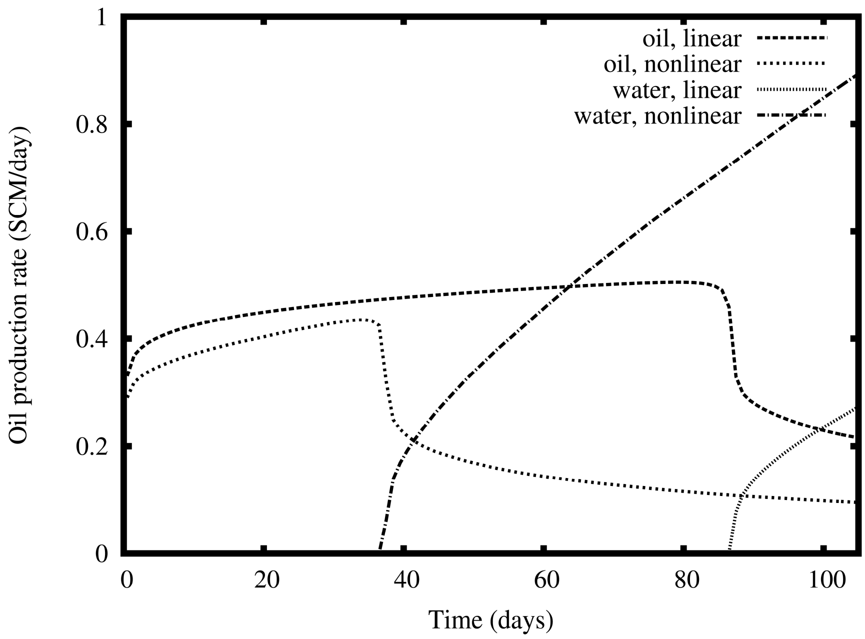


Рис.10. Динамика дебита нефти и воды.

На рис.10 представлена динамика дебитов нефти и воды на производящей скважине для двух дискретизаций. Видно, что момент водяного прорыва при использовании нелинейной дискретизации наступает заметно раньше, чем при использовании линейной.

5.2.2. Разрывный полный тензор с высокой анизотропией. В последнем эксперименте рассматривается разрывный тензор $\mathbb{K}$, у которого $k_1 = 10^{-12}\text{м}^2$, $k_2 = 10^{-14}\text{м}^2$, а расчетная область разделена на 4 слоя, и угол θ меняется в зависимости от области (см. рис.11):

$$\theta(S) = \begin{cases} 0^\circ & \text{если} \quad 0.5 \le x+y < 1, \\ 90^\circ & \text{если} \quad 1 \le x+y < 1.5, \\ 45^\circ & \text{если} \quad x+y < 0.5 \quad \text{или} \quad x+y \ge 1.5. \end{cases}$$

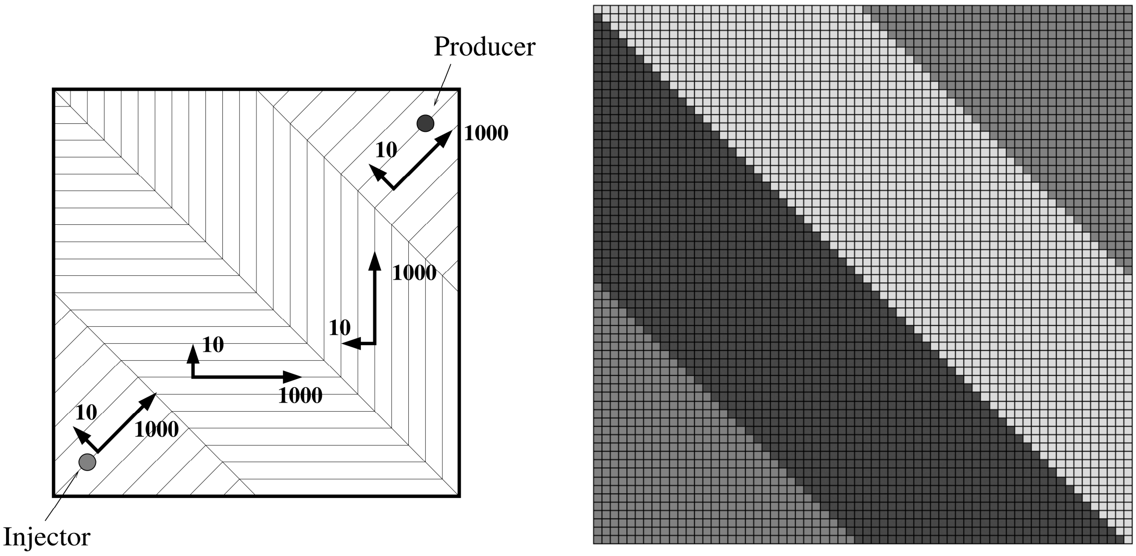
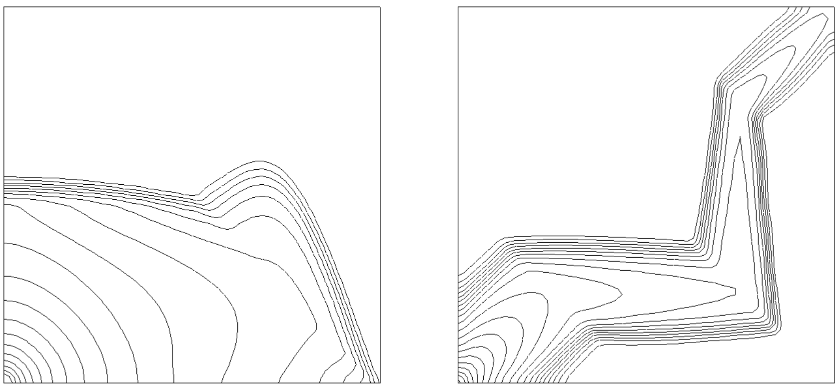


Рис.11. Пример расчетной сетки для эксперимента 5.2.2.



а) Линейная б) Нелинейная

Рис.12. Водонасыщенность для линейной и нелинейной аппроксимаций потока в момент T=55 дней.

Стоит отметить, что при $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 90^\circ$ дискретизации совпадают, а различаются лишь при $\theta = 45^\circ$. На рис.12 показано распределение водонасыщенности при использовании линейной (рис.12а) и нелинейной (рис.12б) дискретизаций. Цель эксперимента – показать, что различие дискретизации лишь в небольшой части расчетной области может существенно повлиять на поведение водяного фронта даже при том, что в остальной части области дискретизации идентичны.

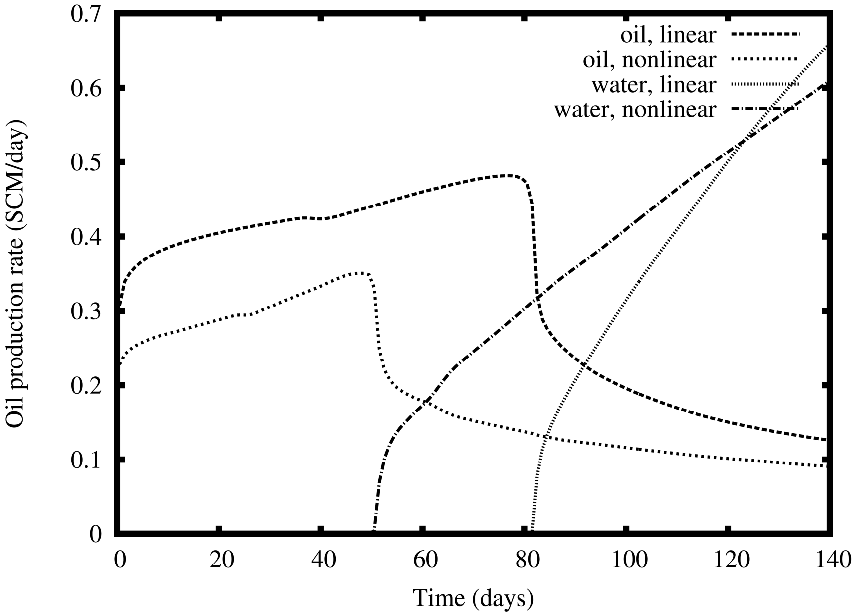


Рис.13. Динамика дебита нефти и воды.

На рис.13 показана динамика дебитов нефти и воды на производящей скважине для двух дискретизаций. Как и в предыдущем примере, линейная дискретизация не имеет четко выраженного направления распространения водяного фронта и поэтому вытесняет больше нефти, чем в случае с нелинейной дискретизацией. В то же время момент водяного прорыва наступает позже, чем при использовании нелинейной дискретизации потока.

6. Заключение

В статье рассмотрено приложение новой нелинейной двухточечной дискретизации диффузионного потока для задач двухфазной фильтрации и проведено сравнение с традиционной линейной двухточечной дискретизацией диффузионного потока. Результаты численных экспериментов показывают, что при решении задач двухфазной фильтрации, использование новой дискретизации способствует корректному воспроизведению фронта и расчету времени водяного прорыва.

Основные характеристики численной модели, созданной на основании новой дискретизации, практически не зависят от неортогональности расчетной сетки или от анизотропии тензора абсолютной проницаемости.

Автор признателен корпорации ExxonMobil за поддержку исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. *Aziz K., Settari A.* Petroleum Reservoir Simulation. London: Applied Sci. Publ. Ltd, 1979, 497 p.
2. *Peaceman D.W.* Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation. New York: Elsevier, 1977, 176 p.
3. *Chen Z., Huan G., Ma Y.* Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media. SIAM. 2006, 549 p.

4. *Каневская. Р.Д.* Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. – Москва, Ижевск: 2003, 128 с.
5. *Сухинов А.А.* Математическое моделирование процессов переноса примесей в жидкостях и пористых средах. Кандидатская диссертация, 2009.
6. *Eymard R., Gallouët T., Herbin R.* Finite Volume Methods: Handbook of Numerical Analysis. 2000, 713-1020.
7. *Le Potier C.* Schema volumes finis monotone pour des operateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages de triangle non structures. C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2005, v.341, p.787-792.
8. *Lipnikov K., Svyatskiy D., Shashkov M., Vassilevski Yu.* Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes // J.Comp.Phys. 2007, v.227, p. 492-512.
9. *Lipnikov K., Svyatskiy D., Vassilevski Yu.* Interpolation-free monotone finite volume method for diffusion equations on polygonal meshes // J.Comp.Phys, 2009, v.228, p.703-716.
10. *Danilov A., Vassilevski Yu.* A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations on conformal polyhedral meshes // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2009, v.24(3), p.207-227.
11. *Aavatsmark I., Eigestad G.T., Mallison B.T., Nordbotten J.M.* A compact multipoint flux approximation method with improved robustness // Numer. Methods for Partial Diff. Equations, 2008, v.24, p.1329-1360.
12. *Peaceman D.W.* Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation, SPEJ, June 1978, 183-194.
13. *Kaporin I.E.* High quality preconditioning of a general symmetric positive matrix based on its $U^TU+U^TR+R^TU$-decomposition // Num. Linear Algebra with Applications, 1998, v.5, p.484-509.

Поступила в редакцию 04.02.10