

Российская академия наук

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ РАН (ИВМ РАН)

УДК 519.6

№ госрегистрации

Инв.№

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИВМ РАН
чл.-корр.

_____ Е.Е.Тыртышников
«__» _____ 2011 г.

Государственный контракт от «01» декабря 2010 г. № 14.740.11.0844
Шифр «2010-1.1-400-150-053»

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

В рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры
инновационной России» на 2009-2013 годы

по теме:
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ДИАГНОСТИКИ
И МОНИТОРИНГА СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТЫХ И РЕСПИРАТОРНЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ
(промежуточный, этап № 3)

Наименование этапа: «Реализация численной модели туловища мужчины»

Руководитель НИР, зам. директора ИВМ РАН,

д. ф.-м. н., доцент

Ю. В. Василевский

подпись, дата

Москва 2011

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы, д.ф.-м.н., зам. директора ИВМ РАН	<hr/> подпись, дата	Ю.В. Василевский (введение, заключение)
Исполнители темы д.ф.-м.н., профессор МГУ им. М.В. Ломоносова	<hr/> подпись, дата	М.А. Ольшанский (раздел 1)
чл.-корр. РАН, директор ИВМ РАН	<hr/> подпись, дата	Е.Е. Тыртышников (раздел 1)
к.ф.-м.н., с.н.с. ИВМ РАН	<hr/> подпись, дата	В.Н. Чугунов (раздел 1)
к.ф.-м.н., с.н.с. ИВМ РАН	<hr/> подпись, дата	С.Г. Руднев (раздел 1)
к.ф.-м.н., н.с. ИВМ РАН	<hr/> подпись, дата	И.В. Капырин (раздел 1)
к.ф.-м.н., доцент МФТИ	<hr/> подпись, дата	С.С. Симаков (раздел 1)
к.ф.-м.н., м.н.с. ИБРАЭ РАН	<hr/> подпись, дата	В.Ю. Саламатова (разделы 1,2,3)
к.ф.-м.н., н.с. ИВМ РАН	<hr/> подпись, дата	А.А. Данилов (разделы 2,3)
к.ф.-м.н., н.с. ИВМ РАН	<hr/> подпись, дата	К.Д. Никитин (разделы 2,3)
аспирант ИВМ РАН	<hr/> подпись, дата	А.Ю. Чернышенко (раздел 2)

аспирант ИВМ РАН	_____	К.М. Терехов (раздел 2)
	подпись, дата	
аспирант ИВМ РАН	_____	Ю.А. Иванов (раздел 3)
	подпись, дата	
аспирантка МГУ им. М.В. Ломоносова	_____	Т.К. Добросердова (раздел 3)
	подпись, дата	
студентка МГУ им. М.В. Ломоносова	_____	А.С. Юрова (раздел 1)
	подпись, дата	
студент МГУ им. М.В. Ломоносова	_____	А.М. Головки (раздел 2)
	подпись, дата	
студент МГУ им. М.В. Ломоносова	_____	Г.Н. Лутидзе (раздел 2)
	подпись, дата	
студент МФТИ	_____	В.К. Крамаренко (раздел 2)
	подпись, дата	
студентка МФТИ	_____	Е.Ю. Саламатова (раздел 2)
	подпись, дата	
Нормоконтролер вед. специалист ИВМ РАН	_____	А.А. Загуменных
	подпись, дата	

Реферат

Отчет 35 с., 1 ч., 22 рис., 5 табл., 13 источн., 1 прил.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ФУНКЦИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ, ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ.

Исследование посвящено численной реализации конечно-элементной модели туловища мужчины как проводящей гетерогенной структуры для задач электроимпедансной диагностики.

Целью данной работы являются моделирование и численный анализ двух электронных схем биоимпедансных измерений. Была проведена верификация основных расчетных программ и были получены распределение полей потенциалов и функций чувствительности для различных схем измерений и частот.

Обсуждены основные программные пакеты для разработки интерфейса при моделировании биоимпедансных измерений.

Полученные результаты найдут применение для повышения точности методов электроимпедансной диагностики.

Оглавление

Введение.....	6
1. Создание и верификация комплекса программ для расчета полей потенциалов, плотностей тока и функций чувствительности.....	7
1.1. Математическая постановка задачи.....	7
1.2. Описание расчётной области.....	9
1.3. Построение расчетной сетки.....	11
1.4. Схемы дискретизации дифференциальных уравнений, построение конечно-элементной модели.....	15
1.5. Верификация численной модели.....	17
1.5.1. Проверка на аналитическом решении.....	17
1.5.2. Задача с неоднородными свойствами материалов.....	18
1.5.3. Проверка сходимости на упрощённой модели туловища.....	19
2. Численные эксперименты для реалистичной модели туловища мужчины по расчету полей потенциалов, плотностей тока и функций чувствительности.....	22
2.1. Первая схема измерений.....	22
2.2. Вторая схема измерений.....	25
3. Разработка основных элементов интерфейса пользователя для программ моделирования и визуализации электроимпедансных измерений тела человека.....	27
3.1. ITK-SNAP.....	27
3.2. Paraview.....	28
Заключение.....	30
Приложение А.....	32
Список использованных источников.....	34

Введение

Биоимпедансный анализ основан на измерениях электрической проводимости тела человека и используется для оценки компонентного состава тела, включая такие характеристики, как жировая, тощая, клеточная и скелетно-мышечная масса, объём и распределение воды в организме. Расчёты полей плотности тока и потенциала, обосновывающие эффективность применения метода, как правило, основаны на предположении об однородной и изотропной проводимости тканей, а также о цилиндрической геометрии сегментов тела [1, 2].

Возможность повышения точности биоимпедансной диагностики связана с оптимизацией выбора расположения электродов относительно измеряемой области, а также частотного диапазона измерений и конструкции электродов. Одним из подходов к решению указанной задачи является построение и исследование математических моделей биоимпедансных измерений с реалистичным описанием геометрии тела и учётом неоднородной и анизотропной проводимости его внутренних органов и тканей. Достоверность получаемой информации может быть оценена путём сравнительного анализа значений поля чувствительности биоимпедансных измерений в областях, служащих источником сигнала [3].

Настоящая научно-исследовательская работа (в рамках ГК №14.740.11.084) посвящена математическому моделированию биоимпедансных измерений. На первых двух этапах был предложен и обсужден алгоритм решения данных задач, а также на основе сегментированных медицинских изображений была построена конечно-элементная модель туловища мужчины. Стоит отметить, что создание конечно-элементных моделей на основе автоматически построенных неструктурированных тетраэдральных сетках не зависит от конфигурации рассматриваемой геометрической области. Таким образом, предложенные методы решения задач могут быть использованы для реалистичной трёхмерной модели тела человека, включающей описание основных органов и тканей, что является одним из ключевых шагов в разработке конечно-элементной модели тела человека как проводящей гетерогенной структуры.

Данная работа представляет собой проведение численного решения и анализа задач биоимпедансных измерений на основе ранее полученной конечно-элементной модели туловища мужчины (этап 2 ГК №14.740.11.084). Были исследованы две схемы наложения

электродов, полученные результаты для интегральной характеристики измерений согласуются с ранее известными данными.

Отчет состоит из трех разделов. Первый раздел посвящен описанию основных программ, позволяющих находить распределение потенциала, плотности тока и функции чувствительности, и вопросам их верификации.

Во втором разделе представлены некоторые схемы биоимпедансных измерений для туловища мужчины и приведены численные результаты, полученные с помощью предложенных подходов.

В третьем разделе рассматриваются и обсуждаются используемые программные средства для обработки и визуализации полученных решений.

1. Создание и верификация комплекса программ для расчета полей потенциалов, плотностей тока и функций чувствительности

На этапе 1 ГК №14.740.11.084 была разработана и обоснована общая структура алгоритма моделирования и решения задач биоимпедансных измерений. Обозначим основные пункты выбранного подхода к решению данных задач математического моделирования биоимпедансного анализа.

1.1. Математическая постановка задачи

В математическом смысле исследование задач биоимпедансного анализа сводится к решению уравнения в частных производных первого рода с соответствующими граничными условиями. В предположении, что внешние электромагнитные поля незначительны, из уравнения сохранения электрического заряда и закона Ома в дифференциальной форме можем записать уравнение для поля электрического потенциала. Отметим, что это уравнение в обобщённом смысле может быть использовано для кусочно-однородных диэлектрических сред.

$$\operatorname{div}(C\nabla U) = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (1)$$

с граничными условиями

$$(\mathbf{J}, \mathbf{n}) = I_{\pm} / S_0 \quad \text{на } \Gamma_{\pm} \quad (2)$$

$$(\mathbf{J}, \mathbf{n}) = 0 \quad \text{на } \partial\Gamma \setminus \Gamma_{\pm} \quad (3)$$

$$U(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{C} \nabla U \quad (5)$$

где Ω – исследуемая область, $\partial\Omega$ – граничная поверхность данной области, Γ_{\pm} – область контакта провода токовых электродов, \mathbf{n} – внешняя нормаль к граничной поверхности тела, U – потенциал, \mathbf{C} – тензор электрической проводимости, \mathbf{J} – плотность тока, I_{\pm} – величина зондирующего тока, S_0 – площадь контакта электрода. Уравнение (1) описывает распределение электрического тока в среде с неоднородными коэффициентами проводимости \mathbf{C} . Уравнение (2) задаёт фиксированную плотность тока на контактных поверхностях электродов. Однородные условия Неймана (3) на границе заданы в предположении, что электрический ток не распространяется во внешней среде. Единственность решения задачи гарантируется уравнением (4), в этом уравнении (x_0, y_0, z_0) – некоторая точка области Ω .

В случае переменного электрического тока синусоидальной формы удобно вместо сопротивления использовать величину электрического импеданса, характеризующего одновременно и проводящие и емкостные свойства биологических тканей. Отметим, что закон Ома и уравнение (1) остаются верными при замене обычной электрической проводимости на полную комплексную проводимость [1]. Предполагается, что электрическая проводимость является кусочно-постоянной величиной и меняется при переходе от одного органа к другому. В частности, для изотропного материала матрица тензора электрической проводимости имеет диагональный вид $\mathbf{C} = \text{diag}(\sigma, \sigma, \sigma), \sigma = \sigma' + i \cdot \sigma''$. Некоторые ткани (например, мышцы и нервные волокна) обладают анизотропной проводимостью. Таким образом, в общем случае тензор проводимости \mathbf{C} является комплексным, кусочно-постоянным, полным, возможно анизотропным и симметричным. Потенциал U и плотность тока \mathbf{J} также являются комплексными величинами.

Уравнение (1) с комплексными коэффициентами можно представить в виде системы двух дифференциальных уравнений в частных производных с вещественными

коэффициентами. Для этого проводимость и потенциал запишем в виде $C = C_R + iC_I$, $U = U_R + iU_I$. После эквивалентных преобразований уравнение (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(C_R \nabla U_R) - \operatorname{div}(C_I \nabla U_I) &= 0 \quad \text{в } \Omega \\ \operatorname{div}(C_R \nabla U_I) + \operatorname{div}(C_I \nabla U_R) &= 0 \quad \text{в } \Omega \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом решение граничной задачи (1)-(5) сводится к исследованию системы уравнений в частных производных (6) относительно действительной и мнимой частей электростатического потенциала.

1.2. Описание расчётной области

В данной работе, под исследуемой областью Ω понимается туловище мужчины, построенного в результате сегментации медицинских изображений Visible Human Project [4]. Подробное описание процесса выделения внутренних органов и тканей приведено в отчете за 2-ой этап ГК № 14.740.11.0844.

Модель туловища мужчины (см. Рисунок 1), полученная в результате сегментации и используемая для симуляции биоимпедансных измерений, состоит из следующих тканей и систем: висцеральный жир, мышцы, система кровеносных сосудов, желудочно-кишечный тракт, сердце, легкие, почки, селезенка, костная система (см. Рисунки 2–5).



Рисунок 1 – Модель туловища мужчины, полученная на основе проекта Visible Human.



Рисунок 2 – Внутренние органы сегментированной модели туловища.

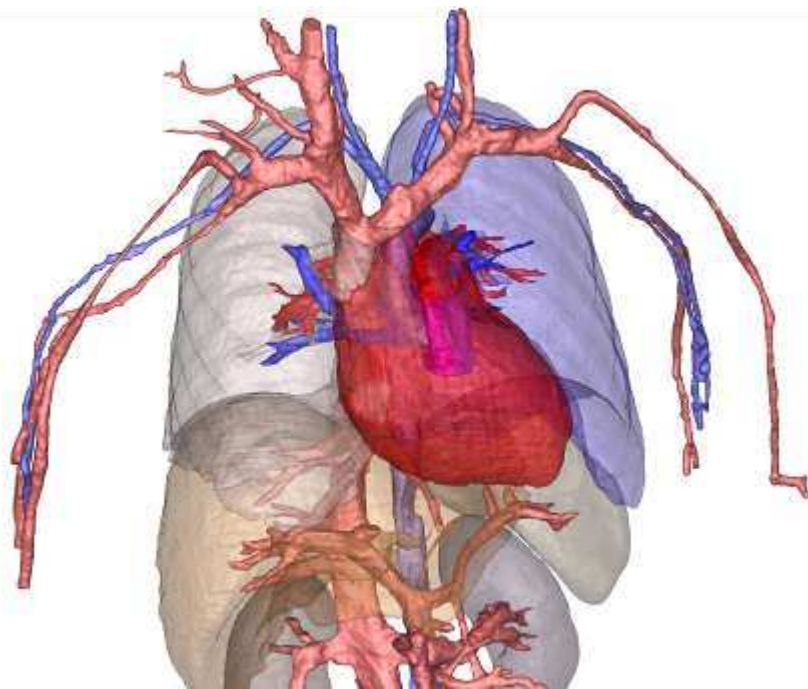


Рисунок 3 – Кровеносная система, сердце, лёгкие, печень, селезёнка, почки.

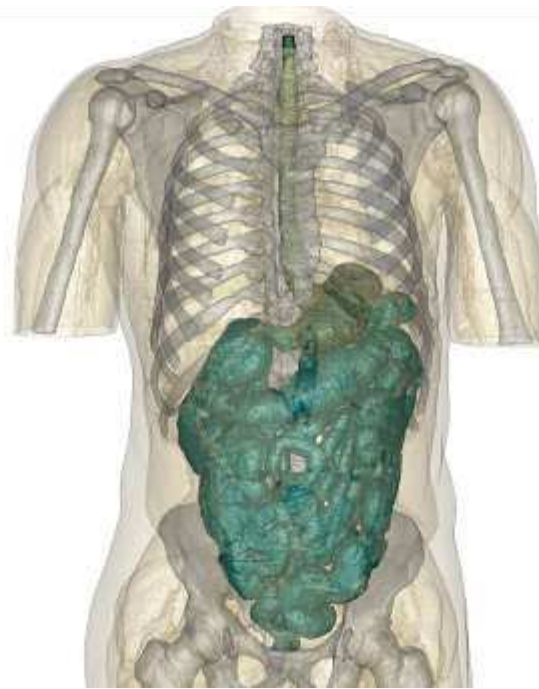


Рисунок 4 – Желудочно-кишечный тракт.



Рисунок 5 – Костная система.

Стоит особо отметить, что в данной модели пока нет кожи; кожа добавляется в процессе построения расчетных сеток, который описан ниже. В Таблице 1 приложения А приведены сравнительные значения объемов, занимаемых некоторыми внутренними органами, по отношению ко всему объему туловища мужчины.

1.3. *Построение расчетной сетки*

В предыдущих отчётах нами были описаны методы и алгоритмы построения неструктурированных тетраэдральных сеток на основе алгоритма продвигаемого фронта.

Этот метод наиболее удобен при построении сеток для областей с гладкими криволинейными границами, таких как упрощённая геометрическая модель туловища, использованная в предыдущем отчёте.

Для построения расчётных сеток в рамках этапа 2 ГК №14.740.11.084 было разработано программное обеспечение на основе библиотеки алгоритмов CGAL (www.cgal.org). Пакет CGAL включает алгоритмы построения неструктурированных тетраэдральных сеток при помощи метода измельчения триангуляции Делоне, предложенного в работах [5, 6]. Предлагаемая технология, основанная на работах [7, 8], использует понятие триангуляции Делоне с ограничениями для аппроксимации криволинейных рёбер и граней области и позволяет точно представлять внешнюю поверхность и внутренние поверхности сложных областей.

Входными данными разработанного генератора сеток является трёхмерный массив меток – сегментированное изображенное, полученное в программе ITK-SNAP. Предполагается, что в сегментированном изображении отсутствует поверхностный слой кожи, а места контакта электродов отмечены отдельными маркерами, плотно прилегающими к телу. Форма маркеров, соответствующих электродам не важна. На первом этапе строится тетраэдральная сетка для тела без кожи и для маркеров прилегающих электродов. На втором этапе тетраэдры маркеров удаляются из сетки, а боковые грани оставшиеся рядом с ними помечаются отдельными номерами. На третьем этапе вдоль поверхности построенной сетки создаётся слой треугольных призм толщиной в 1мм для кожи и дополнительные слои для электродов в тех местах, которые были помечены маркерами. На завершающем этапе каждая треугольная призма разбивается на три тетраэдра с сохранением конформности сетки.

Остановимся подробнее на алгоритме разбиения призм на тетраэдры. Для получения конформной конечной сетки необходимо, чтобы разбиения соседних призм были согласованы. Каждая прямоугольная грань призмы может быть разбита на два треугольника одним из двух способов. Если мы зафиксируем некоторое разбиение на треугольники на каждой грани, и сможем после этого разбить каждую призму на три тетраэдра с учётом фиксированного разбиения её граней, то полученная сетка будет конформной. Однако не любая конфигурация разбиения граней призмы позволяет разбить её на тетраэдры. На Рисунке 6 изображена призма Шонхардта, для которой разбиение на тетраэдры невозможно. Легко показать, что изменение разбиения любой из граней призмы Шонхардта приводит к существованию разбиения призмы на тетраэдры.

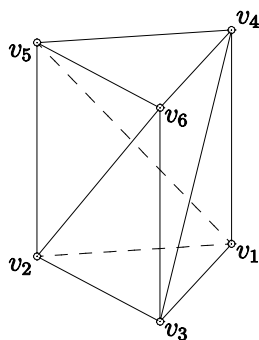


Рисунок 6 – Призма Шонхардта.

Предложим алгоритм разбиения граней призм, исключающий появление призм Шонхардта. Для этого рассмотрим поверхностную треугольную сетку как граф, и на каждом ребре этой сетки введём направление, отвечающее за одно из двух разбиений соответствующей грани, см. Рисунок 7.

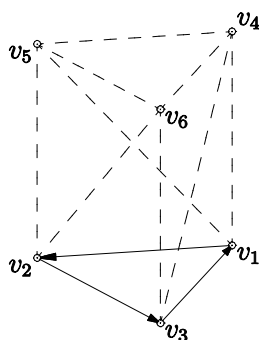


Рисунок 7 – Ориентация рёбер графа.

Призма Шонхардта соответствует циклу длины 3 в полученном направленном графе. Пронумеруем вершины графа, и введём естественный порядок на рёбрах: ребро АВ имеет направление от меньшего номера к большему. Очевидно, что получившийся направленный граф вообще не содержит циклов, а значит и не содержит призм Шонхардта. Построенный алгоритм позволяет получить конформное разбиение призм на тетраэдры.

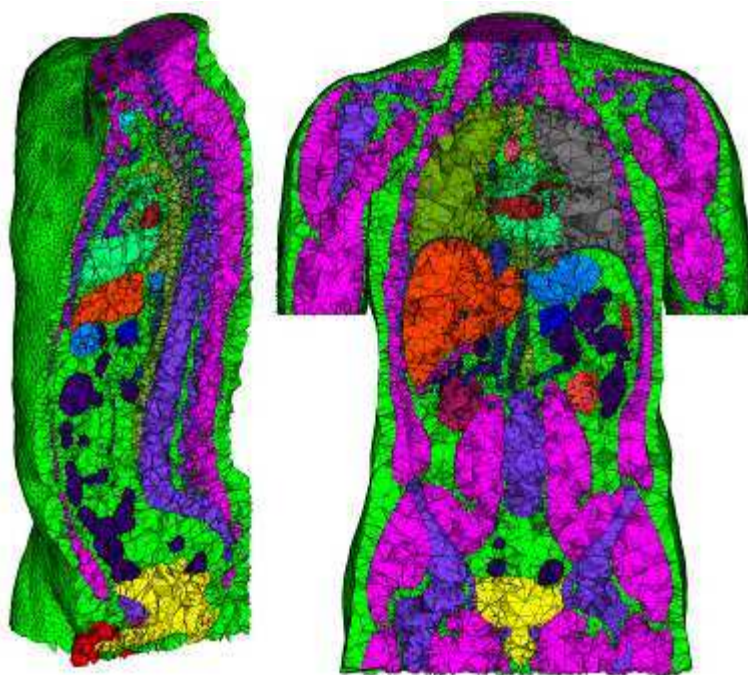


Рисунок 8 – Сечение объёмной сетки для туловища мужчины: 413508 вершин, 2315329 тетраэдров, 84430 боковых граней.

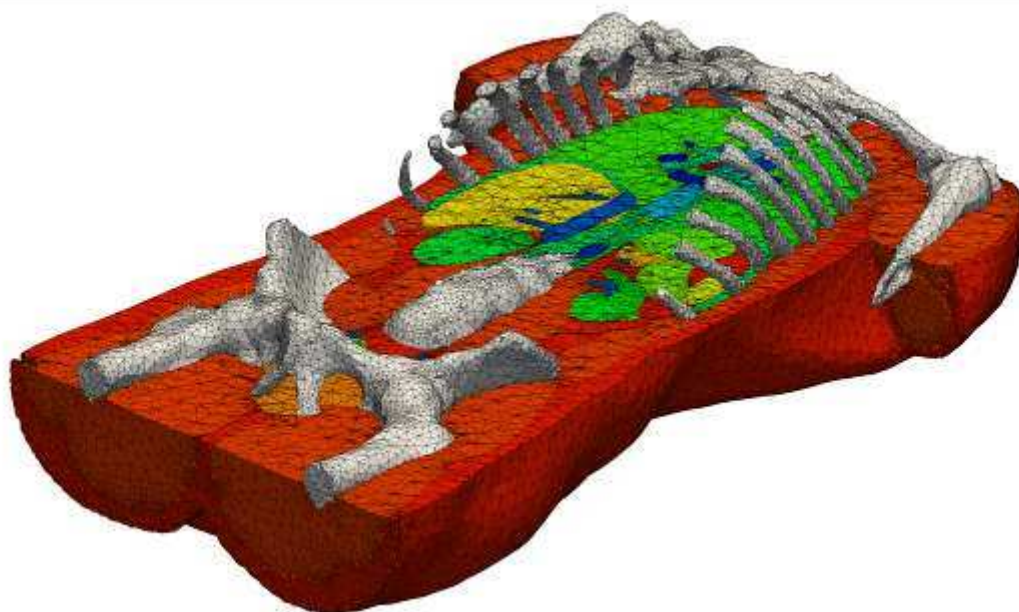


Рисунок 9 – Сечение объёмной сетки для туловища мужчины: 141350 вершин, 751155 тетраэдров, 47704 боковых граней.

На Рисунках 8 и 9 изображены построенные сетки для туловища мужчины.

1.4. Схемы дискретизации дифференциальных уравнений, построение конечно-элементной модели

Как и для ранее рассмотренной (этап 1 ГК №14.740.11.084) модели упрощенного туловища, будем использовать численный метод пространственной аппроксимации диффузионного оператора уравнения (1) с помощью метода конечных элементов (МКЭ) в пространстве непрерывных кусочно-линейных функций (P1-МКЭ). Метод конечных элементов наиболее удобен для дискретизации уравнений с полными анизотропными коэффициентами на неструктурированных симплицальных сетках. По этой причине нами выбрана связка неструктурированные тетраэдральные сетки и метод конечных элементов для дискретизации уравнений (1)-(5) и (6).

С помощью P1-МКЭ составляются матричные аппроксимации отдельно для операторов вида $\text{div}(C \cdot \nabla U)$. Таким образом, матричная форма системы линейных уравнений для системы дифференциальных уравнений (6) может быть получена сборкой четырех блоков, полученных из дискретизации уравнений диффузии с вещественными коэффициентами, аналогичных уравнению (1).

Таким образом, для численного решения системы уравнений (6) с граничными условиями (2)–(5) будем использовать метод конечных элементов с кусочно-линейными базисными функциями. Перепишем уравнения (2),(3),(5),(6) в слабой постановке: найти U_R, U_I из соболевского пространства $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющие тождествам

$$\int_{\Omega} C_R \nabla U_R \nabla V d\Omega - \int_{\Omega} C_I \nabla U_I \nabla V d\Omega - \int_{\Gamma_{\pm}} V \text{Re} I_{\pm} / S_0 d\Gamma = 0,$$

$$\int_{\Omega} C_R \nabla U_I \nabla V d\Omega + \int_{\Omega} C_I \nabla U_R \nabla V d\Omega - \int_{\Gamma_{\pm}} V \text{Im} I_{\pm} / S_0 d\Gamma = 0$$

для любых V из $W_2^1(\Omega)$. Рассмотрим конечно-элементное подпространство $W_{2,h}^1(\Omega)$ пространства $W_2^1(\Omega)$, состоящее из непрерывных, линейных в каждом тетраэдре сетки функций, равных нулю в некотором узле сетки (x_0, y_0, z_0) . Замена в слабой постановке пространства $W_2^1(\Omega)$ на подпространство $W_{2,h}^1(\Omega)$ порождает систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} A_R U_R - A_I U_I &= F_R \\ A_I U_R + A_R U_I &= F_I \end{aligned} \quad (7)$$

которая решается некоторым итерационным методом, описанным в следующем разделе. Дискретизация уравнений (6) осуществлена с помощью библиотеки aniFEM пакета Ani3D [9, 10].

Пакет программ Ani3D содержит в своем составе библиотеку для конечно-элементной аппроксимации основных дифференциальных операторов. С помощью этой библиотеки мы сможем вычислить дополнительную информацию, необходимую для обработки и анализа полученных данных, например градиент от скалярного поля и функцию чувствительности (7).

Стоит отметить особую роль функции чувствительности S для моделирования биоимпедансных измерений, которая характеризует вклад в измеренное значение импеданса различных подобластей рассматриваемой области [2, 3]:

$$S = (\mathbf{J}_{cc}, \mathbf{J}_{rec}), \quad \Delta U = \int_V S(x, y, z) \Delta \rho(x, y, z) dv, \quad (8)$$

где $\mathbf{J}_{cc} = \mathbf{J} / I$ – относительная плотность тока при данных токовых электродах, I – величина зондирующего тока; $\mathbf{J}_{rec} = \mathbf{J}_2 / I$, где \mathbf{J}_2 – плотность тока, полученная при инверсии токовых и измерительных цепей, ΔU – изменение выходного напряжения; $\Delta \rho$ – изменение удельного сопротивления.

При вычислениях проведенных ранее на упрощенной геометрической модели туловища было изучено влияние выбора переобуславливателя и метода решения системы линейных уравнений на количество итераций и на общее время решения. Наилучшие результаты достигаются при комбинации обобщенного метода минимальных невязок с неполным LU-разложением второго порядка, и данная комбинация будет использована при решении систем линейных уравнений при моделировании биоимпедансных измерений на реалистичной модели туловища мужчины в настоящей работе.

1.5. Верификация численной модели

1.5.1. Проверка на аналитическом решении

Рассмотрим поведение разработанной модели на тестовой задаче с известным аналитическим решением.

Пусть Ω – цилиндрическая область длиной 30см и радиусом 5см, ось цилиндра направлена вдоль оси Ox , центр цилиндра находится в точке с координатами $(0, 0, 0)$. Пусть тензор удельной проводимости является изотропным и постоянным во всей области Ω : $C = 0.13665$ См/м. Граничные условия: однородное условие Неймана на боковой поверхности цилиндра, и заданная нормальная составляющая плотности тока на основаниях цилиндра. Плотность тока вычисляется по формуле (2), величина зондирующего тока $I = 1$ мА.

Для этой задачи известно аналитическое решение. Оно записывается следующей формулой: $U = k x$, где $k = I/(S C)$, а S – площадь сечения цилиндра.

Проведём серию численных расчётов на сетках с разным шагом дискретизации и сравним получившиеся решения с аналитическим. При построении тетраэдральной сетки с шагом h величина площади сечения дискретной модели будет незначительно отличаться от площади круглого сечения. Будем учитывать это отличие при вычислении аналитического решения, а именно площадь сечения будем вычислять по формуле:

$$S = \frac{R + \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}}{2}$$

Для оценки величины полученной ошибки сеточного решения U^h будем использовать относительную L_2 -норму, которая вычисляется по следующей формуле:

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} (U^h - U)^2 dx}{\int_{\Omega} U^2 dx}}$$

Результаты расчётов на серии сеток представлены в таблице 1. Из таблицы видно, что с уменьшением шага сетки h величина L_2 -нормы ошибки быстро падает. Тем самым наша численная модель демонстрирует высокую скорость сходимости к аналитическому решению.

Таблица 1. Результаты сходимости для аналитического решения.

h	ε_2
2	2.8292961e-3
1	1.8566284e-4
0.5	6.7249744e-5
0.25	4.1902627e-6

1.5.2. Задача с неоднородными свойствами материалов.

Теперь рассмотрим более сложную область Ω с неоднородными свойствами – цилиндрическая область с внешним цилиндрическим слоем, двумя однослойными электродами на торцах и двумя кольцевыми электродами вблизи концов цилиндра, см. Рисунок 10.



Рисунок 10 – Область Ω и расположение контактных поверхностей электродов.

Удельная проводимость внутреннего слоя – 0.13665 См/м, внешнего – 0.23484 См/м, электродов – 0.9 См/м. Пронумеруем контактные поверхности электродов – $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, см. Рисунок 10.

Теперь для каждой пары чисел (k, m) , $k \neq m$, $1 \leq k, m \leq 4$, рассмотрим для k и m задачу (1)–(5) с граничными условиями на $\Gamma_+ = \Gamma_k$ и $\Gamma_- = \Gamma_m$. Получившееся решение U обозначим через U_{km} . Отметим, что в силу линейности задачи (1)–(5) $U_{km} = -U_{mk}$, и $U_{km} + U_{mn} = U_{kn}$ для различных k, m, n .

В частности $U_{14} + U_{43} + U_{32} + U_{21} = 0$. Проверим это равенство для дискретных решений, полученных с помощью нашей численной модели. Для этого решим 4 задачи с разными граничными условиями, просуммируем получившиеся решения и вычислим L_2 -норму суммы решений. Величина полученной L_2 -нормы – 3.0068838e-10. Таким образом, дискретное

решение сохраняет линейность решения задачи, что может быть использовано нами в дальнейшем.

1.5.3. Проверка сходимости на упрощённой модели туловища

Перед началом расчётов на реалистичной модели туловища мужчины проведём экспериментальную проверку сходимости решения на упрощённой модели, построенной нами на предыдущем этапе, см. Рисунок 11. Проведём серию расчётов на сетках с разным шагом по пространству. При проверке сходимости решения будем предполагать, что решение, получившееся на самой мелкой сетке, является точным. Вычислим ошибки в L_2 -норме для решений, полученных на грубых сетках, и по скорости падения ошибок при измельчении шага сетки оценим скорость сходимости решения. Для вычисления L_2 -нормы разности двух конечно-элементных решений на разных сетках проведём переинтерполяцию дискретного решения на грубой сетке в вершины мелкой сетки, а затем вычислим L_2 -норму разности полученных конечно-элементных решений. Отметим, что если вершины грубой сетки не являются подмножеством вершин мелкой сетки, то интерполяция решения с грубой сетки на мелкую вносит дополнительную погрешность.

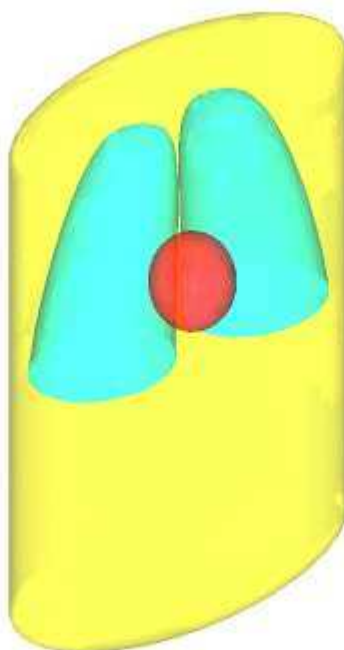


Рисунок 11 – Упрощённая геометрическая модель туловища.

Мы проведём две серии экспериментов. В первой серии будем использовать неструктурированные сетки с плавно меняющимся шагом сетки, при этом сетки не являются согласованными, то есть вершины одной сетки не являются подмножеством вершин другой

сетки. Во второй серии будем использовать последовательность иерархически сгущающихся сеток, для которых вершины грубой сетки являются подмножеством вершин мелкой.

При построении расчётных сеток для упрощённой модели туловища мужчины использовалось программное обеспечение, разработанное на предыдущих этапах. Тетраэдральная сетка строится с помощью алгоритма продвигаемого фронта, используется автоматическое сгущение сетки вблизи электродов. Максимальный шаг сетки – h задаётся пользователем.

Мы провели серию численных расчётов задачи (1)–(5) на сетках с максимальным шагом h от 5мм до 50мм. В качестве точного решения взято решение, получившееся на самой мелкой сетке, с максимальным шагом 5мм. Для остальных решений были вычислены L_2 -нормы. Результаты расчётов приведены на Рисунке 12. Из рисунка видно, что полученные результаты лежат на прямой, имеющей тот же наклон, что и прямая $L_2 \sim h$, тем самым метод демонстрирует первый порядок сходимости на несогласованных сетках.

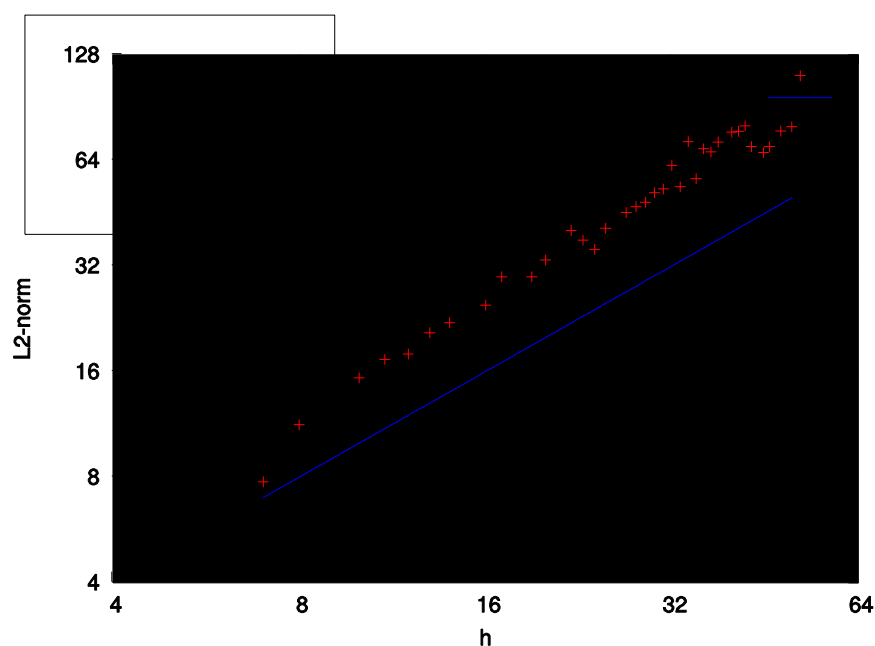


Рисунок 12 – Оценка сходимости решения на последовательности несогласованных сеток.

Рассмотрим теперь набор иерархически измельчающихся сеток. Начальная сетка для упрощённой геометрической модели состоит из 9 359 тетраэдров. В этой сетке каждый тетраэдр разбивается на 8 тетраэдров за счёт разбиения каждого ребра на два и каждой грани на четыре треугольника. Такой процесс мы будем называть равномерным иерархическим разбиением. Отметим, что получившаяся сетка будет конформной. К полученной сетке

можно опять применить равномерное иерархическое разбиение. Каждый раз характерный размер ячеек сетки уменьшается в два раза, а количество ячеек увеличивается в 8 раз. Множество вершин начальной сетки является подмножеством вершин измельчённой сетки, а значит при вычислении L_2 -нормы ошибки мы не будем вносить погрешностей из-за переинтерполяции дискретных решений.

При проведении экспериментов на персональном компьютере ограниченный объём оперативной памяти не позволяет работать с очень большими сетками. В нашем эксперименте набор иерархических сеток состоял из пяти сеток, самая мелкая из которых содержала более 38 миллионов ячеек. Для проведения расчётов были задействованы вычислительные мощности кластера ИВМ РАН. В качестве точного решения было использовано решение на самой мелкой сетке.

В таблице 2 приведены полученные результаты. В первых трёх столбцах таблицы собрана информация о сетке: N_V – количество вершин, N_F – количество боковых граней, N_T – количество тетраэдров. В следующих столбцах записана информация о необходимом для вычислений объёме оперативной памяти компьютера, количестве итераций при решении системы линейных уравнений обобщённым методом минимальных невязок с переобуславливателем второго порядка на основе неполного LU-разложения, и общее время решения системы линейных уравнений. В последних двух столбцах приведена относительная L_2 -норма ошибки и порядок сходимости.

Таблица 2. Результаты расчётов на иерархически сгущающихся сетках.

N_V	N_F	N_T	Память, КБ	N_{it}	Время, с	L_2 -норма ошибки	Порядок сходимости
2032	1598	9359	7160	13	0,02	1,23721E-03	–
14221	6392	74872	37312	23	0,18	9,30753E-04	0,439
106509	25568	598976	299080	58	3,70	5,06660E-04	0,906
824777	102272	4791808	2437528	127	68,55	1,53452E-04	1,750
6492497	409088	38334464	20015272	353	2634.15	–	–

Для упрощённой модели туловища на серии иерархически сгущающихся сеток мы наблюдаем порядок сходимости выше первого. После экспериментальной проверки метода на упрощённой модели перейдём к реалистичной модели туловища мужчины.

2. Численные эксперименты для реалистичной модели туловища мужчины по расчету полей потенциалов, плотностей тока и функций чувствительности

Биоимпедансный анализ – это неинвазивная методика измерений, осуществляемая с помощью биоимпедансного анализатора и электродов различных типов. Использование неспециализированных, заимствованных из других методов функциональной диагностики и физиотерапии, электродов требует тщательного теоретического и экспериментального обоснования, так как применение электродов, адаптированных к конкретной методике биоимпедансного анализа, является существенным требованием, определяющим точность измерений. В монографии [1] можно подробнее ознакомиться с характеристиками различных электродов, применяемых для биоимпедансного анализа.

Из соображений комфортности процедуры обследования и экономии расходных материалов в медицинской практике чаще применяются электроды, которые имеют форму незамкнутых фрагментов кольцевых электродов. Погрешность, вносимая данными электродами, как правило невелика и компенсируется в процессе расчета физиологических параметров.

Ниже описаны две схемы расположения кольцевых и круглых электродов на туловище мужчины при моделировании биоимпедансных измерений. Ширина кольцевых электродов – 8 мм, диаметр круглых – 10 мм.

2.1. *Первая схема измерений*

Первая схема измерений является аналогом схемы наложения электродов по методу Кубичека [11]. Для моделирования биоимпедансных измерений в нашей модели, был использован "усеченный" вариант данной электронной схемы. На Рисунке 13 показано положение кольцевых электродов для первой схемы измерения. Потенциальные электроды располагаются на шеи и груди, и на поперечных срезах шеи и левой ноги задаются средние плотности токов.

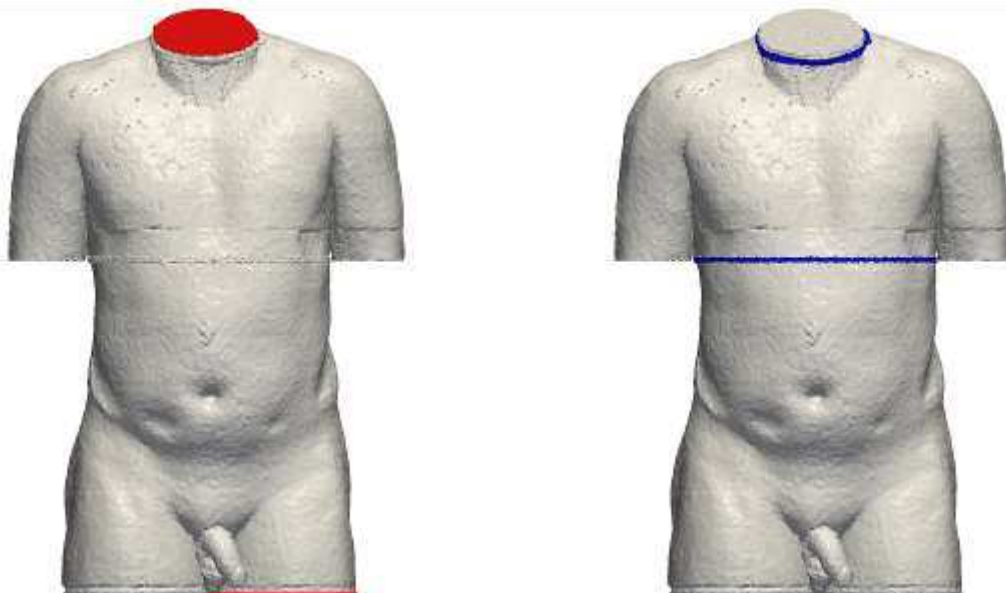


Рисунок 13 –Первая схема расположения электродов, красным цветом отмечены токовые электроды, синим – потенциальные.

Вычисления проводились для двух частот измерений 5 и 50 кГц. На Рисунках 14–16 приведены рассчитанные поля потенциалов и функции чувствительности и областей с наибольшим вкладом в функцию чувствительности. В Таблице 2 приложения А приведены величины вкладов в функцию чувствительности различных органов и тканей для разных частот измерений.

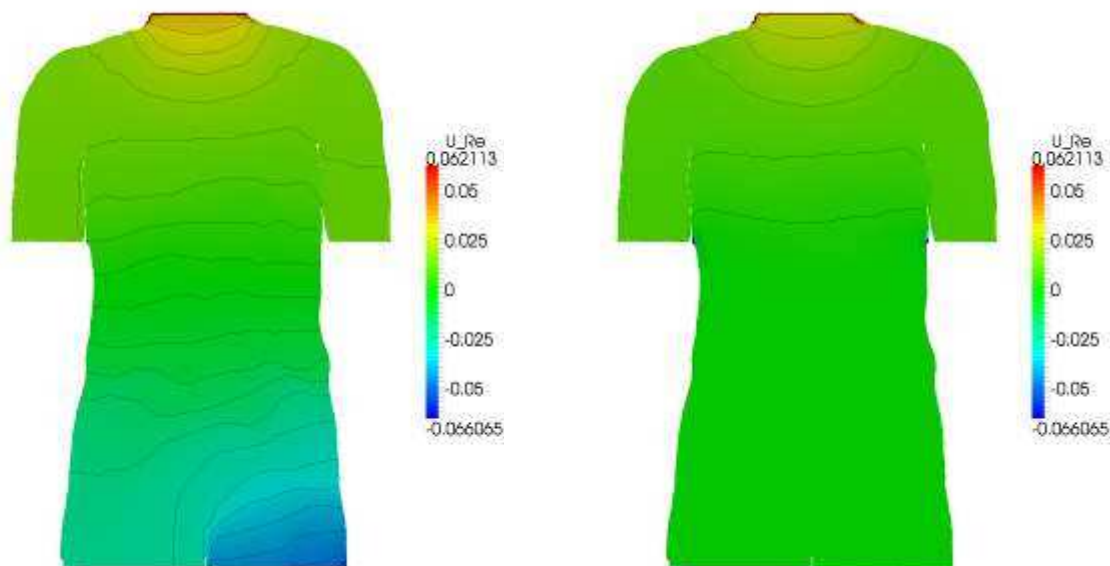


Рисунок 14 – Сечение плоскостью потенциала электрического тока для токовой и потенциальной пар электродов. Частота измерений – 5кГц.

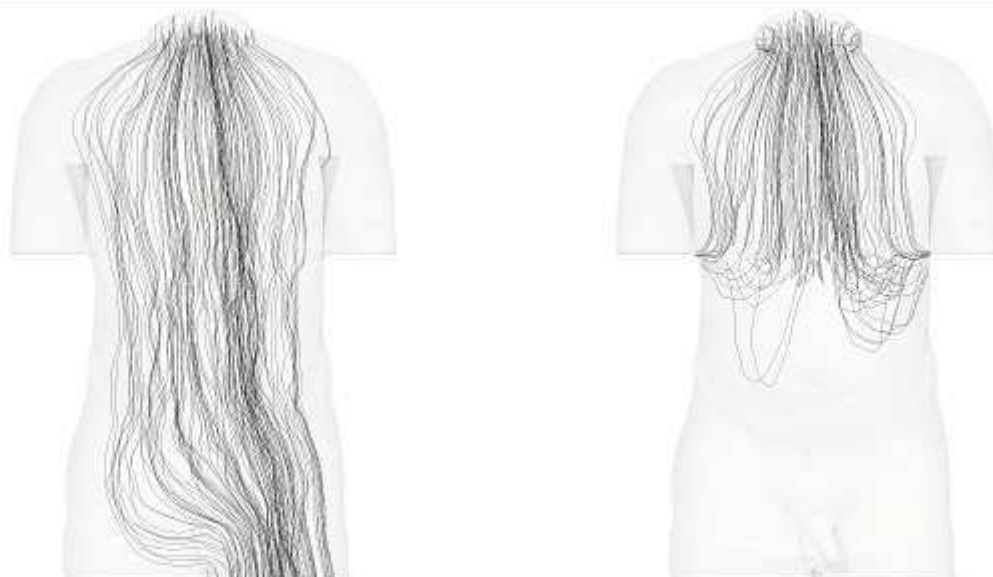


Рисунок 15 – Силовые линии электрического тока для токовой и потенциальной пар электродов. Частота измерений – 50кГц.



Рисунок 16 – Области высокой чувствительности, порог 50% и 70%. Частота измерений – 5кГц.

Отметим, что метод Кубичека направлен на исследование гемодинамических параметров, и полученные в данной работе результаты об относительном вкладе легочных вен и артерий, сердце и легких имеют тот же порядок, что и в работе [12]: легочные вены – 0.124%, легочные артерии – 0.291%, сердце – 0.868%, правое легкое – 4.15%, левое легкое – 4.64%. Также, общий вклад всех кровеносных сосудов, сердца и легких, полученных в нашей работе (13.77%), в целом согласуется с результатами работы [12] – 15.2%.

2.2. *Вторая схема измерений*

Вторая схема измерений представляет собой схему наложения электродов, предложенную в [13] и направленную на локализацию области импедансных измерений только в большом круге кровообращения, в отличие от первой схемы (метода Кубичека), где в область измерений попадает и большой и малый круг кровообращения.

Во второй схеме измерений токовые кольцевые электроды располагаются на руках, и потенциальные круглые – на груди, как и в первом случае, биоимпедансные измерения в данном случае моделируются в «усеченном» варианте. На Рисунке 17 показано положение потенциальных круглых электродов, а на поперечных срезах правой и левой рук задается средняя плотность тока.

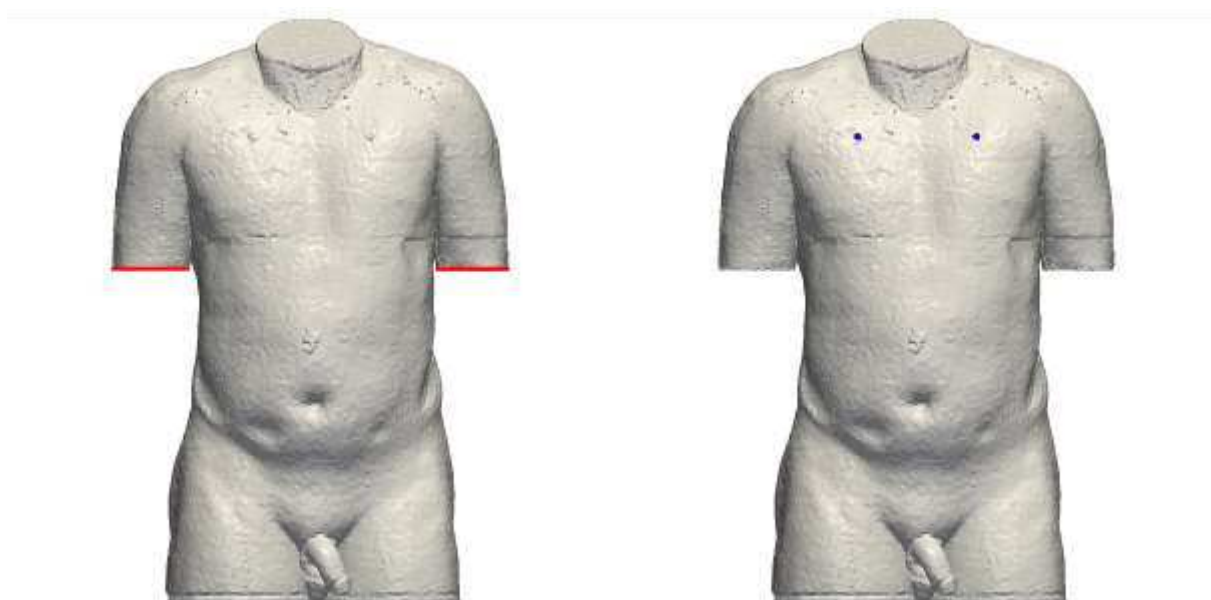


Рисунок 17 – Вторая схема расположения электродов, красным цветом отмечены токовые электроды, синим – потенциальные.

Вычисленные поля потенциалов и функции чувствительности для частот 5 и 50 кГц и области с наибольшим вкладом в функцию чувствительности приведены на Рисунках 18–20. В Таблице 2 приложения А приведены величины вкладов в функцию чувствительности различных органов для разных частот измерений. Характер распределения поля чувствительности для исследуемой схемы измерения совпадает с результатами, полученными в работе [13] для плоской торакальной области человека.

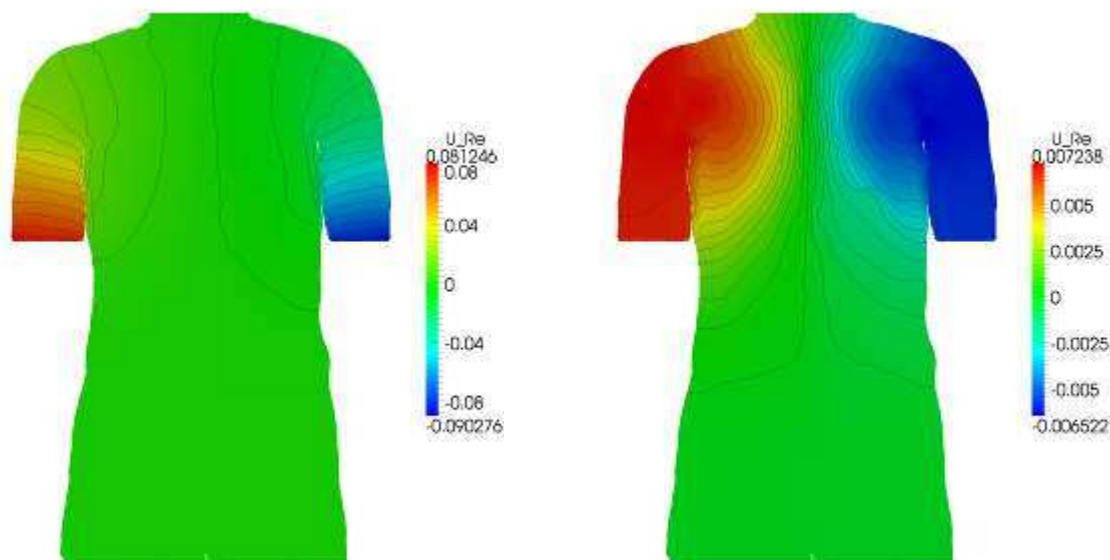


Рисунок 18 – Сечение плоскостью потенциала электрического тока для токовой и потенциальной пар электродов. Частота измерений – 50кГц.

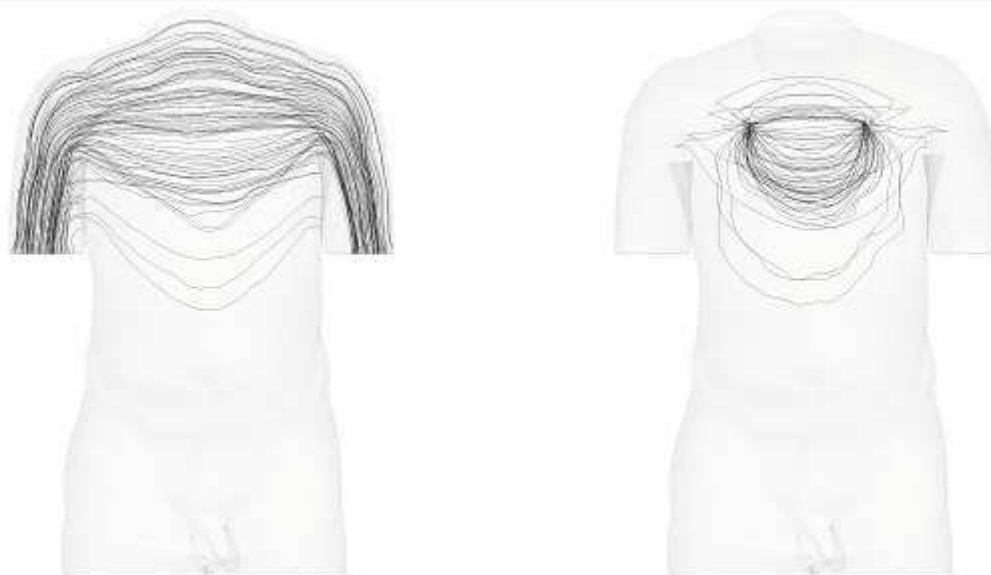


Рисунок 19 – Силовые линии электрического тока для токовой и потенциальной пар электродов. Частота измерений – 5кГц.



Рисунок 20 – Области высокой чувствительности, порог 50% и 70%. Частота измерений – 50кГц.

3. Разработка основных элементов интерфейса пользователя для программ моделирования и визуализации электроимпедансных измерений тела человека

Основными программными пакетами для работы с медицинскими изображениями, объемами, полученными в результате сегментирования изображений, и для визуализации численных решений являются ИТК-SNAP (<http://www.itksnap.org>) и Paraview (<http://www.paraview.org/>). Оба приложения находятся в свободном доступе.

3.1. ИТК-SNAP

ИТК-SNAP – это интерактивное приложение, которое позволяет просматривать трехмерные изображения, а также проводить обработку данных изображений (например, сегментирование интересующих областей) в ручном режиме и/или автоматическом с помощью нескольких различных методов, предлагаемых разработчиками. Приложение имеет простой и понятный интерфейс, что позволяет достаточно быстро начать продуктивно работать с данной программой.

Наиболее часто ИТК-SNAP используется для работы с МРТ- и КТ-срезов. Окно приложения представляют собой набор из четырех окон, в трех из которых показываються

три проекции исследуемой области, и в последнем – полученный после обработки изображений объем, см. Рисунок 21.

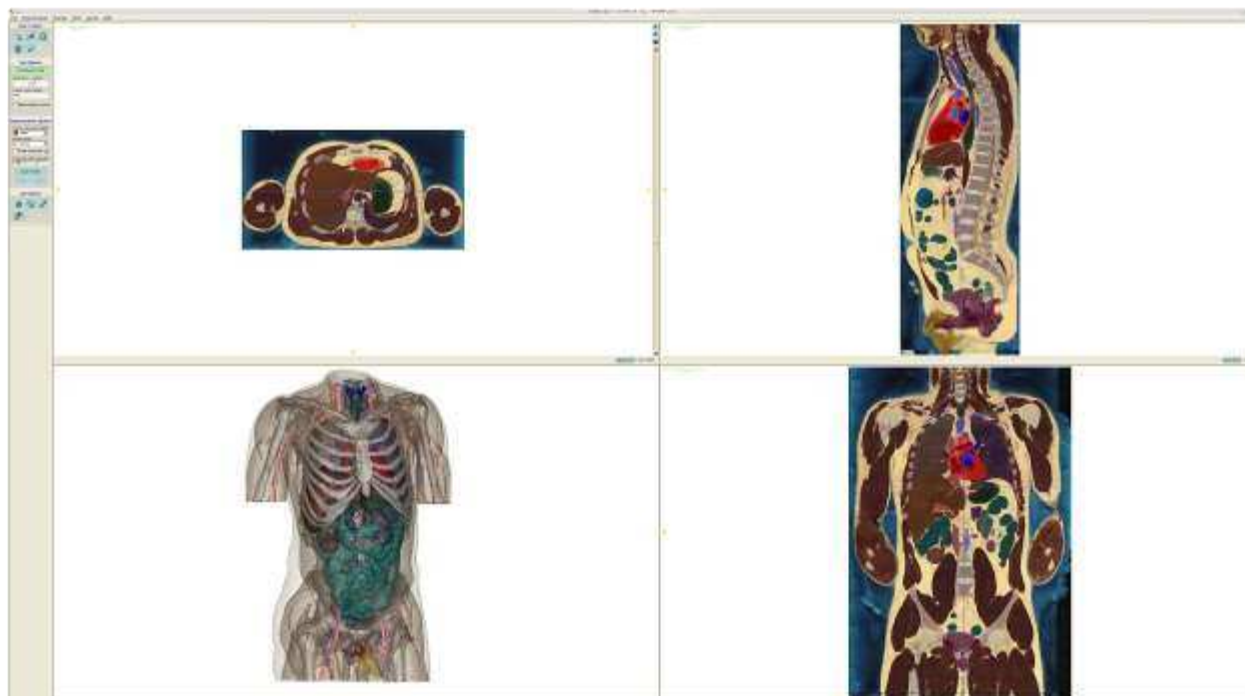


Рисунок 21 – Интерфейс программы ИТК-SNAP.

Результатом сегментации медицинских изображений при использовании ИТК-SNAP является трёхмерный массив целочисленных данных, в котором каждому вокселю ставится в соответствие номер органа, которому он принадлежит. Помимо сегментации внутренних органов, с помощью ИТК-SNAP задается положение различных электродов на исследуемых областях. Полученный в конечном итоге массив является первым и ключевым звеном в процессе построения расчетных сеток, см. раздел 1.3 настоящего отчёта.

3.2. Paraview

Paraview – приложение, созданное специально для анализа и визуализации большого набора данных. Особенности данной программы позволяют достаточно быстро и качественно обрабатывать данные пользователя, а также позволяет настраивать её для исследования конкретных задач, см. Рисунок 22.

При моделировании задач биоимпедансных измерений пакет Paraview использовался для обработки и визуализации численных решений при различных схемах измерений.

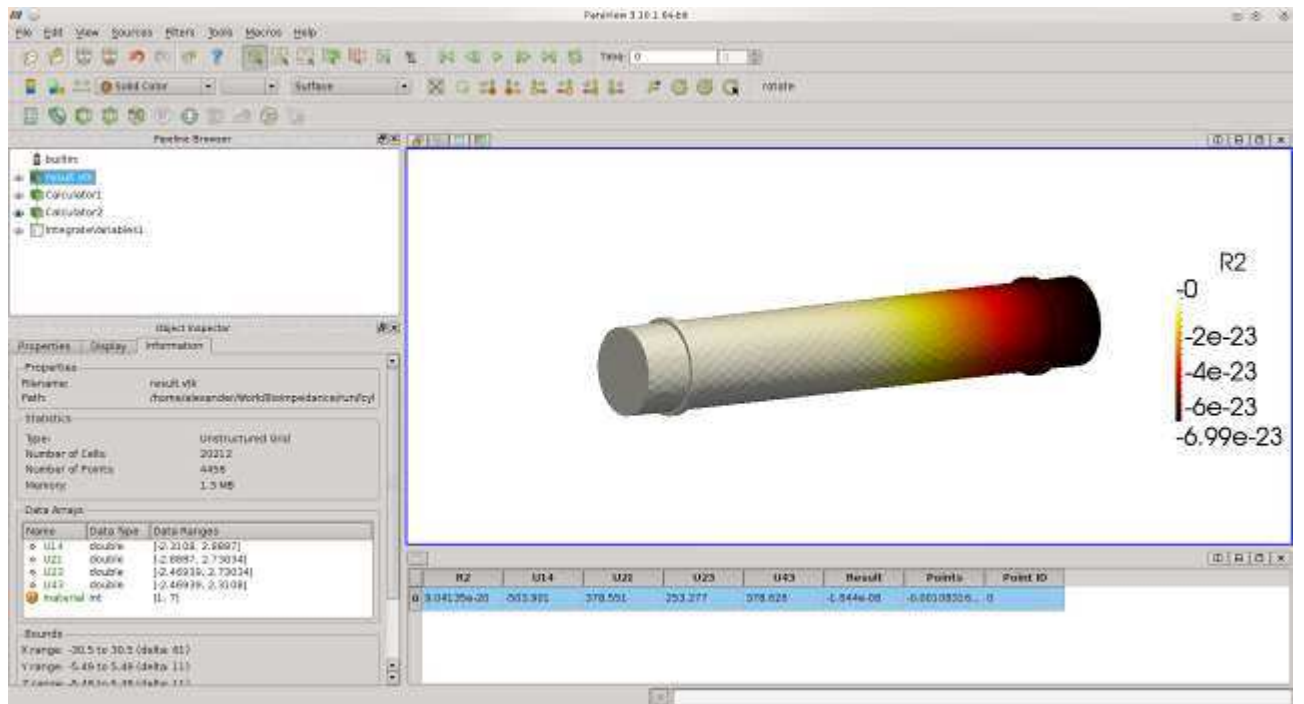


Рисунок 22 – Интерфейс программы Paraview.

Таким образом, основой интерфейса пользователя при моделировании биоимпедансных измерений является связка ITK-SNAP+Paraview, которые позволяют определять самому пользователю исследуемую геометрию, задавать схему измерений, визуализировать полученное с помощью пакета библиотек Ani3d численное решение и производить над ним различные операции (например, вычисление градиента).

Заключение

Содержание настоящего отчёта исчерпывает задания Этапа № 3 Календарного плана Государственного контракта № 14.740.11.0844 от 01 декабря 2010г. Поставленные задачи выполнены полностью.

На данном этапе были исследованы и решены следующие вопросы и задачи:

– проведена верификация пакетов библиотек, применяемых для решения систем уравнений в частных производных.

– построены геометрические модели для двух схем биоимпедансных измерений туловища мужчины.

– проведены численные расчеты для модели туловища мужчины по нахождению полю потенциалов и функции чувствительности для различных частот и схемах измерений.

– предложены основные программные средства для визуализации и обработки расчётов.

Полученные результаты согласуются с работами [12, 13], что в свою очередь показывает правомерность использования построенных конечно-элементных моделей для расчетов при различных параметрах проводимостей тканей и различных электрических схемах в целях развития методик биоимпедансного анализа.

В процессе работы над проектом старшим научным сотрудником ИВМ РАН В.Н. Чугуновым подготовлена и представлена в диссертационный совет докторская диссертация, защита которой назначена на февраль 2012 года.

К исследованию на настоящем этапе привлечено большое количество молодежи: 5 молодых кандидатов наук, 4 аспиранта и 5 студентов. В 2011 году результаты настоящего проекта докладывались на международной конференции «Наука и инновации-2011», всероссийской молодежной конференции-школе «Современные проблемы математического моделирования» и на конференции «Математические модели и численные методы в биоматематике».

По результатам работы опубликованы две статьи и одна статья сдана в печать:

1. *Данилов А.А., Саламатова В.Ю., Василевский Ю.В., Смирнов А.В., Руднев С.Г., Николаев Д.В.* Математическое моделирование биоимпедансных измерений. Применение к задаче оценки гидратации лёгких // Материалы 13-й научно-практической конференции “Диагностика и лечение нарушений регуляции сердечно-сосудистой системы” (Москва, Главный клинический госпиталь МВД России, 23 марта 2011 г.). Москва, 2011. С.150–162.
2. *Николаев Д.В., Василевский Ю.В., Данилов А.А., Ерюкова Т.А., Колесников В.А., Руднев С.Г., Саламатова В.Ю., Смирнов А.В.* Моделирование биоимпедансных измерений организма человека // Материалы 6-й международной научной школы «Наука и инновации-2011» (18-24 июля 2011 г). Йошкар-Ола: МарГУ, 2011. С.301–308.
3. *Василевский Ю.В., Данилов А.А., Николаев Д.В., Руднев С.Г., Саламатова В.Ю., Смирнов А.В.* Конечно-элементный анализ задач биоимпедансной диагностики // ЖВМиМФ, сдана в печать.

Все заданные целевые индикаторы и показатели достигнуты.

Приложение А

Таблица 1. значения объемов, занимаемых некоторыми внутренними органами, их процентное соотношение ко всему объему туловища мужчины

Ткань	Объем, мм ³	Процентное соотношение, %
Мышцы	27611679	40,61
Висцеральный жир	22706963	33,40
Кость	4364203	6,41
Кишка	3279796	4,82
Правое легкое	1875209	2,75
Печень	1854786	2,72
Левое легкое	217872	2,67
Половая система	952842	1,39
Сердце	657117	0,96
Диафрагма	554096	0,81
Желудок	494536	0,72
Венозная часть	409546	0,59
Селезенка	253977	0,37
Левая почка	217872	0,32
Артеральная часть	211354	0,29
Хрящи	201692	0,29
Правая почка	180247	0,26
Поджелудочная железа	118311	0,17
Пищевод	79960	0,11
Трахея	43948	0,06
Щитовидная железа	29633	0,04
Желчный пузырь	25874	0,03
Гортань	12205	0,01

Таблица 2. Сравнительный вклад (%) различных органов и тканей в функцию чувствительности в модели туловища для разных схем и частот измерений в процентном отношении

	первая схема измерений		вторая схема измерений	
	5 кГц	50 кГц	5 кГц	50 кГц
Ткань				
Кожа	0.23	0.22	0.00	0.26
Висцеральный жир	1.25	0.54	1.67	1.51
Мышцы	72.56	69.44	53.14	45.93
Половая система	-0.01	-0.00	0.00	0.00
желчный пузырь	0.00	0.03	0.12	0.12
поджелудочная железа	0.47	0.45	0.38	0.36
печень	0.28	0.50	0.41	0.69
селезнка	0.09	0.10	0.10	0.12
щитовидная железа	1.61	1.50	0.86	0.80
гортань	0.13	0.09	0.05	0.05
кишка	0.91	1.12	1.58	1.76
желудок	2.19	2.14	1.29	1.23
правое легкое	4.59	5.03	12.62	13.44
левое легкое	5.23	5.49	9.81	10.39
левая почка	0.04	0.04	0.03	0.04
правая почка	0.01	0.02	0.02	0.02
диафрагма	2.57	2.39	2.81	2.58
сердце	0.64	1.01	3.50	5.02
кости	0.57	0.51	1.50	1.34
трахея	0.68	0.71	0.55	0.53
хрящи	0.37	0.32	0.73	0.63
пищевод	2.27	2.00	2.23	2.18
легочный ствол	0.05	0.11	0.43	0.67
легочные вены	0.15	0.28	0.92	1.66
легочные артерии	0.15	0.28	0.88	1.58
остальные артерии	0.75	1.50	1.55	2.31
остальные вены	2.21	4.18	2.82	4.77

Список использованных источников

1. Николаев Д.В., Смирнов А.В., Бобринская И.Г., Руднев С.Г. Биоимпедансный анализ состава тела человека. – М.: Наука, 2009. – 392 с.
2. Grimmes S. and Martinsen O.G. Bioimpedance and Bioelectricity Basics. – Amsterdam: Elsevier, 2008. – 471 p.
3. Geselowitz D.B. An application of electrocardiographic lead theory to impedance plethysmography // IEEE Trans. Biomed. Eng. – 1971. – V.18, №1. – P.38-41.
4. Visible Human Project [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.nlm.nih.gov/research/visible/visible_human.html, свободный. Язык английский.
5. Chew L.P. Guaranteed-quality mesh generation for curved surfaces // Proc. 9th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom. – 1993. – P. 274–280.
6. Ruppert J. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation // J. Algorithms. – 1995. – V. 18. – P. 548–585.
7. Boissonnat J.D. and Oudot S. Provably good sampling and meshing of surfaces // Graphical Models. – 2005. V. 67. – P. 405–451.
8. Oudot S., Rineau L., Yvinec M. Meshing volumes bounded by smooth surfaces // Proc. 14th International Meshing Roundtable. – 2005. P. 203–219.
9. Василевский Ю.В., Липников К.Н. Использование методики восстановления гессиана при построении адаптивных сеток // Вопросы атомной науки и техники. – 2006. – № 3. – С. 37–53.
10. Lipnikov K., Vassilevski Yu. Parallel adaptive solution of 3D boundary value problems by Hessian recovery // Comp. Methods Appl. Mech. Engrn. – 2003. – Vol. 192. – № 11–12. – Pp. 1495–1513.
11. Kubicek W.G. Impedance Plethysmograph, Pat.USA. № 3.340.867. A61b.5/02. – 1967, sept., 12.
12. Kauppinen P.K., Hyttinen J.A., Malmivuo J.A. Sensitivity distributions of impedance cardiography using band and spot electrodes analyzed by a three-dimensional computer model.// Ann. Biomed. Eng. – 1998. – V. 26, № 4. – P. 694–702.

13. Mozhaev V.A. Sensitivity Analysis of Polysegmental BIA Parameters for Estimation of Body Composition and Systemic Hydrohemodynamics. // 13th International Conference on Electrical Bioimpedance and the 8th Conference on Electrical Impedance Tomography IFMBE Proceedings. – 2007. – V. 17, № 3. – P. 44–47.