

Механика биоматериалов: гиперупругие модели и остаточные напряжения.

Саламатова В.Ю. (Сеченовский Университет)

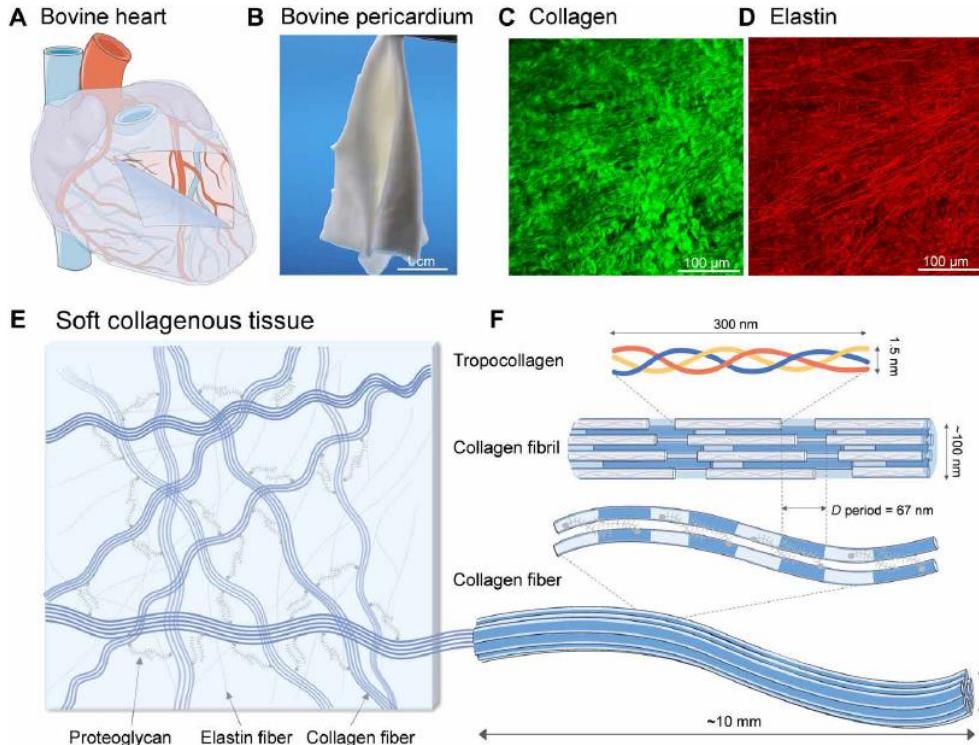
salamatova_v_yu@staff.sechenov.ru

«МАТЕМАТИКА В МЕДИЦИНЕ», 2025

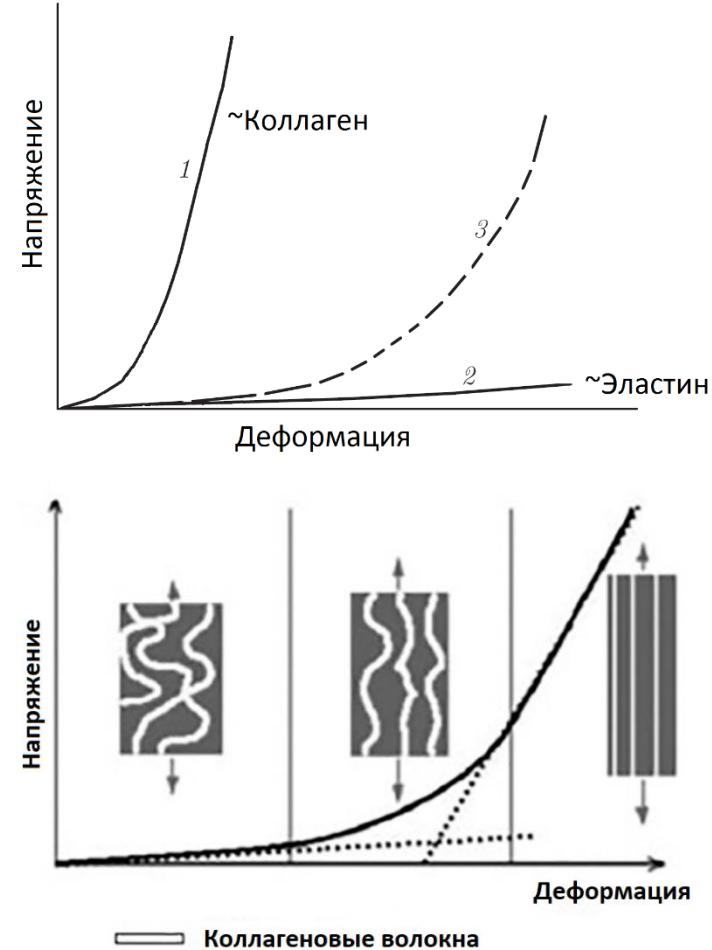


СЕЧЕНОВСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
НАУК О ЖИЗНИ

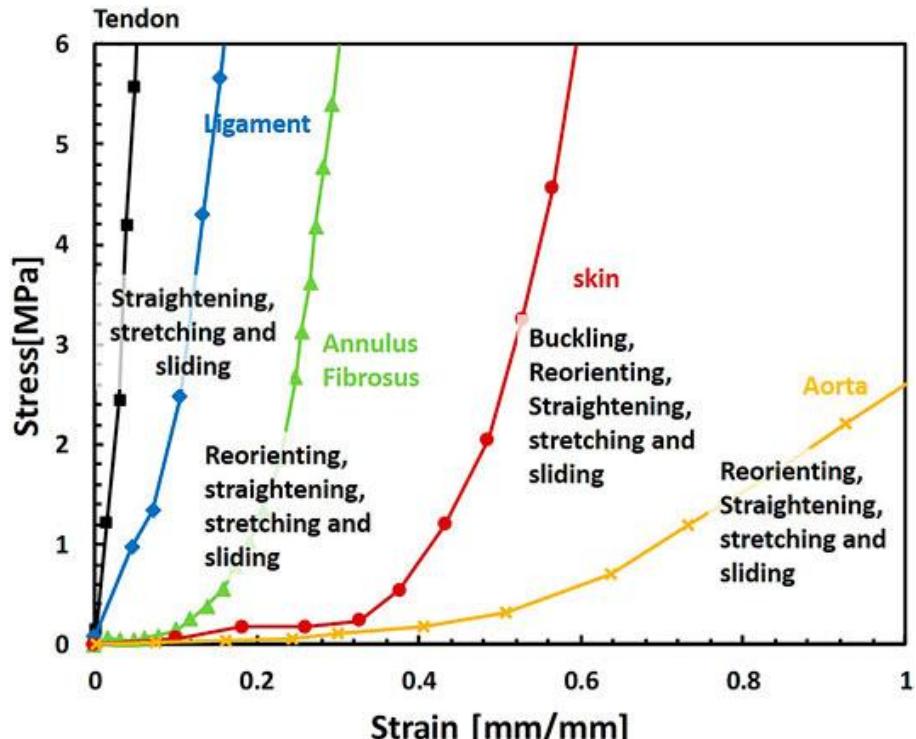
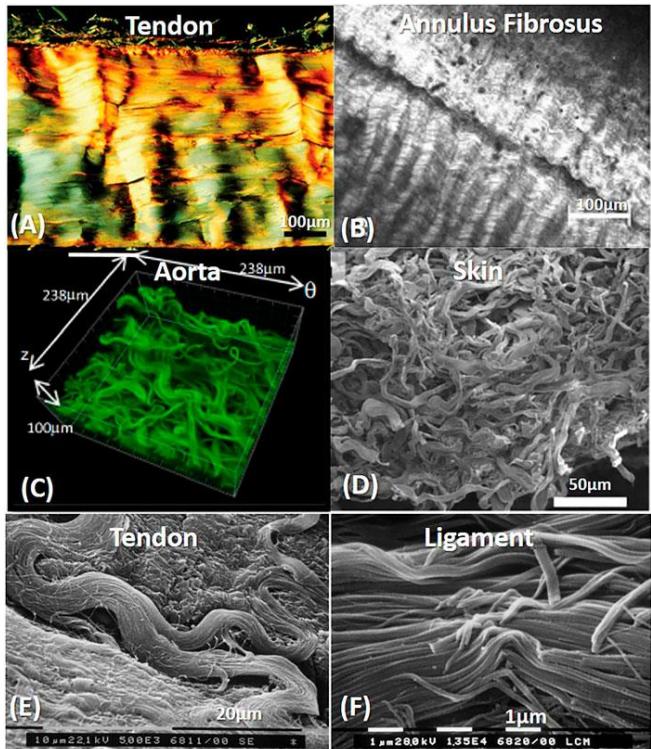
Фиброзная соединительная ткань



Tang, J., Chen, X., Liu, F., Zeng, L., Suo, Z., & Tang, J. (2025). Why are soft collagenous tissues so tough?. *Science Advances*, 11(25), eadw0808.



Микроструктура и макросвойства



Sharabi, M. (2022). Structural mechanisms in soft fibrous tissues: a review. *Frontiers in Materials*, 8, 793647.

Модель механики биоматериалов

Корректное описание механических свойств биоматериалов критически важно для:

- Тканевой инженерии
- Планирования хирургических вмешательств
- Разработки медицинских имплантатов (стенты)

Определяющие соотношения (математические модели) напрямую влияют на точность расчетов.

Пассивное поведение - модель гиперупругого материала

- Учет сокращения (активное поведение)
- Вязкоупругие модели
- Микроструктурные модели

Модель гиперупругого материала

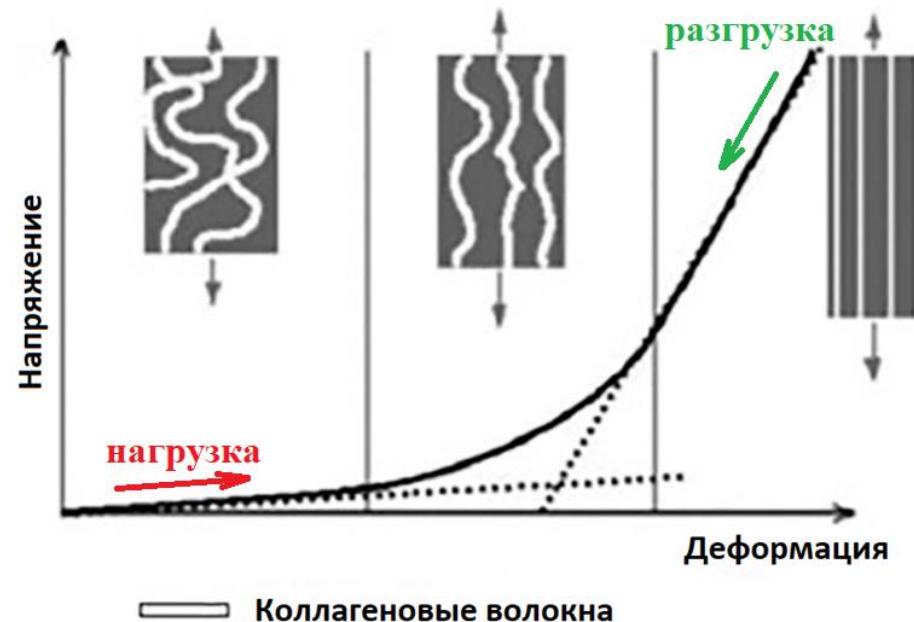
Гиперупругий потенциал (W): Скалярная функция, определяющая энергию деформации.

Принципы механики сплошной среды:

- Объективность:
 $W(F) = W(QF)$ (не зависит от сист. отсчета).
- Материальная симметрия:
 $W(F) = W(FQ)$ (определяется структурой материала).

Связь с напряжением:

- 1 Пиолы-Кирхгофа: $P = \partial W / \partial F$
- 2 Пиолы-Кирхгофа: $S = 2\partial W / \partial C$



Традиционный подход: Феноменология

Основная идея: Априорный выбор вида потенциала W с последующей подгонкой параметров под эксперимент.

Три основных этапа:

1. Выбор модели: Экспертный отбор кандидатов из множества существующих.
2. Идентификация параметров: Решение обратной задачи (оптимизация).
3. Выбор оптимальной модели: Сравнение кандидатов по критериям качества.

Traditional approaches
(with predefined hyperelastic potential form)

Step 1. Forming a set of candidate models W_1, W_2, \dots, W_n

based on expert knowledge

Step 2. Parameter identification for each model
(Curve Fitting: Least Squares, VFM, FEUM)

Step 3. Selection of the optimal model
(Criteria: Accuracy of experimental data description, Bayesian selection)

Традиционный подход: Феноменология (проблемы)

Три основных этапа:

1. Выбор модели: Экспертный отбор кандидатов из множества существующих.

-Отсутствие четких алгоритмов выбора.

2. Идентификация параметров: Решение обратной задачи (оптимизация).

- Неединственность оптим. набора параметров.
- Зависимость от выбора функционала (меры напряжений и тп).

3. Выбор оптимальной модели: Сравнение кандидатов по критериям качества.

- Сложность формализации критерия "наилучшего соответствия"

Traditional approaches
(with predefined hyperelastic potential form)

Step 1. Forming a set of candidate models W_1, W_2, \dots, W_n

based on expert knowledge

Step 2. Parameter identification for each model
(Curve Fitting: Least Squares, VFM, FEUM)

Step 3. Selection of the optimal model
(Criteria: Accuracy of experimental data description, Bayesian selection)

Современные методы: Data-Driven подходы

Идея: Отказ от априорного задания вида потенциала.

Два основных класса:

1. **Неинтерпретируемые:** высокая точность, но модель – "черный ящик" (классические нейронные сети).
2. **Интерпретируемые:** модель имеет аналитический или физически обоснованный вид.

! Качество и полнота экспериментальных данных

Non-Interpretable
(Black Box Model)

- Classical neural networks

Interpretable
(Transparent Model):

- Sparse regression
- Symbolic regression
- Constitutive Artificial Neural Network (CANN)
- WYPIWYG (*What-You-Prescribe-Is-What-You-Get*)
- Orthogonal stress response
(e.g. based on Laplace stretch)

Остаточные напряжения в мягких тканях



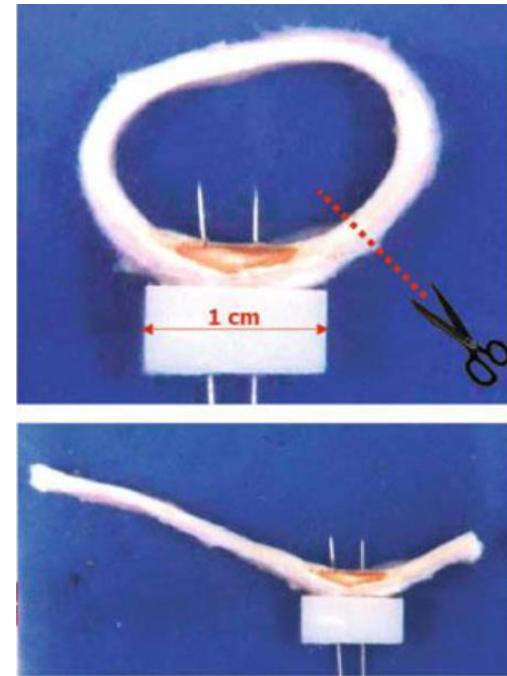
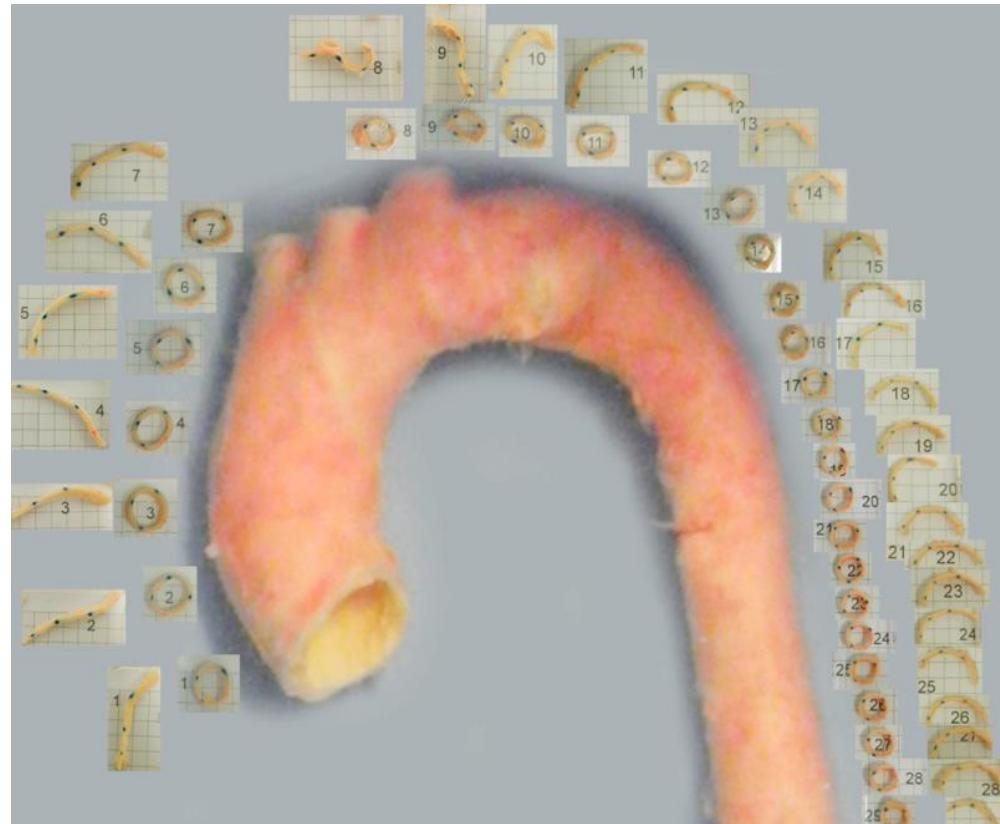
Остаточные напряжение: что это такое?

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(res)} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_R,$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(res)} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \partial \mathcal{B}_R.$$



Остаточные напряжение: оценка наличия

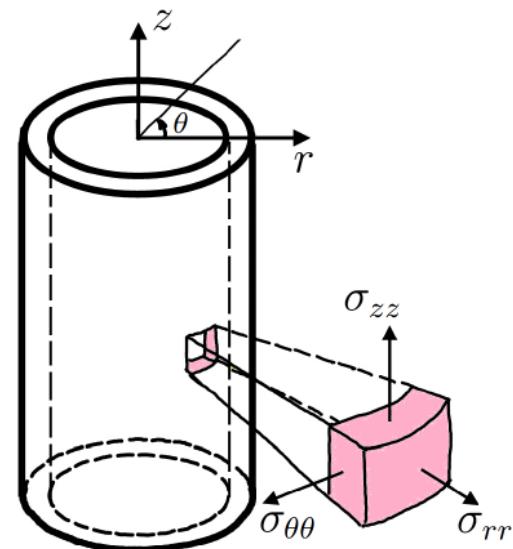
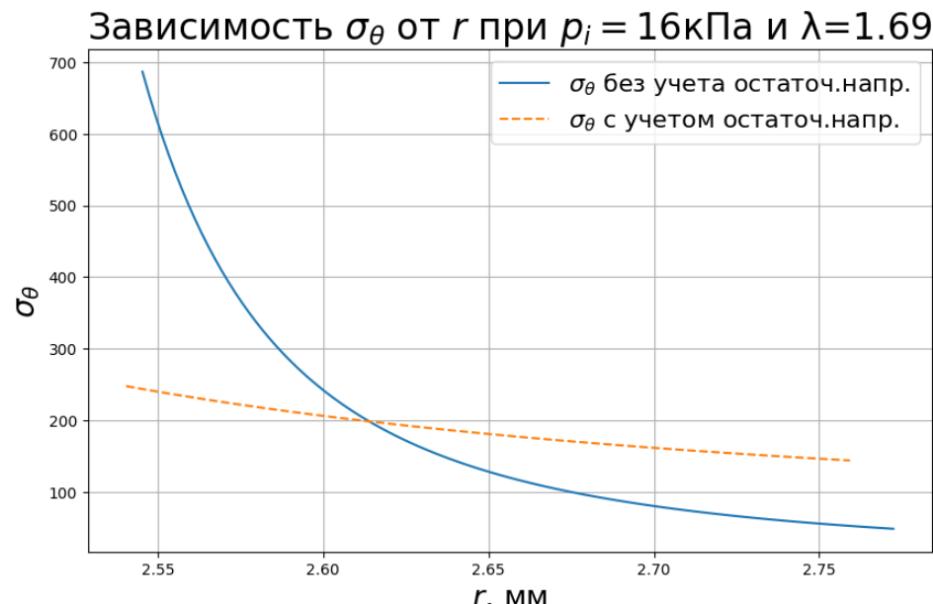


Основные направления исследований

1. Биомеханическая роль
2. Методы измерения и количественной оценки
3. Построение определяющих соотношений
4. Влияние на рост, ремоделирование тканей

1. Биомеханическая роль

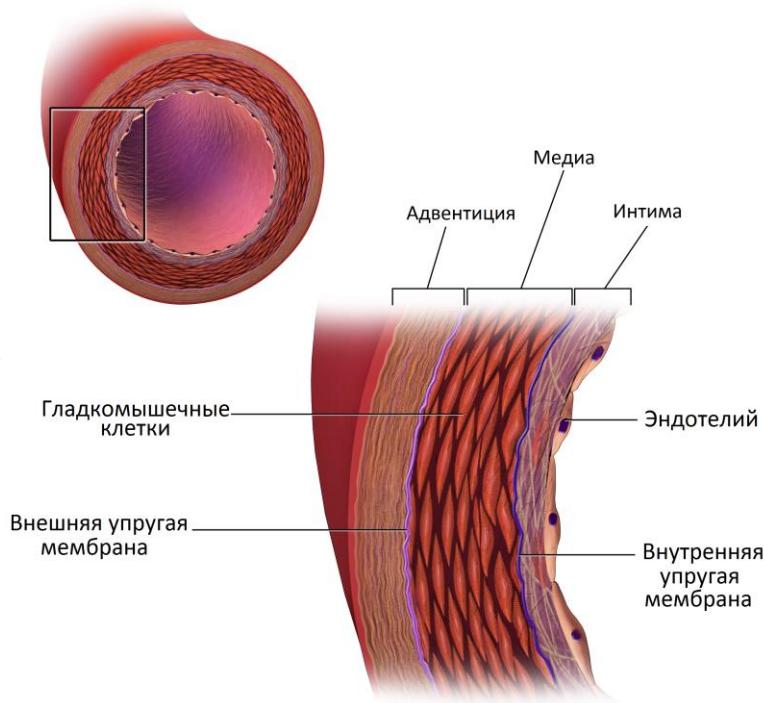
Остаточные напряжения считаются критически важными для снижения градиентов напряжений и поддержания физиологических функций, особенно в артериях и других тканях, несущих нагрузку.



Fung, Y. C. (1991). What are the residual stresses doing in our blood vessels?. *Annals of biomedical engineering*, 19(3), 237-249

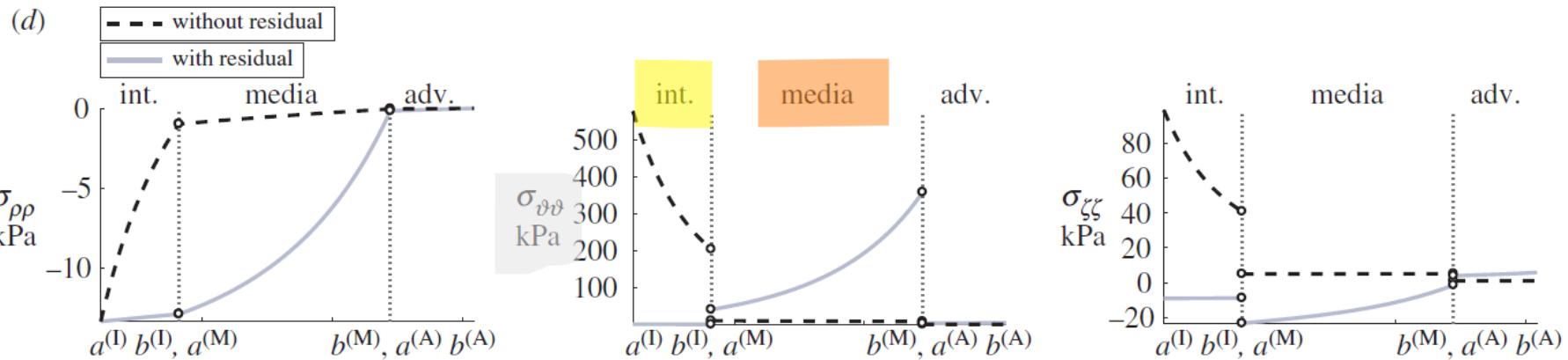
Остаточные напряжения: биомеханическая роль

- о Равномерное распределение напряжений повышает эффективность артерии в выдерживании нагрузок.
- о Согласованная работа гладкомышечных волокон: каждое волокно вносит почти одинаковый вклад в сократительную силу при регулировании кровотока
- о Концепция гомеостатических напряжений



Остаточные напряжения необходимы для функционирования тканей и гомеостаза.

Аорта как слоистая структура

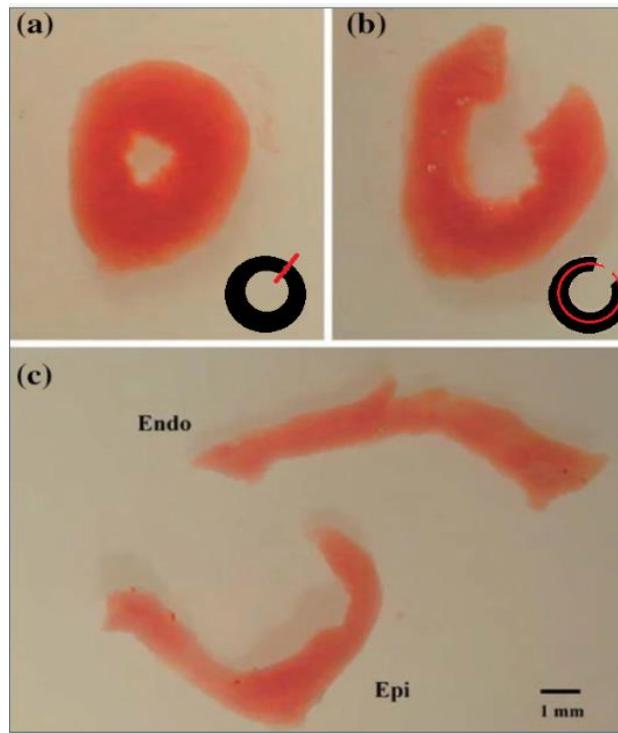


«it is not clear whether the transmural stresses became more uniform due to residual stresses or not».

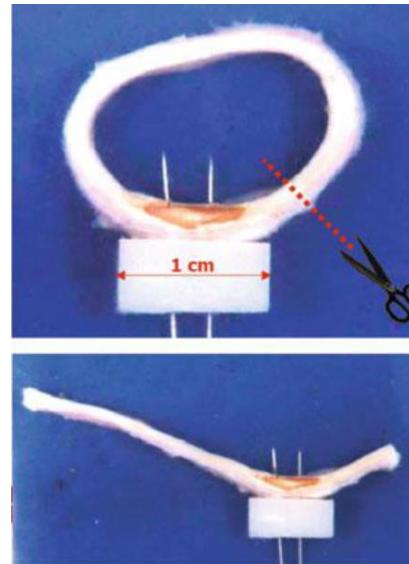
Sigaeva, T., Sommer, G., Holzapfel, G. A., Di Martino, E. S. (2019). Anisotropic residual stresses in arteries. *Journal of the Royal Society Interface*, 16(151), 20190029.

2. Методы измерения и количественной оценки

- Эксперимент с углом раскрытия



Nelson, D. (2012). Review of methods for determining residual stresses in biological materials. In *Experimental and Applied Mechanics, Volume 4: Proceedings of the 2012 Annual Conference on Experimental and Applied Mechanics* (pp. 173-182)



- Модели роста и ремоделирования для нахождения поля остаточных напряжений

3. Построение определяющих соотношений

- Старт с конфигурации свободной от нагрузок и напряжений, некой виртуальной конфигурации
 - Остаточные напряжения включены в определяющее соотношение
-
- o Ciarletta, P., Destrade, M., & Gower, A. L. (2016). On residual stresses and homeostasis: an elastic theory of functional adaptation in living matter. *Scientific reports*, 6(1), 24390
 - o Johnson, B. E., & Hoger, A. (1995). The use of a virtual configuration in formulating constitutive equations for residually stressed elastic materials. *Journal of elasticity*, 41(3), 177-215.

4. Влияние на рост, ремоделирование тканей

- Влияют на рост, устойчивость, морфогенез
- Dong, H., Liu, M., Martin, C., & Sun, W. (2020). A residual stiffness-based model for the fatigue damage of biological soft tissues. *Journal of The Mechanics and Physics of Solids*, 143, 104074.
- Liu, C., Du, Y., Lü, C., & Chen, W. (2020). Growth and patterns of residually stressed core-shell soft sphere. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 127, 103594.
- Huang, W., Li, B., & Feng, X. (2023). Mechanobiological tissue instability induced by stress-modulated growth. *Soft matter*
- Контроль начального остаточного напряжения для управления паттернами
- Du, Y., et al. (2019). Prescribing patterns in growing tubular soft matter by initial residual stress. *Soft matter*, 15(42), 8468-8474.

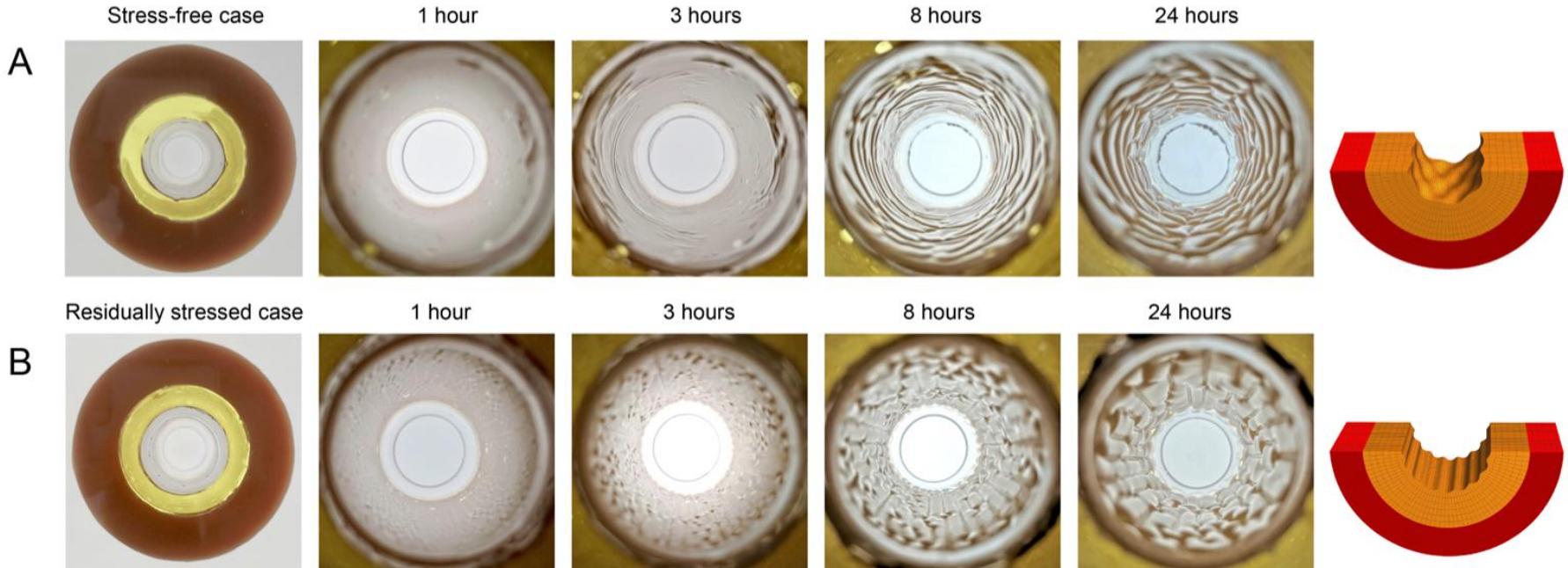


Fig. 3 Growth-induced buckling of bilayer tubes (inner layer: swelling hydrogel, outer layer: inert rubber) with (A) stress-free and (B) residually stressed initial states. By shrink-fitting, we created a non-zero initial residual stress in (B) (compressive hoop stress in the hydrogel, tensile hoop stress in the rubber). Otherwise, (A) and (B) have the same initial geometry and material parameters ($R_o/R_s \simeq 1.8$, $R_s/R_i = 1.5$, $\mu^{\text{inn}}/\mu^{\text{out}} \simeq 0.2$).

Спасибо за внимание!