

Разработка физико-информированной нейронной сети для анализа напряжённого состояния мягких биологических тканей

К.М. Уразова, Е.Б. Шепя, А.Д. Гаврилина

Сеченовский Университет

1-2 декабря 2025, Москва

Содержание

- 1 Введение и мотивация
- 2 Литературный обзор
- 3 Методология
- 4 Результаты
- 5 Обсуждение и заключение

Актуальность

Мягкие биологические ткани:

- Гиперупругость
- Вязкоупругость
- Анизотропия
- Несжимаемость

Проблемы МКЭ

- Сложная калибровка
- Высокие затраты
- Низкая персонализация

Цель исследования

Разработка PINN для точного моделирования вязкоупругого поведения мягких тканей

Классические гиперупругие модели

Модель Нео-Гука

$$\Psi = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3)$$

где μ — модуль сдвига

Модель Муни-Ривлина

$$\Psi = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3)$$

C_1, C_2 — материальные параметры

Модель Ёо (Yeoh)

$$\Psi = \sum_{i=1}^3 C_{i0}(I_1 - 3)^i + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{d_i}(J - 1)^{2i}$$

C_{i0}, d_i — параметры материала

Модель Хальцапфеля-Гассера-Отдена (HGO)

$$\Psi = C_{10}(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} [\exp(k_2(I_4 - 1)^2) - 1]$$

I_4 — инвариант, характеризующий анизотропию

Вязкоупругие модели

- Кельвин-Фойгт: $\sigma = E\epsilon + \eta\dot{\epsilon}$
- Максвелл: $\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$
- Стандартная линейная: $\sigma + \tau_\sigma\dot{\sigma} = E_0(\epsilon + \tau_\epsilon\dot{\epsilon})$

PINN в механике материалов

Основная идея PINN

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{data}} + \lambda \mathcal{L}_{\text{PDE}}$$

$\mathcal{L}_{\text{data}}$ — соответствие данным, \mathcal{L}_{PDE} — удовлетворение уравнений

Ключевые работы

- Raissi et al. (2019) — основы PINN для PDE
- Haghighat et al. (2021) — PINN в механике
- Energy-based viscoelastic PINNs (2023)
- vCANNs (2023) — архитектурные ограничения
- PINN для идентификации параметров (2023-2024)

Не решённые проблемы

- Объективность вязких членов в конечных деформациях
- Совмещение гиперупругости и вязкоупругости

Постановка задачи

Уравнение движения (квазистатика)

$$\nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^e + \mathbf{P}^v$$

- \mathbf{P}^e — упругая часть (1-й тензор Пиолы-Кирхгоффа)
- \mathbf{P}^v — вязкая часть

Условие несжимаемости

$$J = \det(\mathbf{F}) = 1$$

Упругий потенциал (Yeoh)

$$\Psi = \sum_{i=1}^3 C_{i0} (I_1 - 3)^i + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{d_i} (J - 1)^{2i}$$

Корректная вязкоупругая формулировка

Проблема объективности

Наивный подход $P^v = \eta \dot{F}$ не объективен

Предлагаемое решение

$$S^v = \eta \dot{E}, \quad E = \frac{1}{2}(C - I)$$

$$P^v = FS^v$$

Объективно (material frame indifference)

Диссипативный потенциал

$$\Phi = \frac{1}{2}\eta_1 \left(\frac{dl_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}\eta_2 \left(\frac{dl_4}{dt} \right)^2$$

Архитектура и обучение PINN

Архитектура сети

- Вход: (X, t)
- Выход: $u(X, t)$
- 4 скрытых слоя по 50 нейронов
- Активация: \tanh
- Автоматическое дифференцирование

Обучение

- Оптимизатор: Adam
- Коллокационные точки: 10,000
- Эпохи: 50,000
- Learning rate: 10^{-3}

Функционал потерь

$$\mathcal{L} = \lambda_{\text{PDE}} \mathcal{L}_{\text{PDE}} + \lambda_{\text{visc}} \mathcal{L}_{\text{visc}} + \lambda_{\text{vol}} \mathcal{L}_{\text{vol}}$$

$$\mathcal{L}_{\text{PDE}} = \|\nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{b}\|^2, \mathcal{L}_{\text{visc}} = \|\mathbf{P}^v - \mathbf{F} \eta \dot{\mathbf{E}}\|^2, \mathcal{L}_{\text{vol}} = (J - 1)^2$$

1D тест на релаксацию напряжения

Протокол

- Ступенчатая деформация $\varepsilon_0 = 0.1$
- Аналитическое решение:
$$\sigma(t) = E_{\infty}\varepsilon_0 + (E_0 - E_{\infty})\varepsilon_0 e^{-t/\tau}$$
- $E_{\infty} = 1$ кПа, $E_0 = 2$ кПа, $\tau = 2.5$ с

Сравнение MSE (кПа²)

Модель	MSE
Нео-Гук	3.2×10^{-3}
Стандартная линейная	4.1×10^{-7}
Обобщённая Максвелла	3.8×10^{-7}
PINN (наша)	3.2×10^{-7}

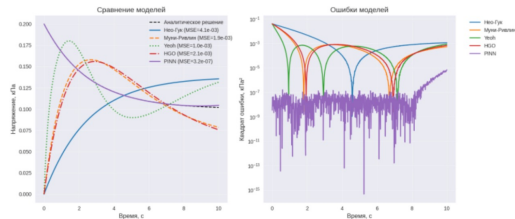


Рис. 1. Сравнение PINN с аналитическим решением и моделями

Сравнение предсказаний PINN с аналитическим решением

Преимущества подхода

- **Корректная формулировка** — объективность, несжимаемость
- **Гибкость** — комбинация любых моделей
- **Эффективность** — быстрое обучение на GPU
- **Персонализация** — включение экспериментальных данных

Ограничения

- Вычислительная стоимость обучения
- Сложные геометрии
- Экспериментальная валидация
- Обратные задачи

Основные результаты

- Предложена **формулировка PINN** для вязкоупругих мягких тканей
- Проведено **сравнение** с классическими моделями

Спасибо за внимание!