



СЕЧЕНОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ



ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
МГУ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

CarNum: платформа для моделирования электромеханики сердца

Данилов А.А.^{1,2}, Лёгкий А.А.¹, Сёмин Ф.А.³

¹ИВМ РАН

²Сеченовский университет

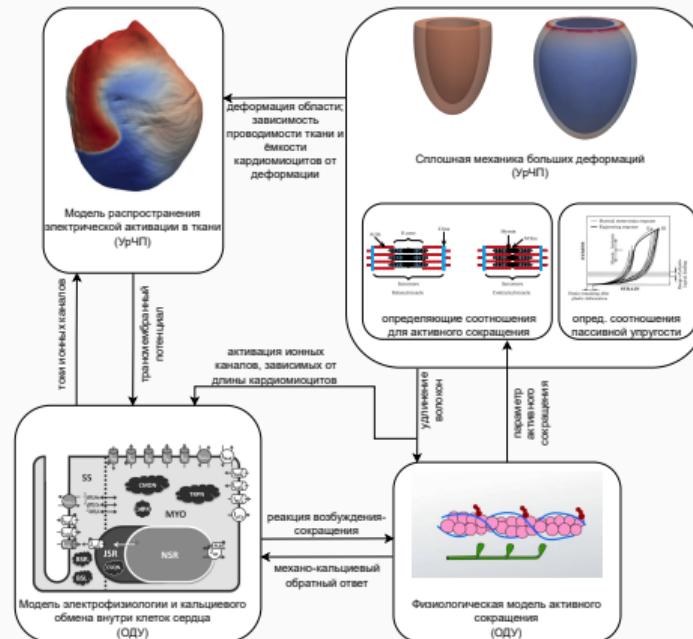
³НИИ механики МГУ

Математика в медицине 2025

Моделирование электромеханики сердца

Особенности моделей:

- мультифизичность
- многомасштабность
- сложная геометрия
- прямые и обратные связи
- значимая нелинейность



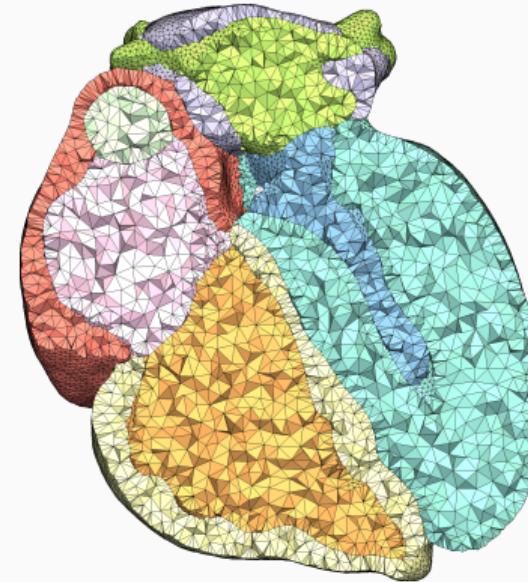
Сухая сопряжённая модель электромеханики сердца

1. Сегментация изображений и
построение сеток

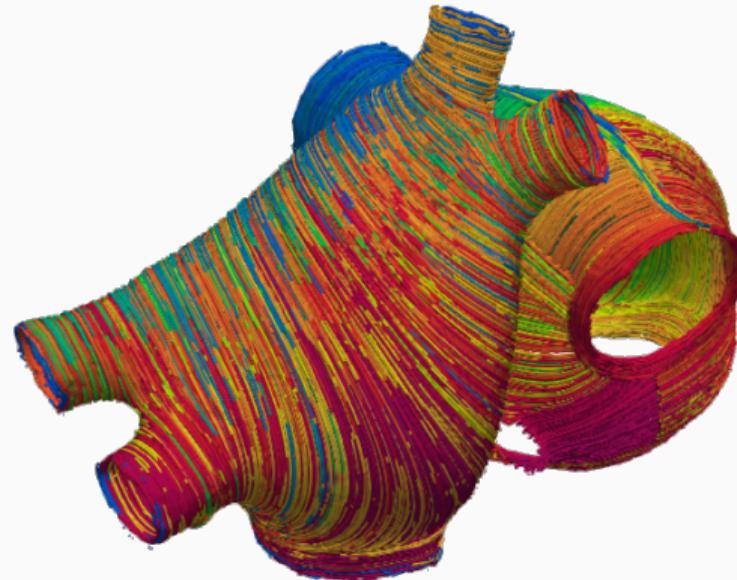
2. Генерация направления
волокон – методы основанные
на правилах

3. Решение уравнений модели

- Снимки КТ/МРТ и проект VHP
- Сегментирование в ITK-SNAP / 3D slicer
- CGAL/Gmsh



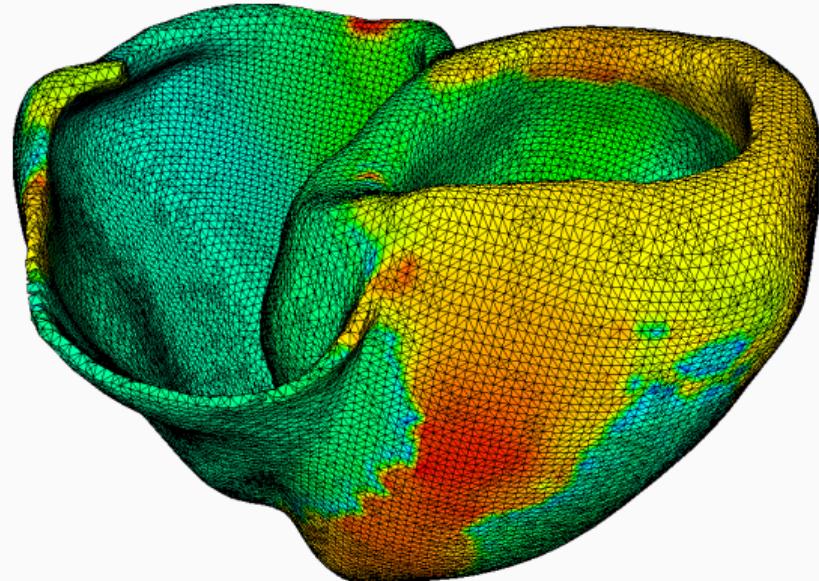
1. Сегментация изображений и построение сеток
2. Генерация направления волокон – методы основанные на правилах
3. Решение уравнений модели



- **Желудочки:** Bayer JD, ..., Trayanova N., *A novel rule-based algorithm for assigning myocardial fiber orientation to computational heart models*, 2012
- **Предсердия:** Piersanti R, ..., Quarteroni A., *Modeling cardiac muscle fibers in ventricular and atrial electrophysiology simulations*, 2020

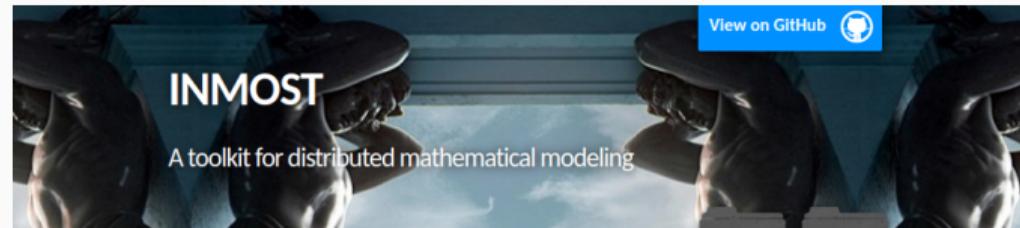
Этапы кардиомоделирования

1. Сегментация изображений и построение сеток
2. Генерация направления волокон – методы основанные на правилах
3. Решение уравнений модели



- Электрофизиология: моно-/бидоменные уравнения, уравнение эйконала
- Клеточные ионные и механические модели (CellML)
- Механика: активная и пассивная упругость

- Вычислительное ядро платформы реализовано на одном ЯП C++
- Массивная MPI/OpenMP-параллельность
 - Основа для платформы - **INMOST**
- Автодифференцирование нелинейных выражений
- Гибкая процедура подготовки модели
 - определение новых параметров из констант или сеточных данных
 - ассоциация параметров с параметрами конкретных подмоделей
 - человекочитаемый язык описания клеточных моделей
 - возможность выгрузки клеточных моделей из формата CellML



Математическая модель

Общий вид уравнений моделей

- Механика конечных деформаций, \mathbf{u} - поле перемещений:

$$\rho_0 \partial_{tt} \mathbf{u}^i - \nabla_j \mathbb{P}^{ij}(\mathbb{F}, \mathbf{a}) = 0, \quad \mathbb{F} = \mathbb{I} + \nabla \mathbf{u}$$

- Монодоменная модель распространения электрической активации, v - трансмембранный потенциал:

$$\chi_m C_m(\mathbf{a}) \partial_t v - \nabla \cdot (\sigma \nabla v) + \chi_m i_{ion}(v, \mathbf{w}, \mathbf{a}) = I_{stim}(t)$$

- Модель электрофизиологии и кальциевого обмена клетки, \mathbf{w} - переменные состояния модели:

$$\partial_t \mathbf{w} = \mathbf{q}(\mathbf{w}, v, \mathbb{F})$$

- Физиологическая модель активного сокращения, \mathbf{a} - переменные состояния модели:

$$\partial_t \mathbf{a} = \mathbf{r}(\mathbf{a}, \mathbf{w}, \mathbb{F})$$

Дискретизация по пространству

Есть 2 сетки: грубая Ω_{coarse}^h и мелкая Ω_{fine}^h

- механика среды \mathcal{M} :

МКЭ, перемещение \mathbf{u} - $(P_2)^3$ на Ω_{coarse}^h

- распространение электрической активации \mathcal{E} :

МКЭ, трансмембранный потенциал v - P_1 на Ω_{fine}^h

- клеточная электрофизиология \mathcal{C} :

неизвестные \mathbf{w} в точках квадратур двух сеток Ω_{coarse}^h и Ω_{fine}^h ;

системы ОДУ решаются независимо

- клеточная модель активного сокращения \mathcal{A} :

неизвестные \mathbf{a} в точках квадратур двух сеток Ω_{coarse}^h и Ω_{fine}^h ;

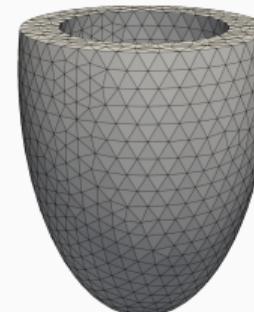
системы ОДУ независимы

Связи между подмоделями:

$$\mathcal{M} \xrightarrow[\mathbb{F}]{} \mathcal{C}, \mathcal{A}; \quad \mathcal{M} \xleftarrow[\mathbf{a}]{} \mathcal{A}$$

$$\mathcal{E} \xrightarrow[v]{} \mathcal{C}; \quad \mathcal{E} \xleftarrow[\mathbf{w}, \mathbf{a}]{} \mathcal{C}, \mathcal{A}$$

$$\mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{E}$$

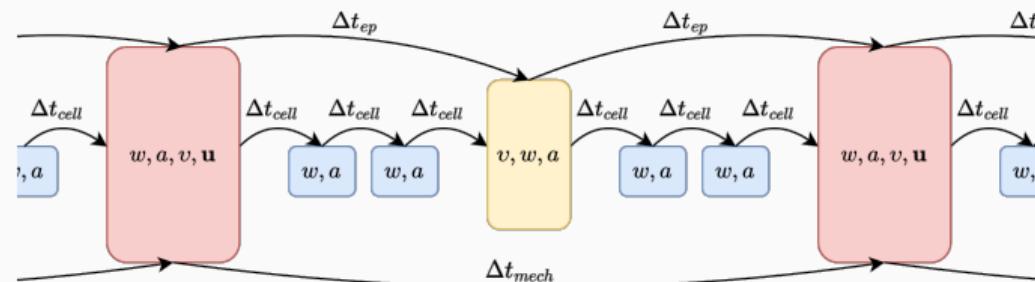


Дискретизация по времени

Метод разделения по процессам:

процессы имеет собственные шаги по времени: Δt_{mech} , Δt_{ep} , Δt_{cell}

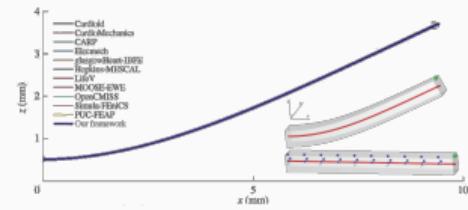
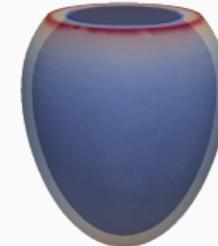
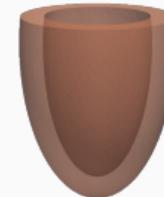
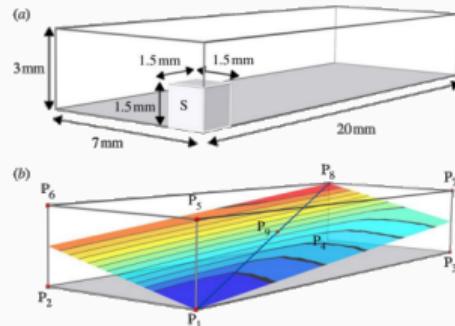
- механика сплошной среды:
 - неявная схема постоянного среднего ускорения
→ Нелинейная алгебраическая система
- распространение электрической активации:
 - явно-неявная схема
→ СЛАУ
- клеточные процессы:
 - методы численного интегрирования жёстких нелинейных ОДУ



Результаты

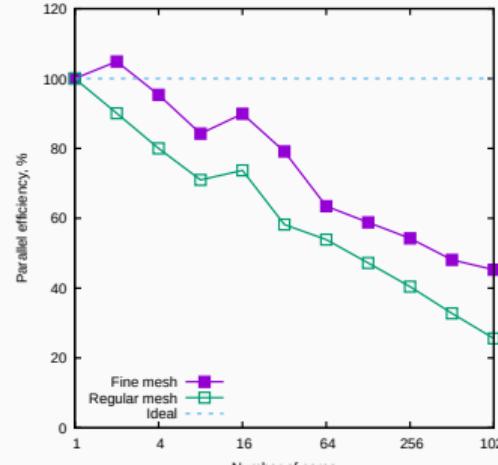
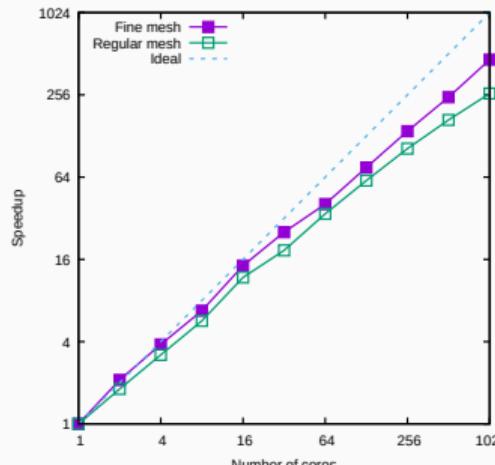
Верификация мультифизичного солвера платформы

- Pathmanathan et al. 2014 Verification of computational models of cardiac electro-physiology
- Niederer et al 2011 Verification of cardiac tissue electrophysiology simulators using an N-version benchmark
- Land et. al. 2015 Verification of cardiac mechanics software: benchmark problems and solutions for testing active and passive material behaviour



MPI-параллельная эффективность платформы

- Тестовая лин. задача с возбуждением участка миокарда
S.A. Niederer et al., Philos. Trans. R. Soc. 369, 4331–4351 (2011))
- Встроенный лин. солвер INMOST: MPT_ILUC
- Fine mesh: разбиение 256x256x256 для области 2x2x2 мм
regular mesh: разбиение 256x64x32 для области 20x7x3 мм
- Время расчётов
на 1 процессоре: Fine mesh - 68ч, regular mesh - 43.5ч
на 1024 процессорах: Fine mesh - 9 мин, regular mesh - 10 мин



Постановка эксперимента

ЭФ: Монодомен + Алиев-Панфилов **Мех:** Guccione **Сопряж:** Цатуриян-Сёмин

Геометрия: 90x90x10 мм

Зона неоднородности: $[27, 36] \times [0, 36] \times [0, 10]$ мм; **Волокно:** $f = (1, 0, 0)$;

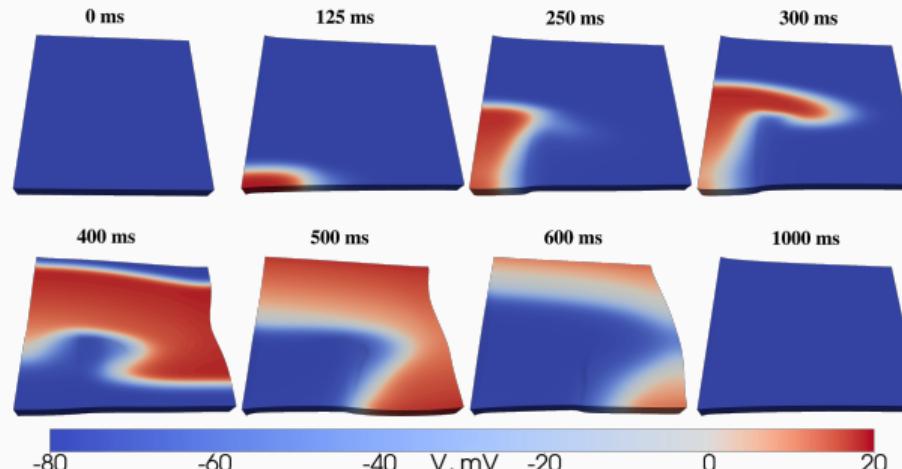
Стимуляция: $[0, 30] \times [0, 5] \times [0, 10]$ мм при $t \in [100, 103]$ мс

Гран. условия: слева закрепление; справа тянут первые 100 мс, а потом пружинно закрепляют; низ неподвижен вдоль z

Контрольные точки: $p_i = \{15i, 15i, 10i/3\}$, $i \in \overline{1, 5}$

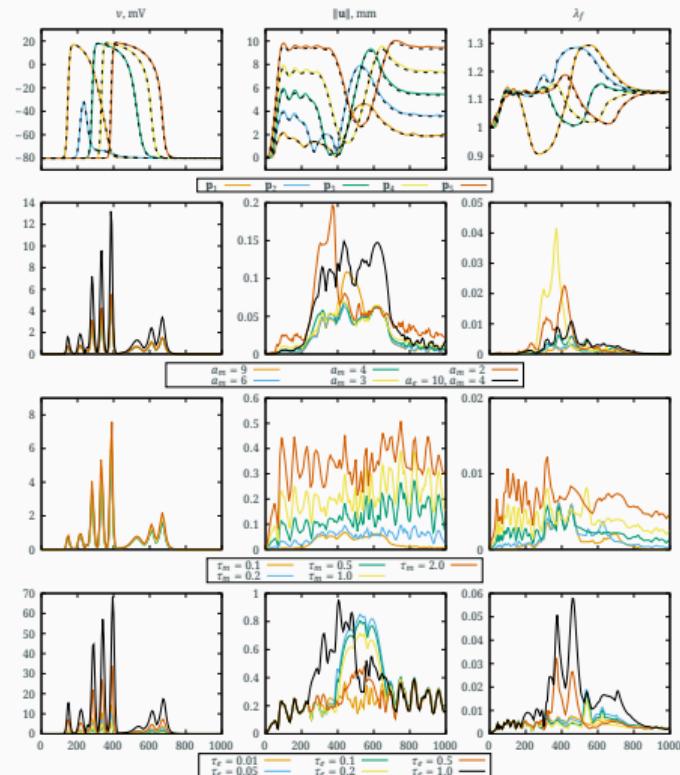
Сетки: $h_e = L/a_e$, $h_m = L/a_m$, $L = 10$ мм, разбиение куб в 6 тетра

Референсное решение: $a_e = a_m = 12$, $\tau_m = 0.1$ мс, $\tau_e = \tau_o = 0.01$ мс



Особенности схемы расщепления

- При $h_m > 2.5$ мм резко возрастает отклонение ε_{λ_f}
- Рост τ_m от 0.1 до 1мс приводит к небольшому увеличению скорости фронта ($\approx 0.7\%$)
- Рост τ_e замедляет распространение фронта
- При τ_e порядка 0.1 – 0.3мс фазовая ошибка компенсируется ошибкой от выбора $\tau_m = 1$ мс



Заключение

- Представлена численная схема расщепления по процессам для моделирования сопряжённой электромеханики
- Для тестовой задачи продемонстрировано существенное сокращение времени расчётов по сравнению с расчётами на общей сетке
- Для приемлемых результатов можно выбирать $h_m \leq 2.5$ мм, $\tau_m \leq 1$ мс
- Увеличение шага по времени для механики и электрофизиологии приводит к фазовым ошибкам разных знаков

Liogky A. A., Chernyshenko A. Yu., Danilov, A. A., Syomin, F. A. CarNum: parallel numerical framework for computational cardiac electromechanics // RZNAMM, 2023, 38(3): 127–144.

Liogky A. A., Danilov, A. A., Syomin, F. A. Temporally and spatially segregated discretization for a coupled electromechanical myocardium model // RZNAMM, 2024, 39(5): 243–258.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ 22-71-10007

Спасибо за внимание!