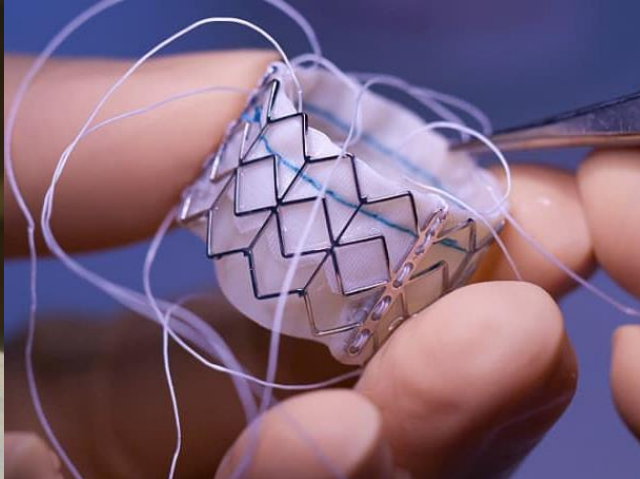


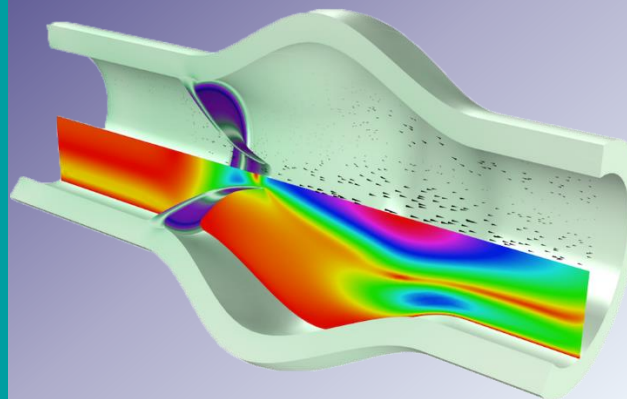


Сириус
Научно-технологический
университет



**пермский
политех**

EFSI модель левого желудочка для численной оценки гемодинамики аортального клапана



Н.Е. Пиль, А.Г. Кучумов
Центр генетики и наук о жизни, НТУ Сириус
Лаборатория биожидкостей, ПНИПУ

>10% людей старше 70 лет подвержены аортальному стенозу



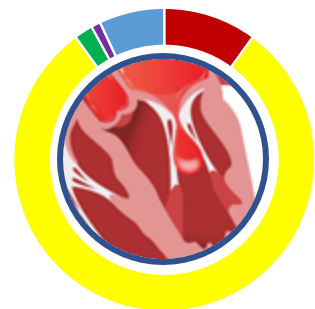
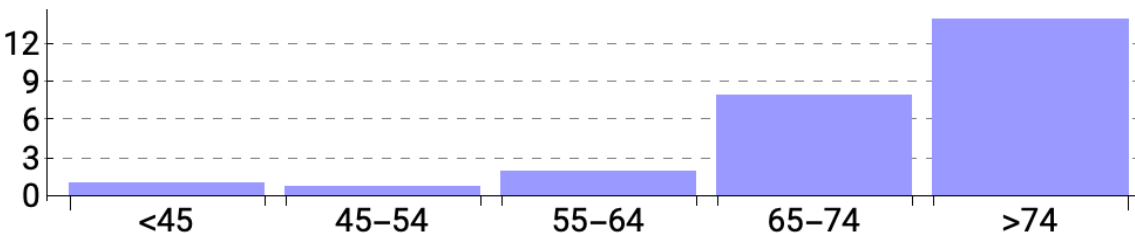
270 000

операций по замене аортального клапана
ежегодно

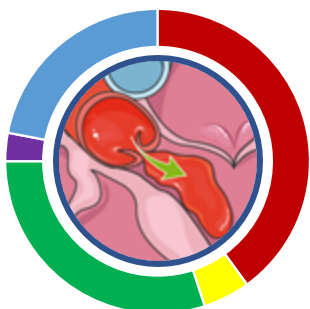
850 000

прогнозируется к **2050** году

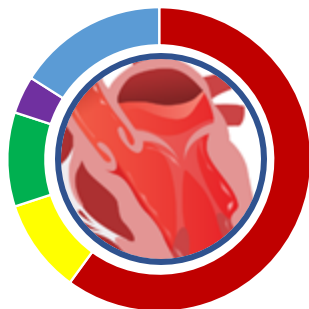
Распространенность пороков клапанов сердца по возрастам



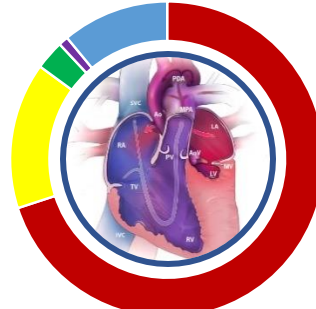
Mitral stenosis



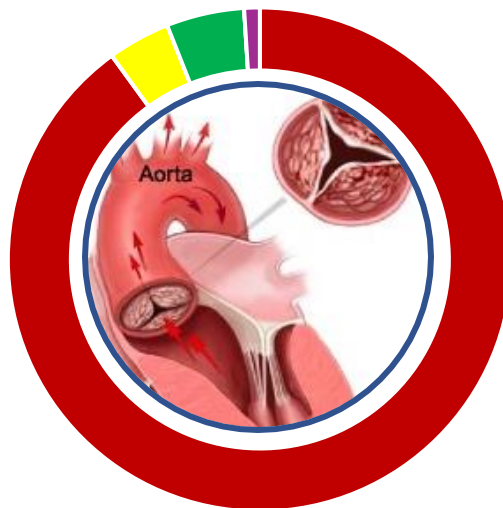
Aortic regurgitation



Primary mitral regurgitation



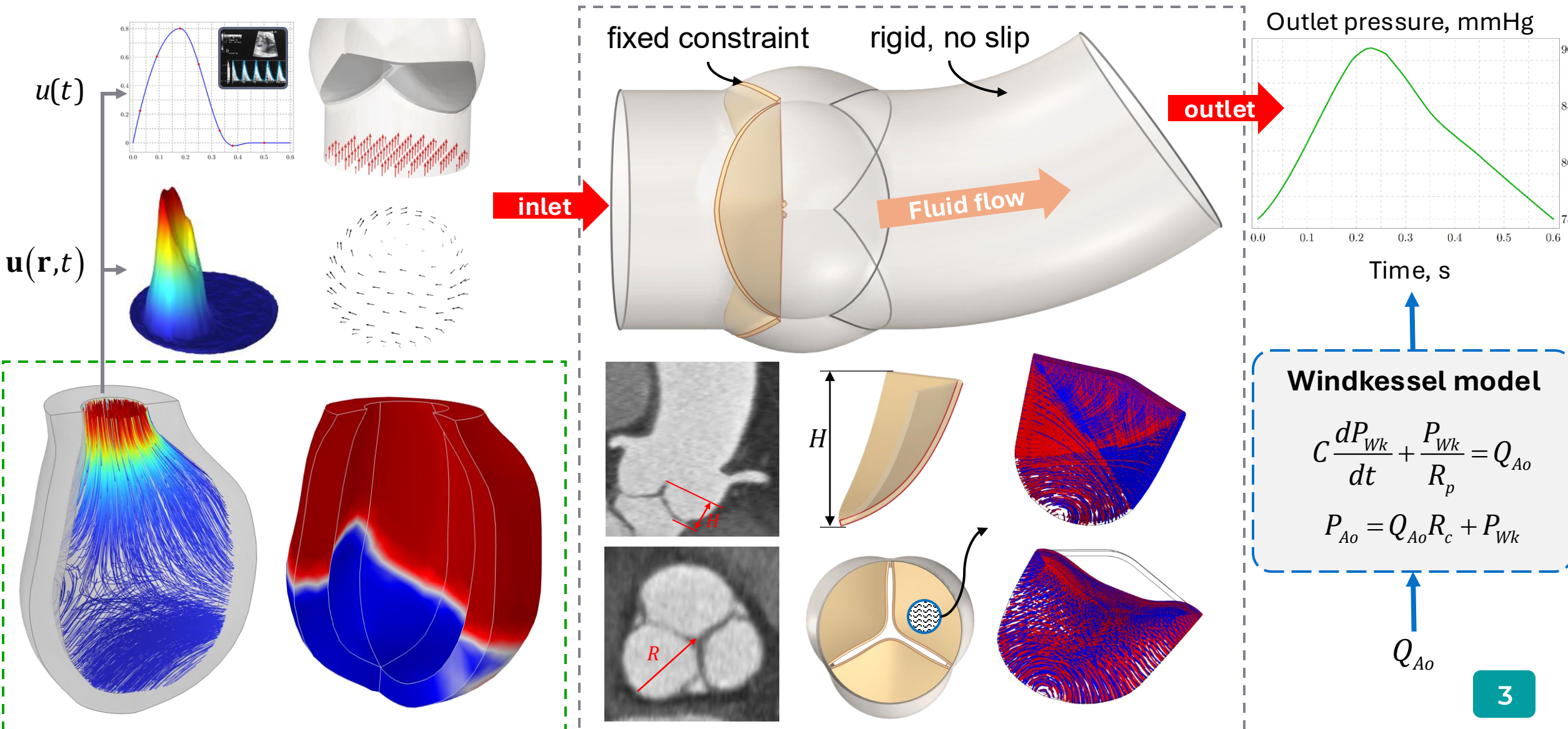
Multiple left-sided



Aortic stenosis

- Degenerative
- Rheumatic
- Congenital
- Inflammatory
- Other

lung, 2019, Clark, 2012, Yacoub & Takkenberg, 2005



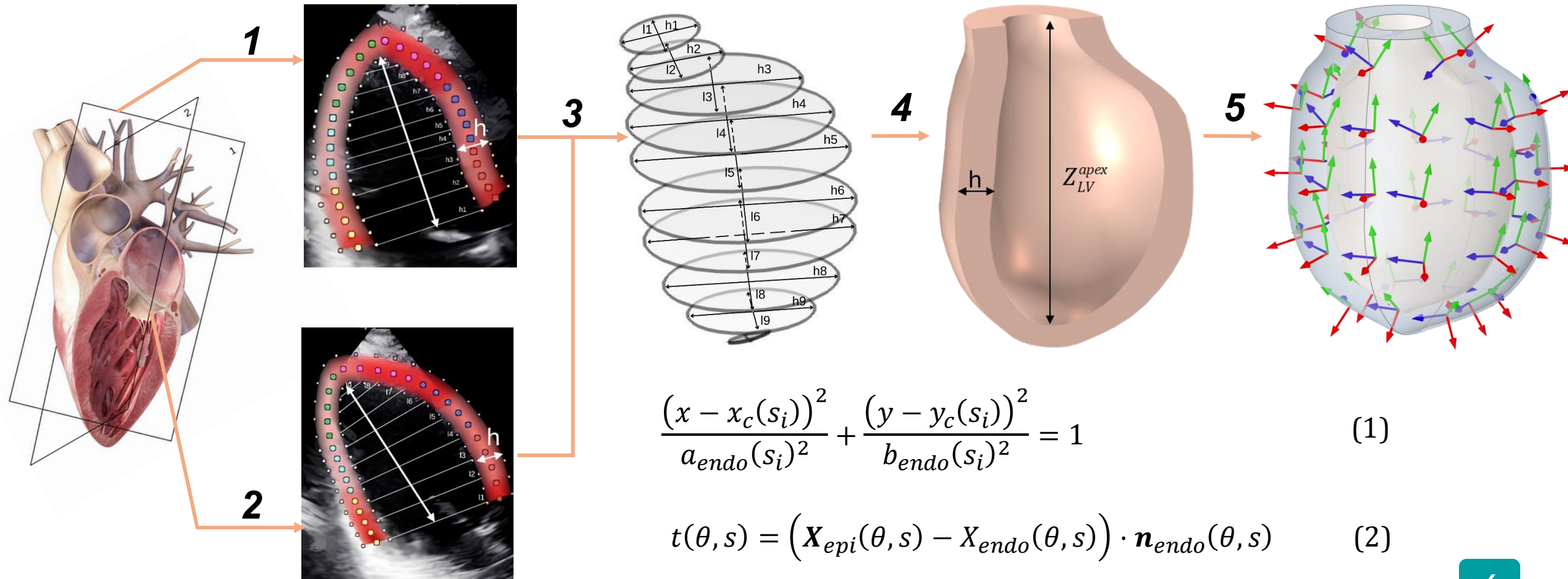
Геометрическая модель левого желудочка

1-2: Обработка данных эхокардиографии

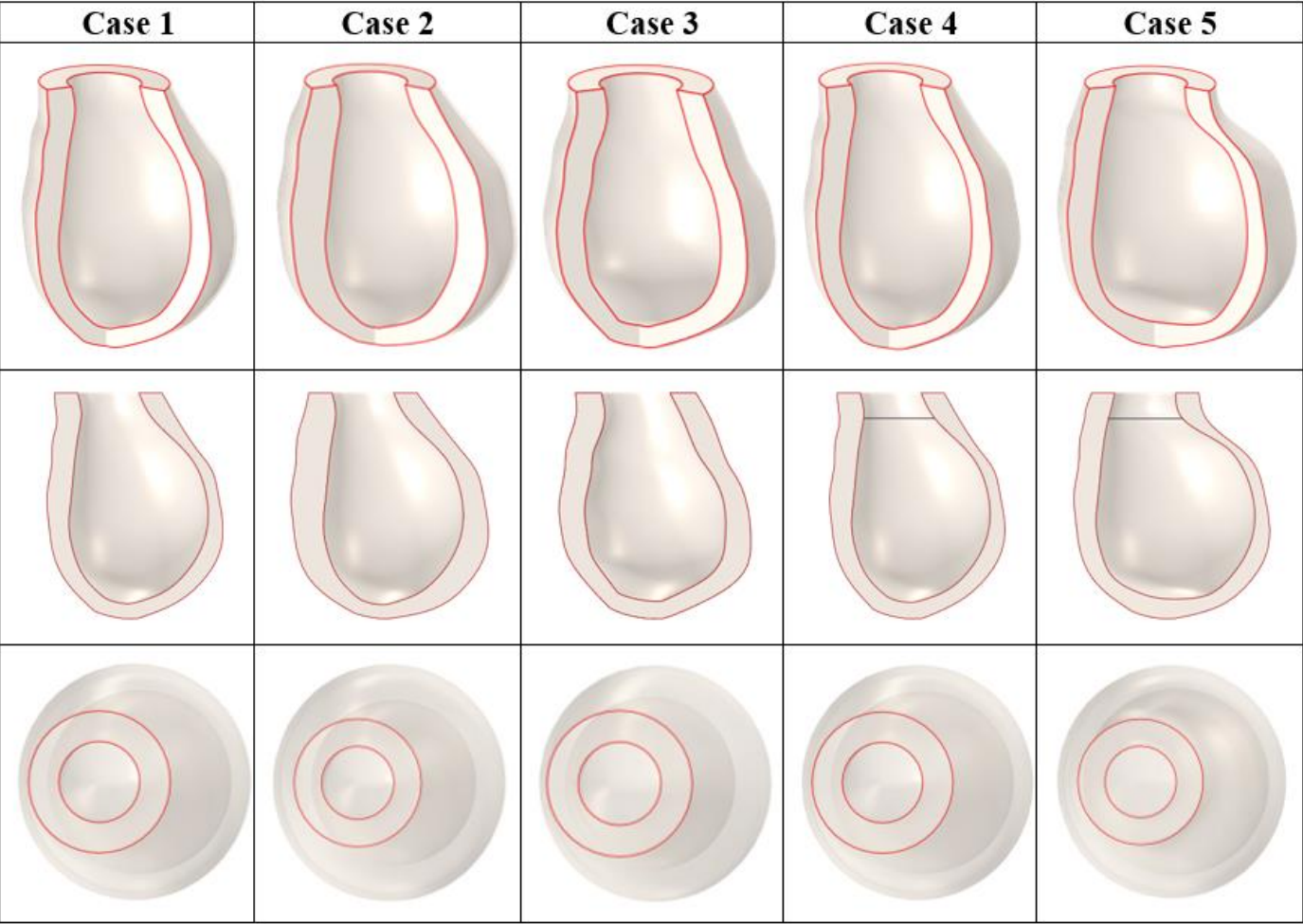
3: Построение контрольных эллипсов

4: Построение поверхности ЛЖ

5: Формирование криволинейной системы координат



Геометрическая модель левого желудочка



№	Height , mm	Thickness, mm			Radius, mm		
		Min	Max	Avg	Min	Max	Avg
0	80	3.36	9.96	4.58	21	37.5	31.2
1	73	3.06	10.32	4.57	21	37.5	31.1
2	75	3.11	10.38	4.53	21	37.5	31.2
3	77	3.23	10.39	4.58	21	37.5	31.2
4	79	3.3	10.29	4.59	21	37.5	31.2
5	82	3.09	10.19	4.62	21	37.5	31.2
6	85	3.26	10.15	4.64	21	37.5	31.2
7	89	3.137	10.37	4.67	21	37.5	31.2
8	80	3.31	9.88	4.22	21	36.5	30.5
9	80	3.29	9.88	4.3	21	36.7	30.6
10	80	3.19	10.02	4.41	21	37	30.9
11	80	3.16	10.03	4.48	21	37.2	31.0
12	80	3.24	10.07	4.69	21	37.8	31.5
13	80	3.27	10.05	4.86	21	38.2	31.8
14	80	2.81	10.11	4.96	21	38.5	32.0
15	80	3.21	10.11	4.55	21	37.2	31.3
16	80	3.33	10.11	4.57	21	38	31.2
17	80	3.31	10.11	4.57	21	37.2	31.2
18	80	3.18	9.979	4.58	21	38	31.1
19	80	3.57	10.11	4.6	21	37.8	31.1
20	80	2.91	10.11	4.58	21	37.5	31.1
21	80	3.13	10.12	4.6	21	37	31.1

Распределение волокон

$$\theta_{epi} = \theta_{epi}^{\max} \left(1 - Z/Z_{LV}^{apex}\right), \quad \theta_{endo} = \theta_{endo}^{\max} \left(1 - Z/Z_{LV}^{apex}\right) \quad (3)$$

$$\theta = \beta \theta_{endo} + (1 - \beta) \theta_{epi}, \quad \beta = D_{epi} / (D_{epi} + D_{endo}) \quad (4)$$

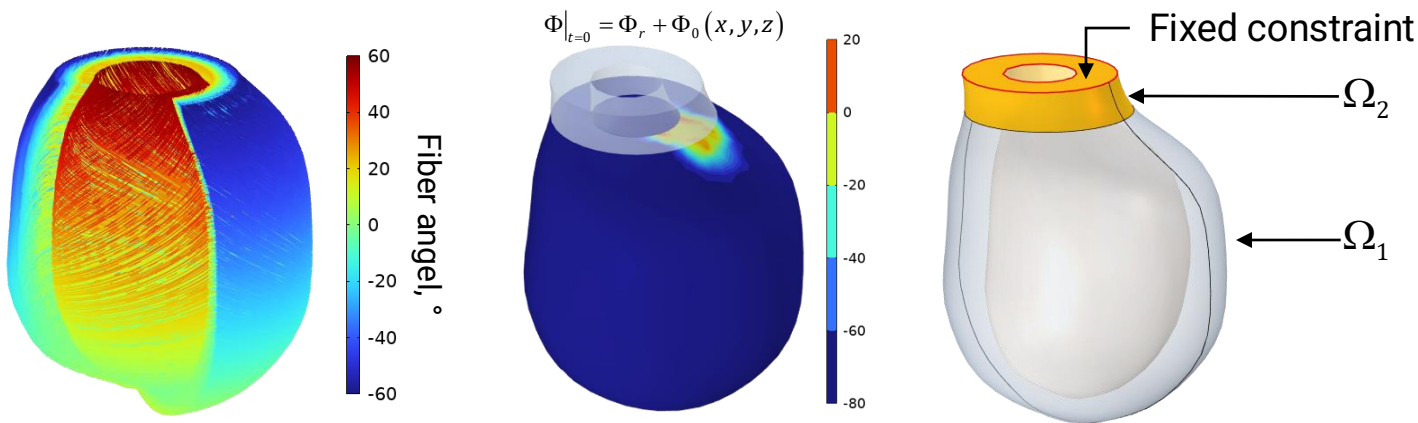
Электрофизиологическая постановка

$$\chi_m C_m \frac{\partial}{\partial t} \Phi + \nabla(-\mathbf{D} \nabla \Phi) + \chi_m I_{ion}(\Phi, F, r_i) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = \left(\gamma + \frac{\mu_1}{\mu_2 + \varphi} r \right) (-r - c\varphi(\varphi - b - 1)), \quad r \in \Omega_1 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \sigma_a}{\partial t} = \varepsilon(\Phi) [k(\Phi - \Phi_r) - \sigma_a], \quad \sigma_a \in \Omega_1 \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_a [\eta_1 (\bar{a} \otimes \bar{a}) + \eta_2 (\bar{s} \otimes \bar{s}) + \eta_3 (\bar{n} \otimes \bar{n})]. \quad (8)$$



$$\mathbf{D} = (d_{iso} C_m \chi_m) \mathbf{I} + (d_{ani} C_m \chi_m) \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0, \quad \Phi \in \Omega_1 \quad (9)$$

$$I_{ion} = C_m \frac{\beta_\varphi}{\beta_t} (\gamma_e^0 + \gamma_m^0), \quad \Phi = \varphi \beta_\varphi + \delta_\varphi, \quad t = \beta_t \tau \quad (10)$$

$$\gamma_e^0(\varphi, r) = c\varphi(\varphi - \alpha)(\varphi - 1) + r\varphi \quad (11)$$

$$\gamma_m^0(F) = \theta G_s (\lambda(F) - 1) (\varphi - \varphi_s) \quad (12)$$

$$\varepsilon(\Phi) = \varepsilon_0 + (\varepsilon_0 + \varepsilon_1) \exp(-\exp(-\zeta(\Phi - \Phi_t))) \quad (13)$$

– условие несжимаемости:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0, \quad (14)$$

– уравнение Навье-Стокса:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + \rho (\mathbf{u}_f \cdot \nabla) \mathbf{u}_f = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f, \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\kappa}, \quad (16)$$

– граничные условия:

$$\boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n} = -f_0 \mathbf{n} \quad (17)$$

$$\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_{ftr} \cdot \mathbf{n}. \quad (18)$$

– согласование взаимодействий на границе
жидкость-твердое тело:

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_f, \quad (19)$$

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_f, \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \hat{\mathbf{n}}_f. \quad (21)$$

– уравнение движения твердого тела:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s, \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_s + (\nabla \mathbf{u}_s)^T + (\nabla \mathbf{u}_s) \cdot (\nabla \mathbf{u}_s)^T) \quad (22)$$

– гиперупругая анизотропная модель:

$$W = \underbrace{\frac{1}{2} \mu (I_1 - 3)}_{\text{изотропная}} + \underbrace{\mu \log J_{el}}_{\text{объемная}} + \underbrace{\frac{1}{2} \lambda \log^2 J_{el} + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=1}^2 \left[\exp \{k_2 \bar{E}_\alpha^2\} - 1 \right]}_{\text{анизотропная}} \quad (23)$$

$$\bar{E}_\alpha = \kappa (\bar{I}_1 - 3) + (1 + 3\kappa) (\bar{I}_{4(\alpha\alpha)} - 1), \quad (24)$$

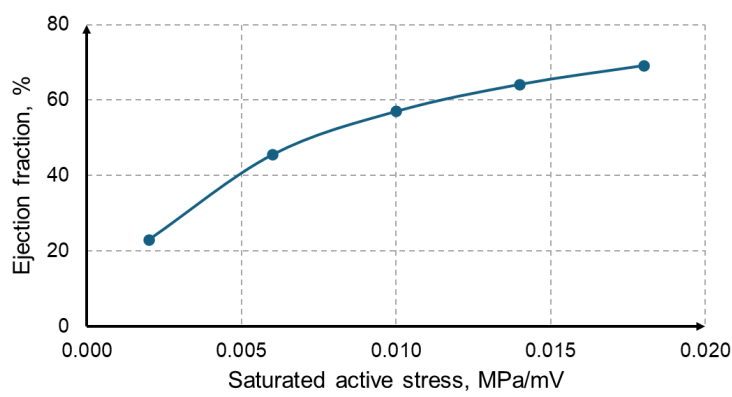
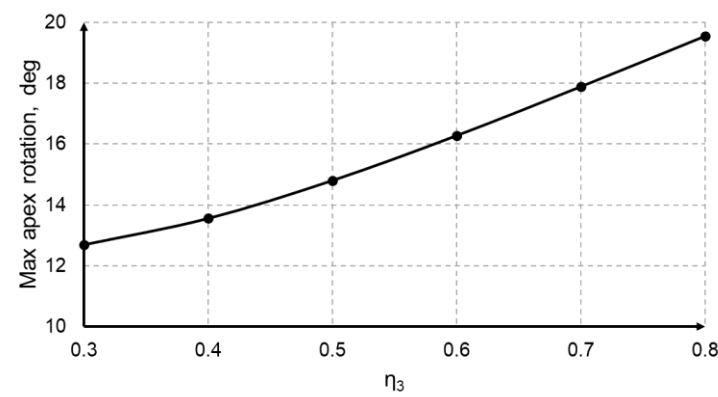
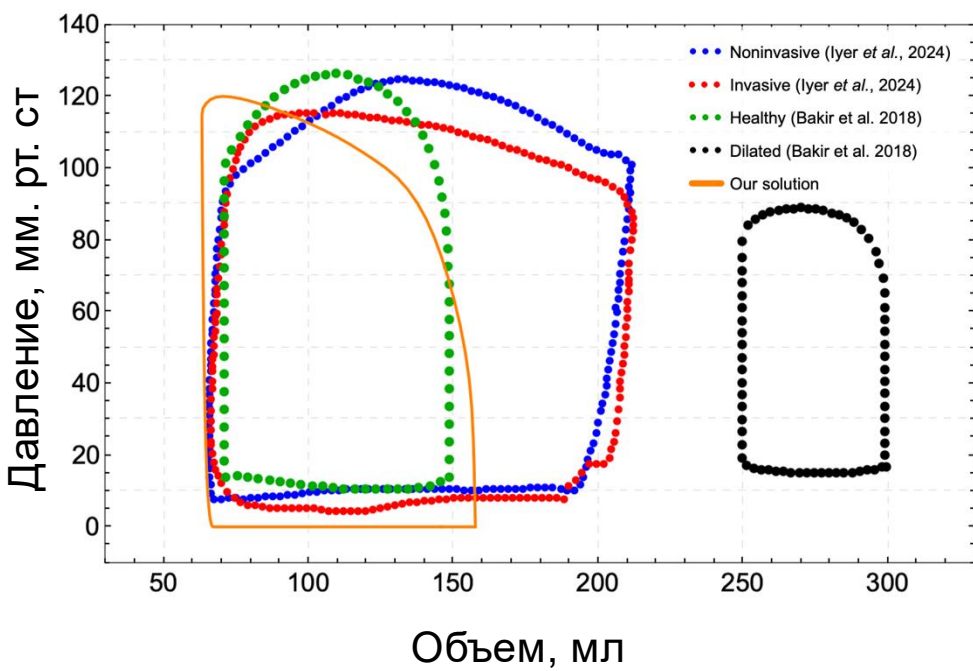
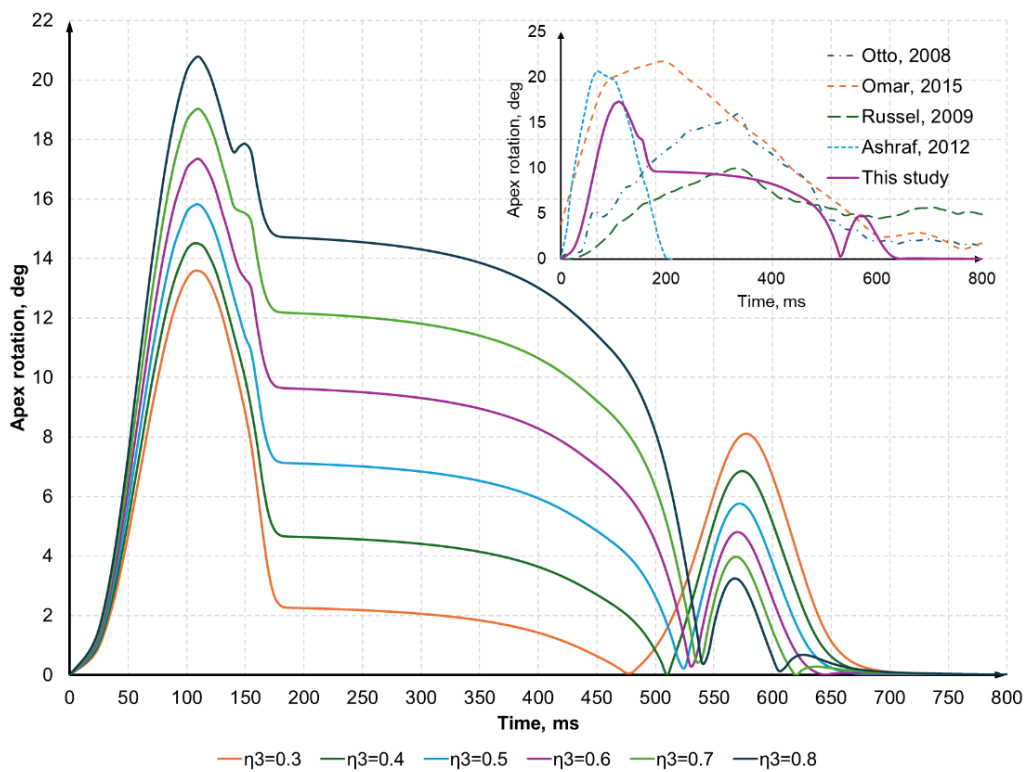
$$\bar{I}_1 = \hat{J}^{-2/3} \text{tr}(\hat{\mathbf{C}}), \quad \bar{I}_{4,1} = \hat{J}^{-2/3} \hat{\mathbf{g}}_{0,1} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{g}}_{0,1}, \quad \bar{I}_{4,2} = \hat{J}^{-2/3} \hat{\mathbf{g}}_{0,2} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{g}}_{0,2}, \quad (25)$$

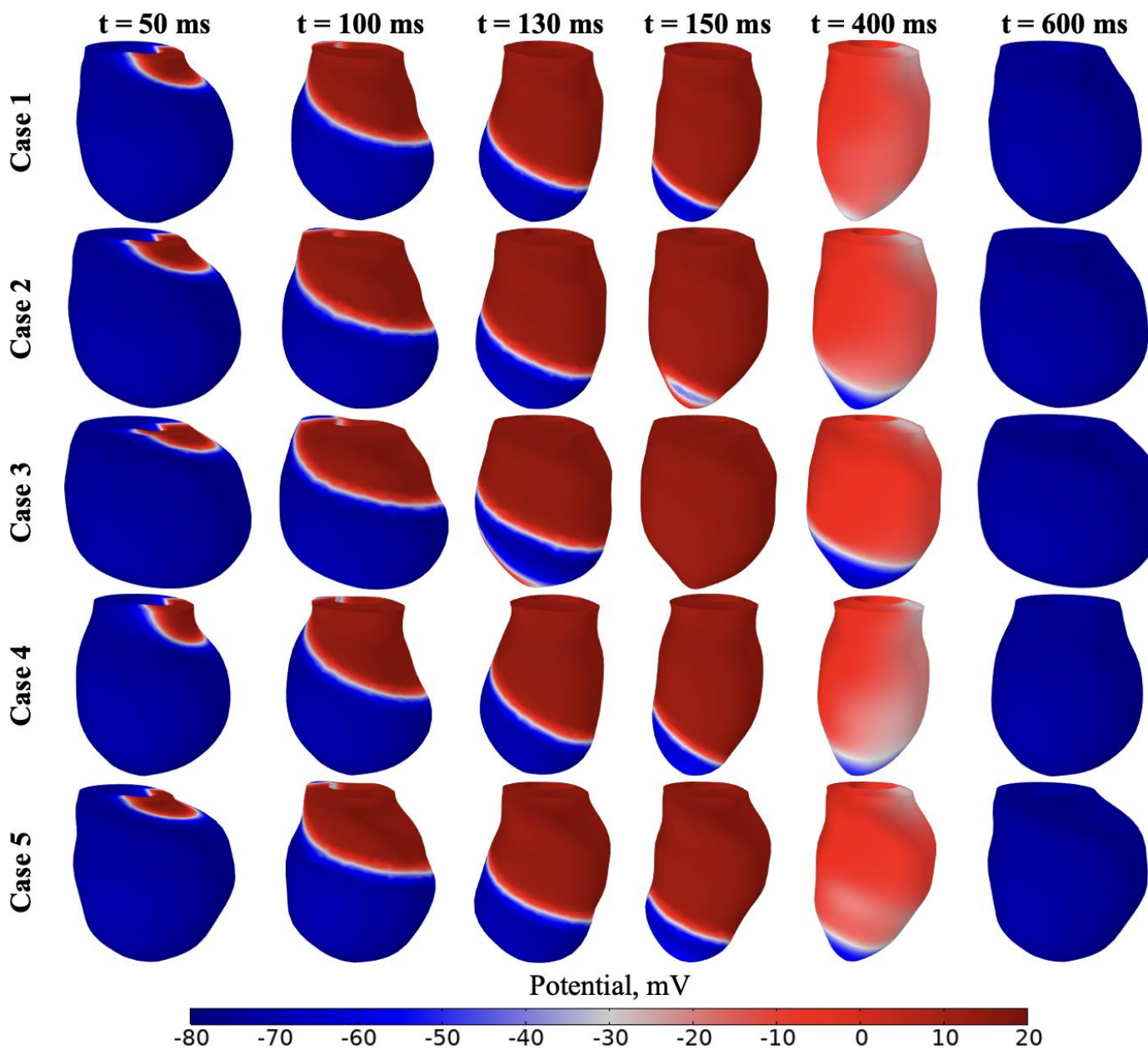
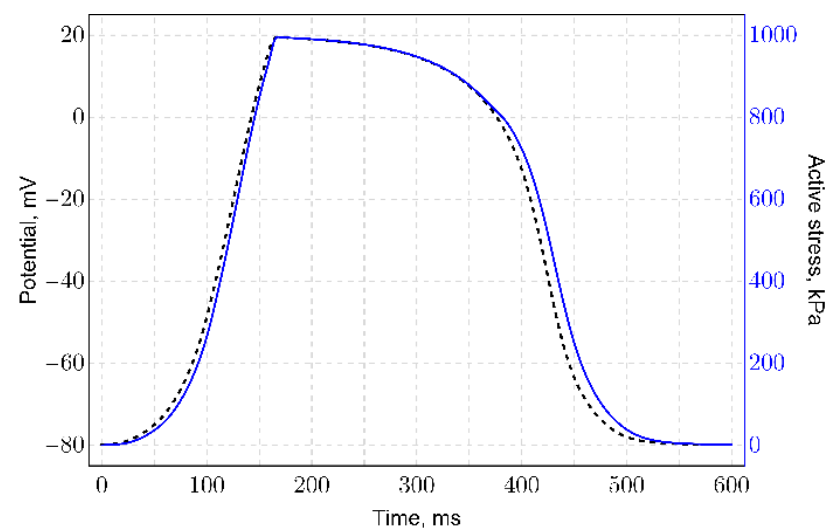
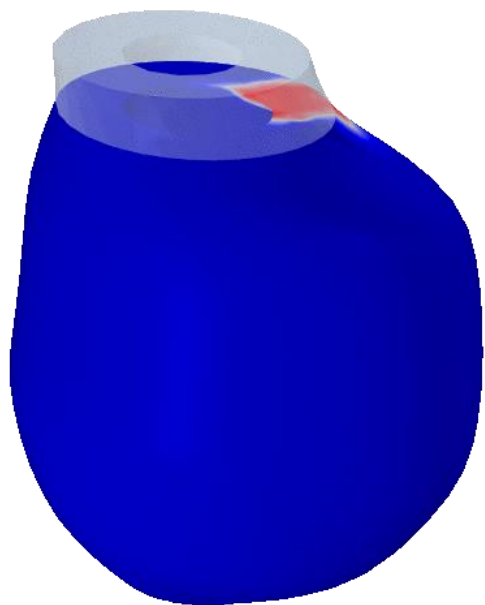
– результирующая сила, действующая на твердое тело:

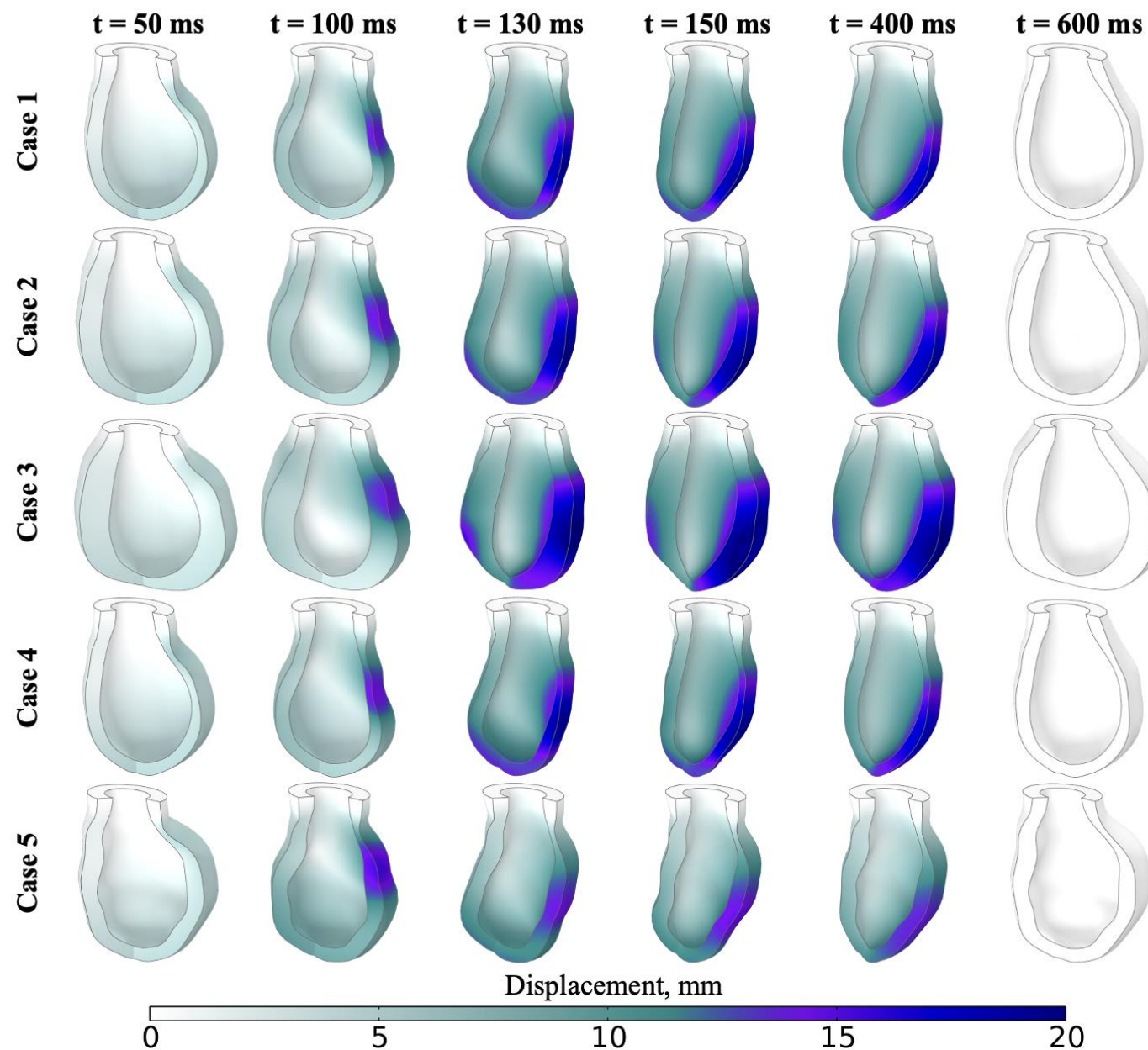
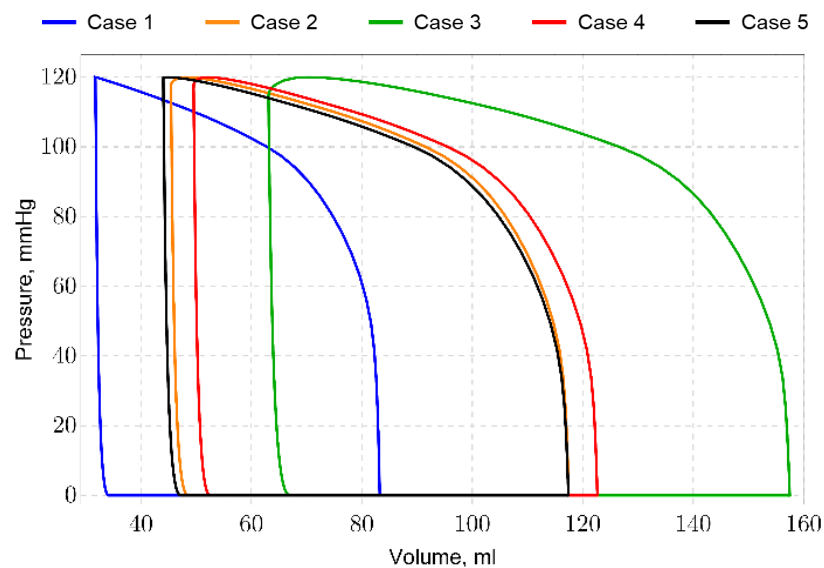
$$\mathbf{f} = \mathbf{n} \cdot \left\{ -p\mathbf{I} + \mu \left(\nabla \mathbf{u}_f + (\nabla \mathbf{u}_f)^T \right) \right\} \quad (26)$$

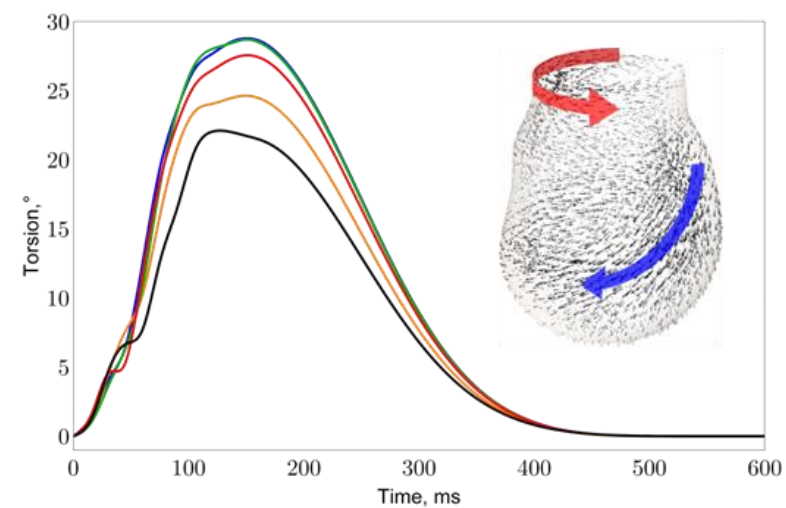
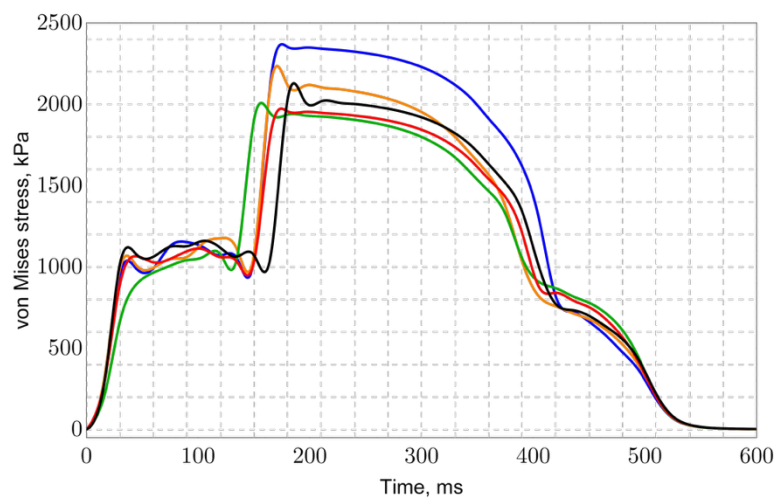
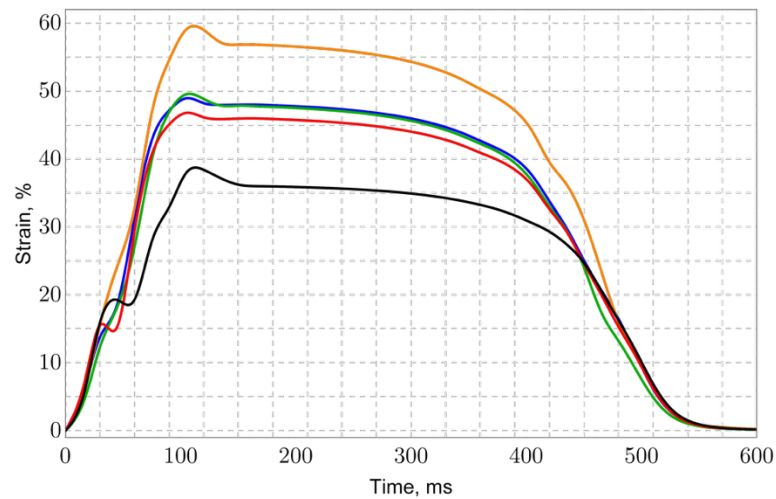
– пересчет силы из-за деформации сетки:

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \cdot \frac{dv}{dV} \quad (27)$$









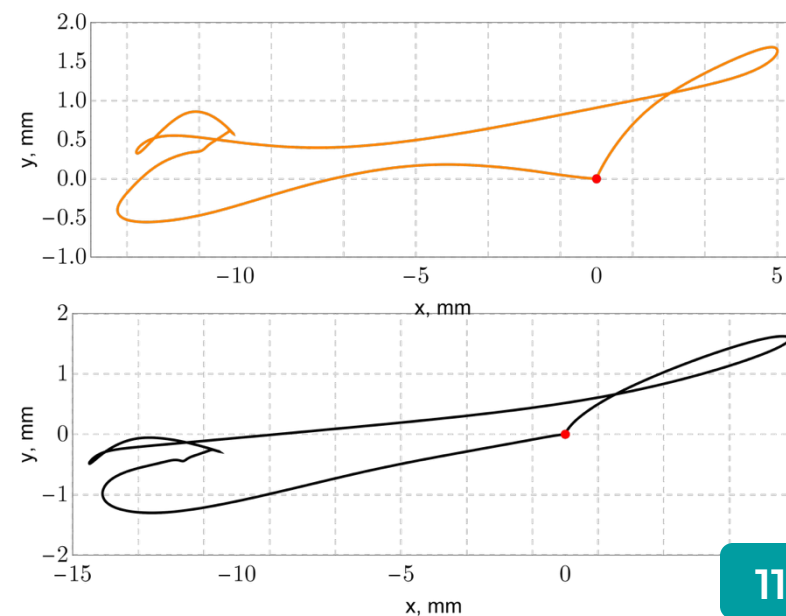
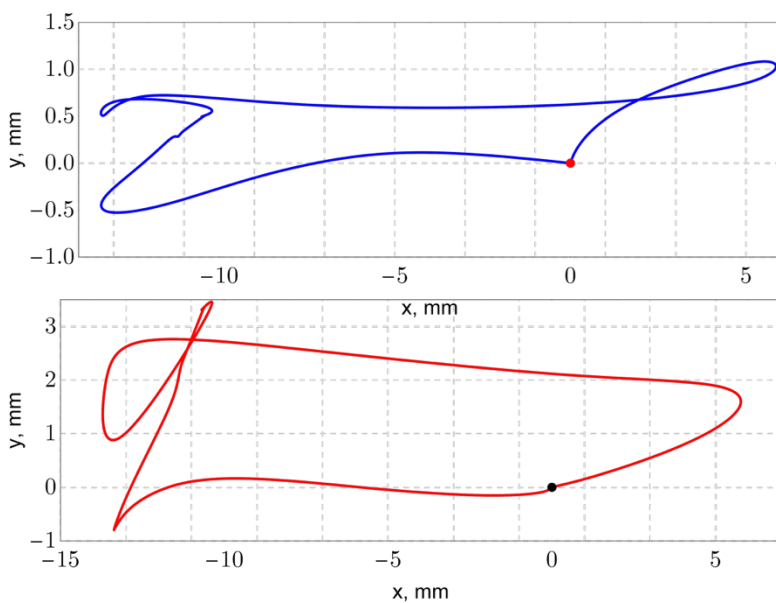
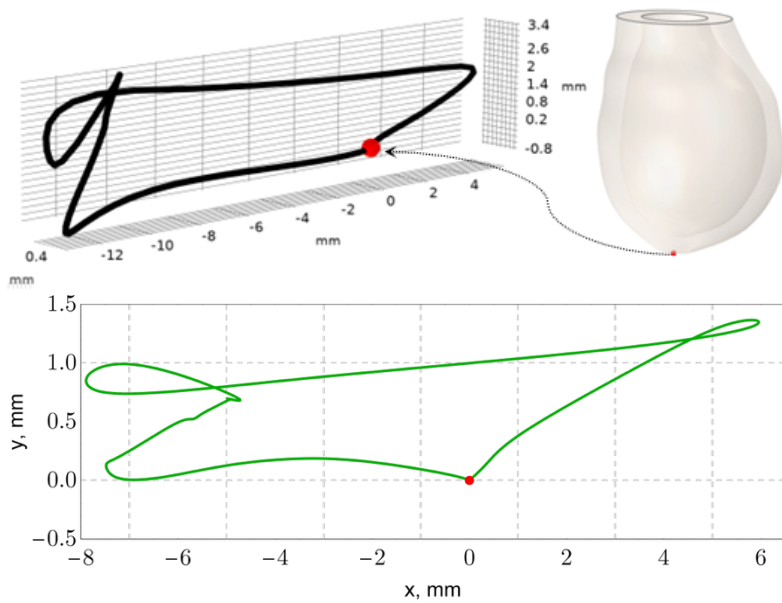
Case 1

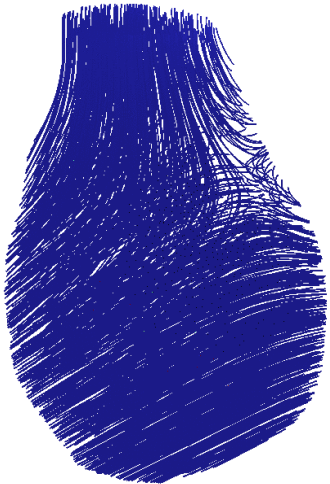
Case 2

Case 3

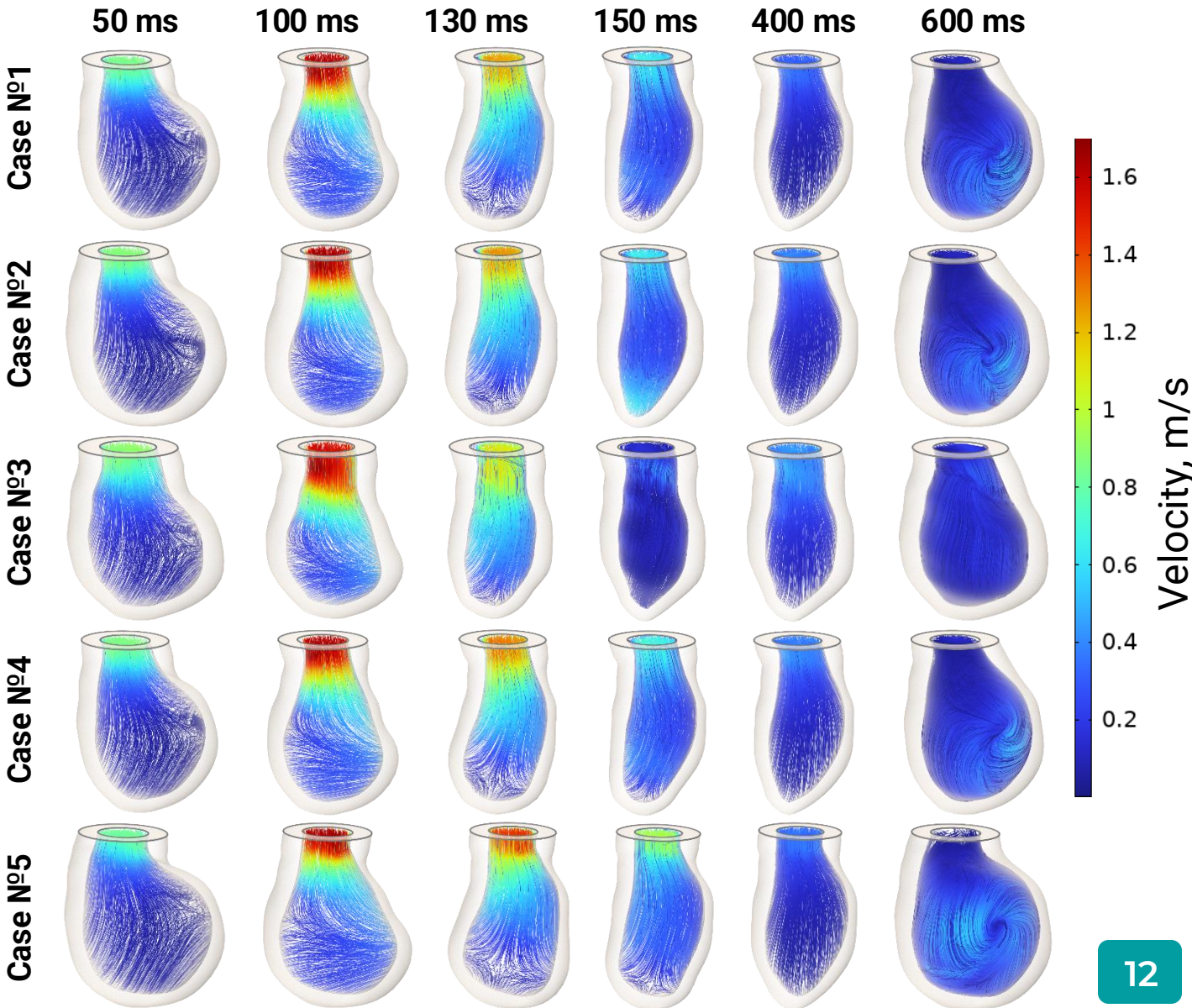
Case 4

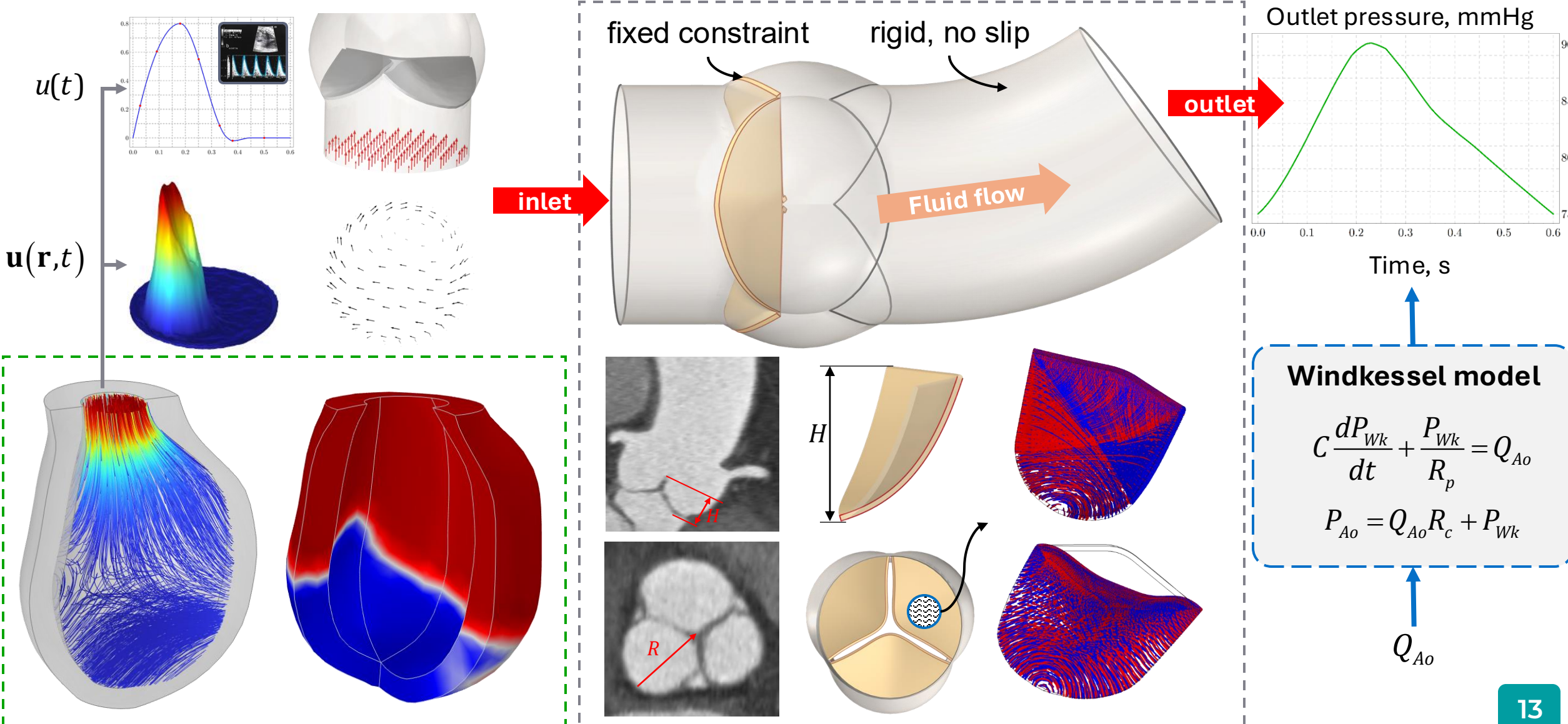
Case 5



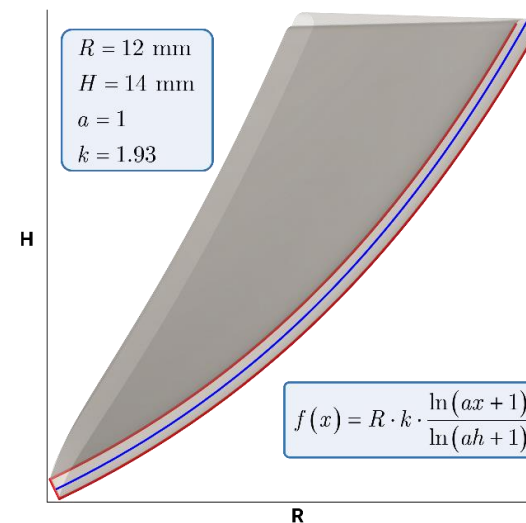
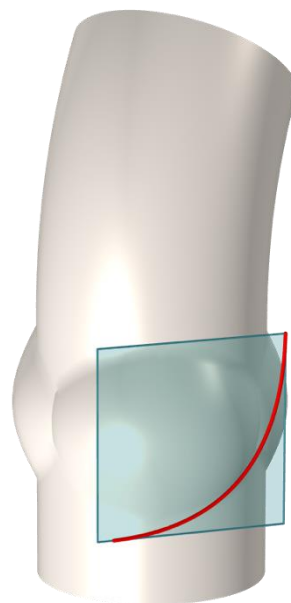
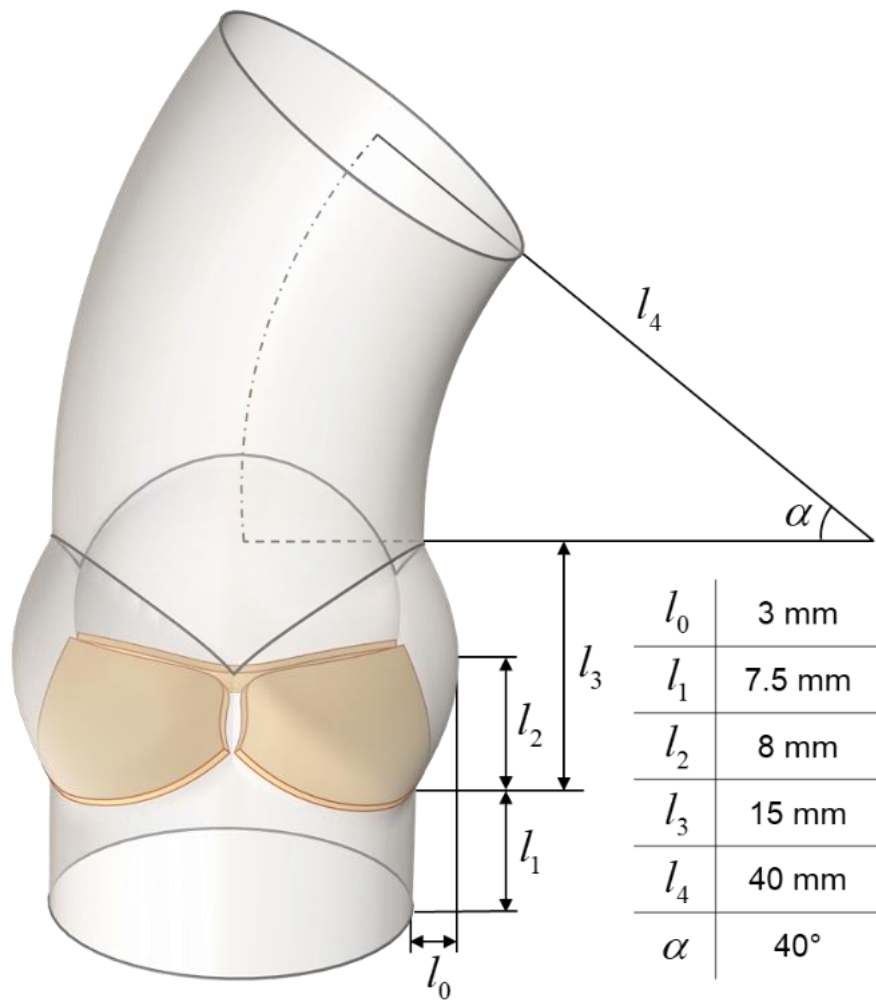


		Volume <i>mm³</i>	EF %	SV <i>mm³</i>	Height <i>mm</i>	LVID <i>mm</i>	Mass <i>g</i>
Case 1	D	117.3	–	–	77.6	54.4	144
	S	36.2	69.1	81.1	74.2		
Case 2	D	122.5	–	–	77.1	54.4	223.8
	S	36	70.6	86.5	74.8		
Case 3	D	83.2	–	–	80	50	140.4
	S	31.7	61.9	51,5	77.9		
Case 4	D	117,5	–	–	88.1	54.4	144.6
	S	45.4	61.3	72,1	84.6		
Case 5	D	157.5	–	–	87.6	62.4	164.1
	S	63.1	60	94.4	86.1		

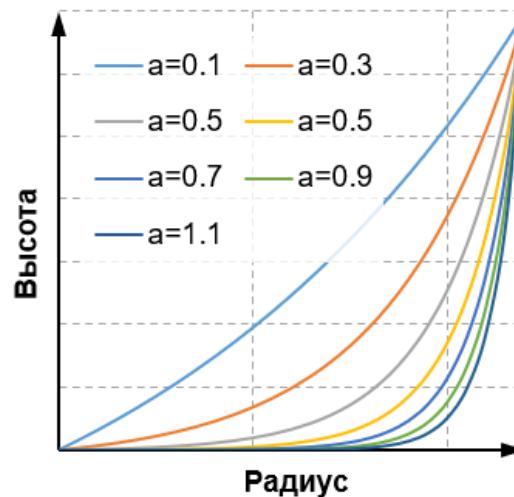




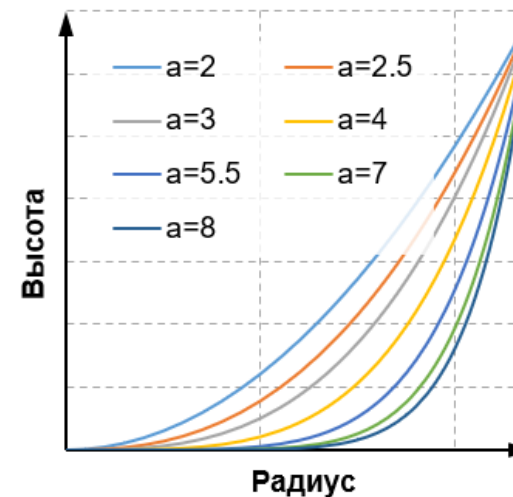
Геометрическая модель аортального клапана



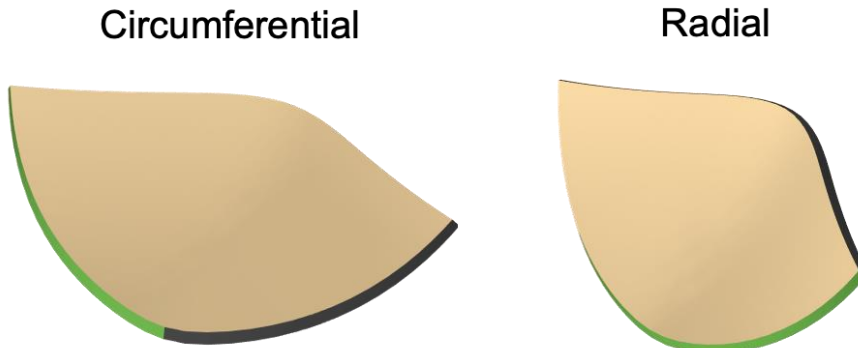
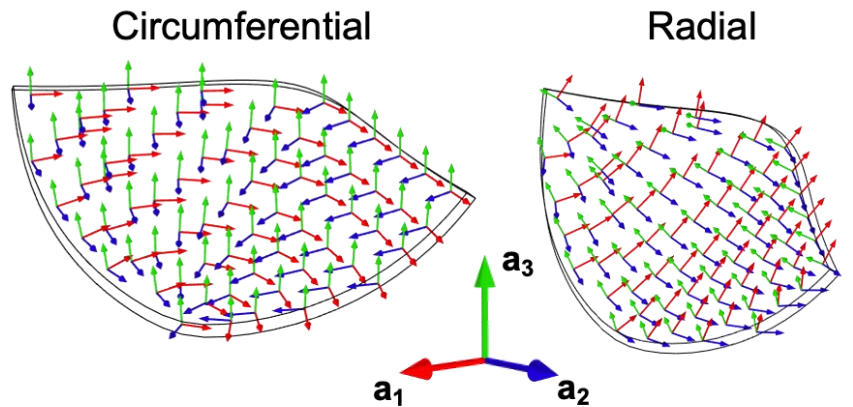
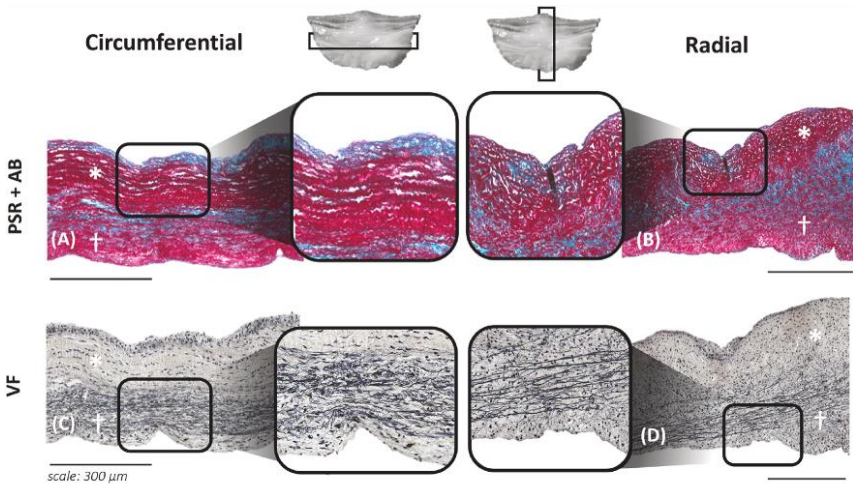
$$f(s) = R \cdot k \cdot \frac{\ln(as+1)}{\ln(ah+1)}$$



$$f(x) = H \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^a$$

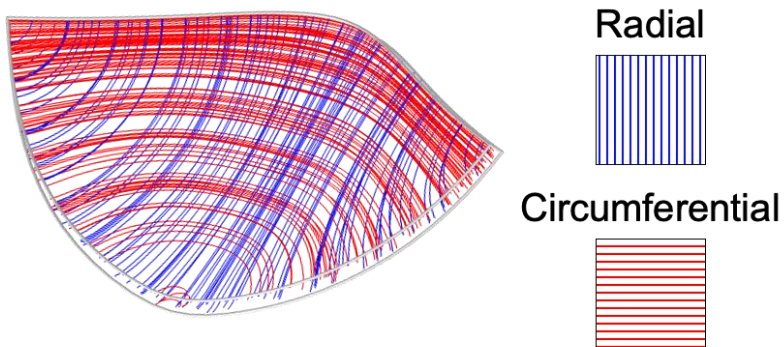


Архитектура волокон аортального клапана



— inlet

— outlet



$$\nabla \cdot (\nabla U) = 0 \quad (28)$$

$$\mathbf{e} = \frac{-\nabla U}{|\nabla U|} \quad (29)$$

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{e}}{|\mathbf{e}|} \quad (30)$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{z} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{a}_1)\mathbf{a}_1}{|\mathbf{z} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{a}_1)\mathbf{a}_1|} \quad (31)$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \quad (32)$$

–условие несжимаемости:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0, \quad (33)$$

– уравнение Навье-Стокса:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + \rho (\mathbf{u}_f \cdot \nabla) \mathbf{u}_f = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f, \quad \boldsymbol{\sigma}_f = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\kappa}, \quad (34)$$

– граничные условия:

$$\mathbf{v}_{in} = \mathbf{v}_{LVOT} \quad (35)$$

$$C \frac{dP_{Wk}}{dt} + \frac{P_{Wk}}{R_p} = Q_{Ao} \quad (36)$$

$$P_{Ao}(t) = Q_{Ao}R_c + P_{Wk} \quad (37)$$

$$p_{out} = P_{Ao}(t) \quad (38)$$

$$\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_{ftr} \cdot \mathbf{n}. \quad (39)$$

–согласование взаимодействий на границе
жидкость-твердое тело:

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_f, \quad \mathbf{v}_s = \mathbf{v}_f, \quad \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \hat{\mathbf{n}}_f. \quad (40)$$

–уравнение движения твердого тела:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s, \quad (41)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_s + (\nabla \mathbf{u}_s)^T + (\nabla \mathbf{u}_s) \cdot (\nabla \mathbf{u}_s)^T) \quad (42)$$

–гиперупругая анизотропная модель:

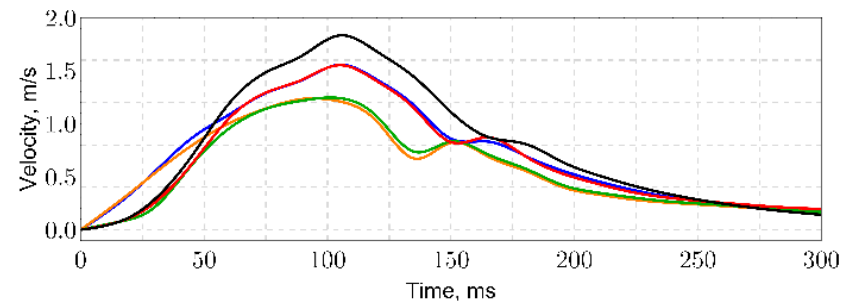
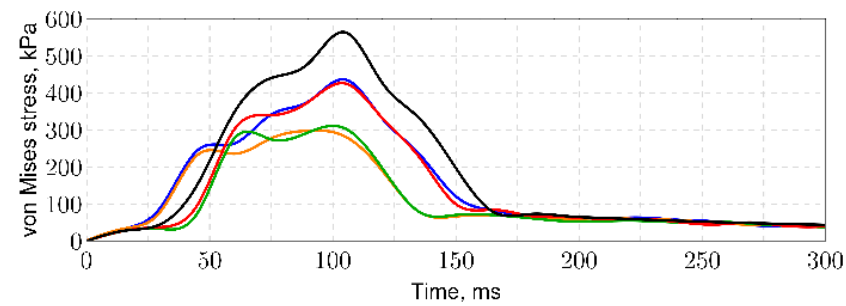
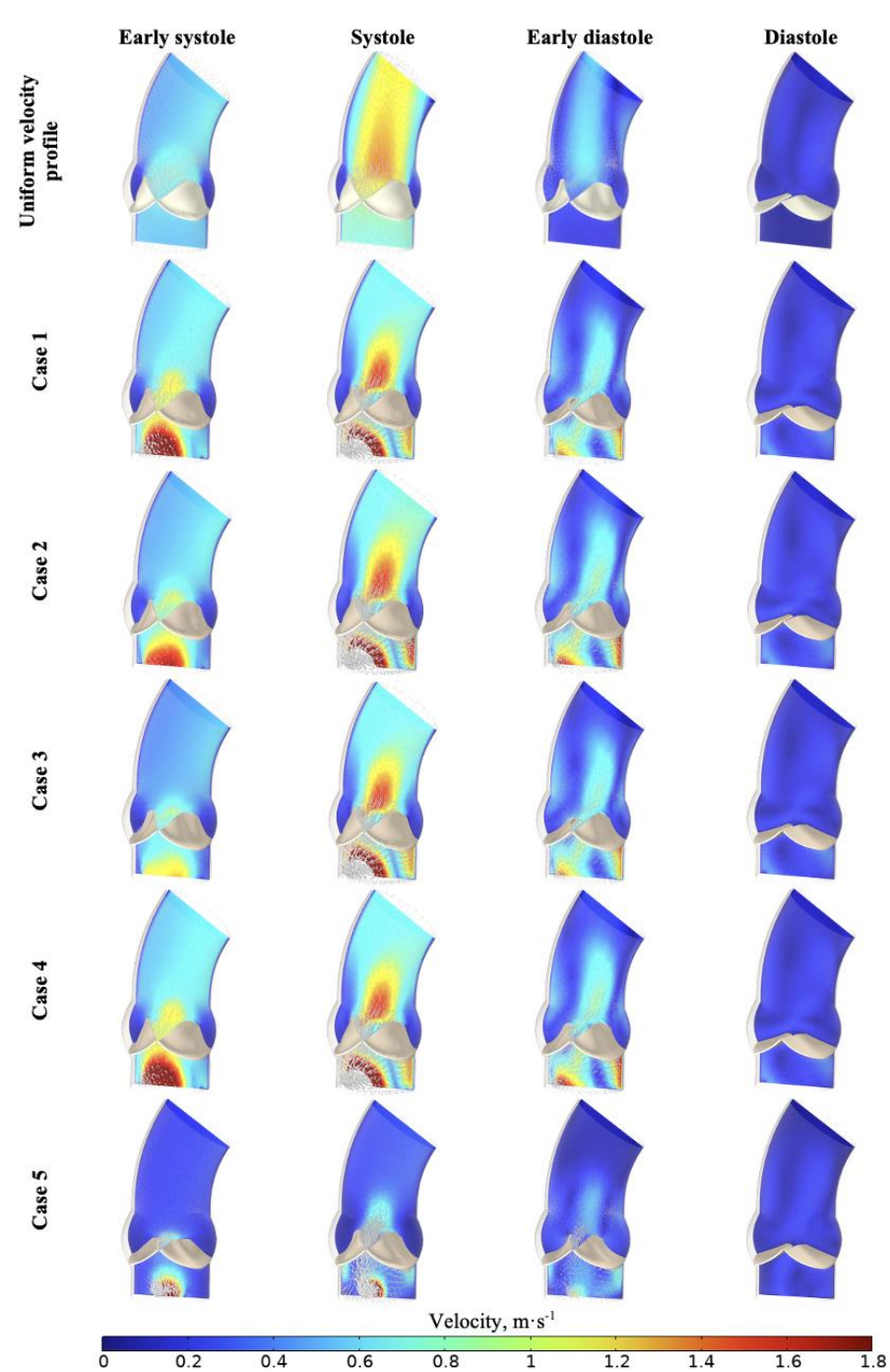
$$\boldsymbol{\sigma}_s = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad W = \underbrace{C_{10} \left\{ \exp \left[C_{01} (\bar{I}_1 - 3) \right] - 1 \right\}}_{\text{изотропная}} + \underbrace{\frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=1}^2 \left[\exp \left\{ k_2 \bar{E}_\alpha^2 \right\} - 1 \right]}_{\text{анизотропная}} \quad (43)$$

–результатирующая сила, действующая на твердое тело:

$$\mathbf{f} = \mathbf{n} \cdot \left\{ -p\mathbf{I} + \mu \left(\nabla \mathbf{u}_f + (\nabla \mathbf{u}_f)^T \right) \right\} \quad (44)$$

–пересчет силы из-за деформации сетки:

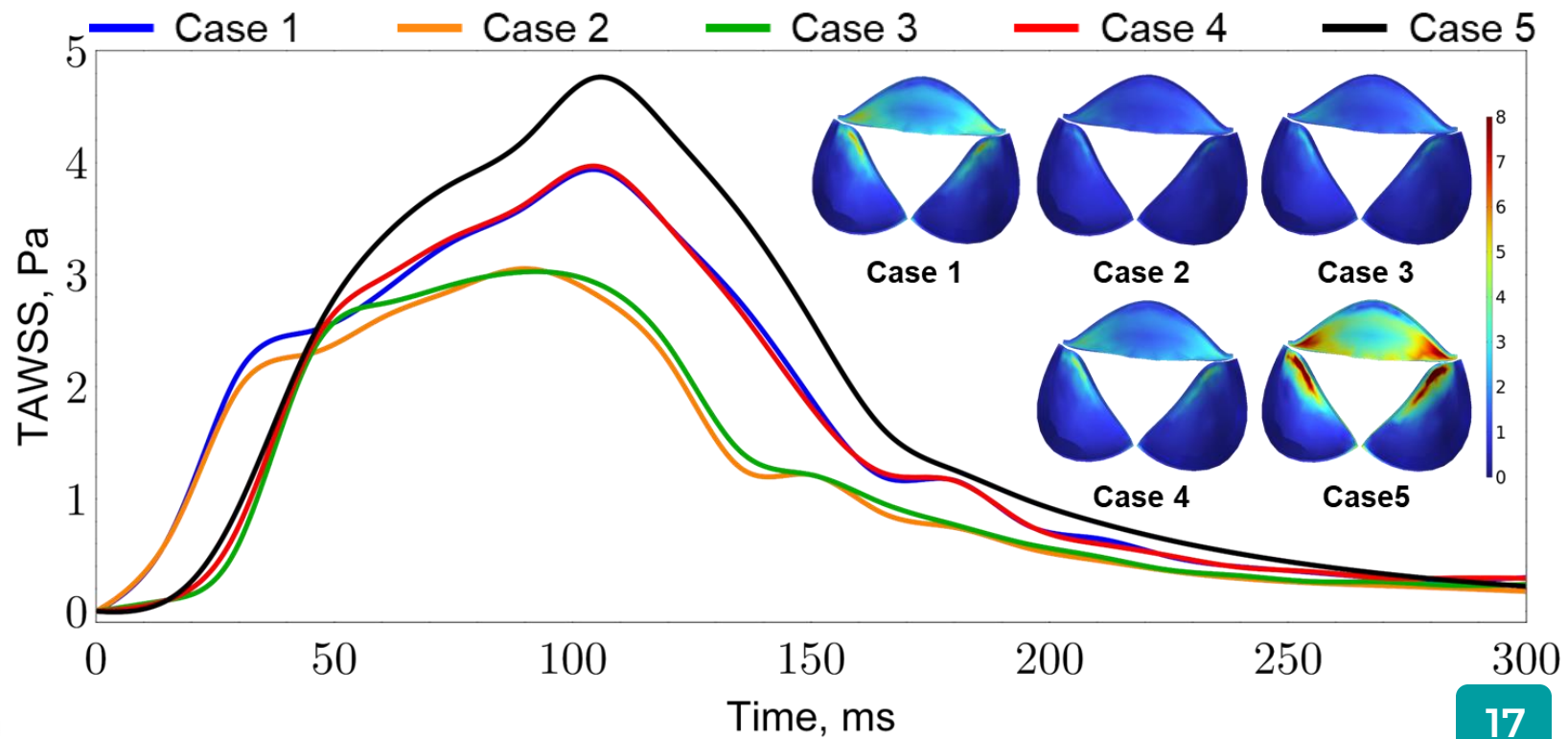
$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \cdot \frac{dv}{dV} \quad (45)$$



$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n}. \quad (46)$$

$$\mathbf{t}_s = \mathbf{t} - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (47)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_s = \frac{1}{T} \int_0^T |\mathbf{t}_s| dt. \quad (48)$$



- реализованы алгоритмы параметрической генерации геометрических моделей левого желудочка и аортального клапана
- предложена электрофизиологическая модель левого желудочка, описывающая его сокращение и расслабление на основе FSI-подхода и позволяющая рассчитывать систолический выброс
- реализована связь между моделью левого желудочка и моделью гемодинамики аортального клапана через граничные условия
- разработана и численно реализована математическая модель гемодинамики аортального клапана с учетом влияния граничных условий на входе

EFSI модель левого желудочка для численной оценки гемодинамики аортального клапана

Н.Е. Пиль, А.Г. Кучумов

Центр генетики и наук о жизни, НТУ Сириус
Лаборатория биожидкостей, ПНИПУ

e-mail: pil.ne@talantiuspeh.ru



@PIL_NIKITA

Параметр	Описание	Параметр	Описание
χ_m	Area to volume ratio, m^{-1}	F	Deformation gradient
C_m	Transmembrane capacitance per unit area, $F \cdot m^{-1}$	r	Internal variable
$\mathbf{D}$	Conductivity tensor, $S \cdot m^{-1}$	ϕ	Dimensionless electric potential
d_{ani}	Anisotropic conduction velocity, $mm^2 \cdot s^{-1}$	τ	Dimensionless time
d_{iso}	Isotropic conduction velocity, $mm^2 \cdot s^{-1}$	$\alpha, b, c, \gamma, \mu_1, \mu_2$	Aliev-Panfilov parameter
δ_ϕ, β_ϕ	Conversion factors, mV	$\lambda(F)$	Tension in fiber direction
ϕ_s	Resting potential of stretched-activated channels	θ	Activation parameter
β_t	Time scaling parameter, ms	t_a	Activation time, ms
k	Saturated active stress, $Pa \cdot mV^{-1}$	$\varepsilon_0, \varepsilon_1$	Rate constants of contraction, s^{-1}
τ_0, t_0, t_1	Time parameter, ms	Φ_r	Resting potential, mV
η_1, η_2, η_3	Active stress scaling	ζ	Transition rate, mV^{-1}

