ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2017, том 53, № 7, с. 935–942

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63+517.958:539.3

# О КОМПАКТНЫХ ФОРМУЛАХ РАСЧЁТА ДЕФОРМАЦИЙ МЯГКИХ БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЕЙ

© 2017 г. Ю. В. Василевский, В. Ю. Саламатова, А. В. Лозовский

Описывается метод приближённого решения задач нелинейной теории упругости в рамках конечных деформаций для случая гиперупругих изотропных материалов. Данный метод позволяет аналитически записать разрешающие уравнения метода конечных элементов, что приводит к уменьшению объёма вычислений и простоте реализации. Предложенный подход реализован для нескольких видов гиперупругих материалов, используемых для описания механического поведения мягких биологических тканей.

DOI: 10.1134/S037406411707007X

**1. Введение.** Роль математического моделирования при решении различных биомедицинских задач становится всё значимее в последние годы. Примерами могут служить предсказательное моделирование различных видов хирургических вмешательств и развитие телехирургии, при которой операция проводится с помощью робототехники. Корректное описание механического поведения мягких биологических тканей методами математического моделирования является одним из ключевых элементов успешного развития указанного направления в медицине.

Развитие минимально инвазивной хирургии послужило первым толчком к развитию методов моделирования деформаций мягких тканей [1–3]. В частности, это было вызвано разработкой хирургических симуляторов для обучения хирургов [4]. Поскольку используемые методы должны были давать результаты расчёта в режиме реального времени, то для них выбирались упрощённые модели такие, как линейные модели или модели, состоящие из точечных масс, соединённых пружинками. Однако, хотя указанные модели и обладали значительной простотой с точки зрения реализации, они не описывали корректно механическое поведение мягких тканей.

Согласно экспериментальным данным, механическое поведение мягких тканей крайне нелинейно, что приводит к необходимости решения задач нелинейной упругости с учётом конечных (больших) деформаций. В работе [5] предложен подход для моделирования деформации нелинейных мембран из материала Сен-Венана–Кирхгофа (одна из самых простых нелинейных моделей) в виде набора нелинейных пружин, что более эффективно с точки зрения реализации и объёма вычислений, чем общепринятый подход. В работе [5] предложено также использовать интерполяционные свойства барицентрических координат и принцип минимума потенциальной энергии, что в случае линейных треугольных конечных элементов для материала Сен-Венана–Кирхгофа позволило получить все необходимые формулы в аналитическом и компактном представлении.

Концепция, предложенная в работе [5], может быть применена ко всему классу изотропных гиперупругих материалов, которые могут быть использованы для описания нелинейного поведения мягких биологических тканей. Настоящая работа посвящена разработке алгоритма приближённого решения задач нелинейной теории упругости для случая конечных деформаций гиперупругих изотропных материалов. Как и в случае материала Сен-Венана–Кирхгофа, получено аналитическое и компактное представление всех необходимых уравнений, что позволяет достаточно просто реализовывать любые определяющие соотношения для гиперупругого изотропного материала. Это может стать удобным инструментом при разработке определяющих соотношений мягких тканей и решении обратных задач при исследовании механических свойств биологических тканей. Хотя все задачи, рассмотренные в данной работе, даны в двумерной постановке, но предложенный подход аналогичным образом реализуется и в трёхмерном случае.

**2. Определяющие соотношения для мягких тканей.** Рассмотрим область $\Omega^s(t)\subset\mathbb{R}^2$, занимаемую упругим телом в момент времени $t$. Обозначим область в начальный момент времени через $\Omega_s = \Omega^s(0)$.

Деформация упругого тела $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ определяется как вектор-функция

$$\varphi \ : \ \Omega_s \times [0, t] \to \Omega^s(t),$$

при этом соответствующие перемещения имеют вид $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) := \varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$. Определим градиент деформации равенством $\mathbf{F} := \partial\varphi/\partial\mathbf{X} = \mathbb{I} + \nabla_0\mathbf{u}$, где $\mathbb{I}$ – единичная матрица, $\nabla_0 := \partial/\partial\mathbf{X}$. Также обозначим $J := \det(\mathbf{F})$, $\nabla := \partial/\partial\mathbf{x}$. В качестве меры деформации введём правый тензор деформации Коши–Грина $\mathbb{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{т}}\mathbf{F}$.

Механическое поведение мягких биологических тканей крайне нелинейно [6]. Для его описания, как правило, используется модель гиперупругого материала в рамках конечных деформаций, при этом достаточно часто используется предположение об изотропности материала [7, 8]. Далее будем рассматривать гиперупругий изотропный материал.

По определению гиперупругого материала существует такой упругий потенциал $\psi(\mathbf{F})$, что тензор напряжений Коши $\sigma$ имеет вид [9, с. 117]

$$\sigma = \frac{1}{J}\frac{\partial\psi(\mathbf{F})}{\partial\mathbf{F}}\mathbf{F}^{\mathrm{т}}.$$

При этом потенциальная энергия упругого тела $U$ выражается через упругий потенциал равенством

$$U = \int\limits_{\Omega_s} \psi(\mathbf{F})\, d\Omega = \int\limits_{\Omega^s(t)} J^{-1}\psi(\mathbf{F})\, d\Omega. \tag{2.1}$$

Достаточно часто упругий потенциал $\psi$ выражают в виде функции от правого тензора деформации Коши–Грина $\mathbb{C}$, в этом случае

$$\sigma = \frac{2}{J}\mathbf{F}\frac{\partial\psi(\mathbb{C})}{\partial\mathbb{C}}\mathbf{F}^{\mathrm{т}}.$$

В силу изотропности материала упругий потенциал $\psi(\mathbb{C})$ является некоторой функцией инвариантов тензора $\mathbb{C}$ [10], т.е. $\psi(\mathbb{C}) = W_e(I_1, J)$, где $I_1 = \operatorname{tr}(\mathbb{C})$.

На настоящий момент предложено большое разнообразие форм упругих потенциалов, которые используются для описания механического поведения мягких тканей. Существует ряд работ, в которых исследуются достоинства и недостатки некоторых видов определяющих соотношений для конкретных мягких биологических тканей (например, для мышечной ткани [7], для тканей мозга и жировой ткани [11], для печени [13]).

Отметим некоторые из определяющих соотношений для изотропных материалов, которые достаточно часто используются для описания механического поведения мягких биологических тканей и будут использованы при дальнейшем анализе. Одна из самых простых и наиболее часто используемых является неогуковская модель

$$W_{\mathrm{NH}} = \frac{\mu}{2}(I_1 - 2) + \frac{\mu}{2}(d(J^2 - 1) - 2(d+1)(J-1)). \tag{2.2}$$

Например, неогуковская модель была использована для описания механического поведения почки и печени [8] в случае хирургического симулятора. Однако неогуковская модель плохо работает при средних и больших уровнях деформаций [7]. Модель Гента позволяет описать нелинейное поведение кривой деформирования при больших уровнях деформации и может быть использована для мягких тканей, в структуре которых присутствуют упрочняющие волокна (например, артериальная стенка [13, 14])

$$W_{\mathrm{Gent}} = -\frac{\mu}{2}J_m \ln\left(1 - \frac{I_1 - 2}{J_m}\right) + \frac{\mu}{2}(d(J^2 - 1) - 2(d+1)(J-1)). \tag{2.3}$$

Модель Еоха хорошо себя зарекомендовала для описания поведения различных мягких тканей [7], для неё

$$W_{\text{Yeoh}} = \sum_{i=1}^{3} c_i \left(\frac{I_1}{J} - 2\right)^i + \frac{d}{2}(J-1)^2. \tag{2.4}$$

Здесь и далее $\mu, d, J_m, c_i$ – константы материала.

**3. Уравнения равновесия** упругого тела в дифференциальной формулировке имеют вид

$$\operatorname{div}\sigma + \mathbf{b} = 0 \quad \text{в области} \ \ \Omega^s(t), \tag{3.1}$$

где $\mathbf{b}$ – объёмная плотность массовых сил.

Пусть $\partial\Omega^s(t) = \Gamma_u(t)\bigcup\Gamma_t(t)$, где $\Gamma_u(t) = \overline{\Gamma}_u(t)$. Рассмотрим смешанные граничные условия

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{на} \ \ \Gamma_u(t), \quad \sigma\mathbf{n} = \mathbf{t_0} \quad \text{на} \ \ \Gamma_t(t), \tag{3.2}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega^s(t)$; $\bar{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{t_0}$ – заданные перемещения и усилия на границах $\Gamma_u(t)$ и $\Gamma_t(t)$ соответственно.

Конечно-элементный подход к приближённому решению уравнений (3.1), (3.2) основан на слабой постановке [15, с. 47]: найти $\mathbf{u} \in \tilde{H}^1(\Omega^s(t))$ такое, что

$$\int\limits_{\Gamma_t(t)} \mathbf{t_0}\cdot\delta\mathbf{v}\,dS + \int\limits_{\Omega^s(t)} \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{v}\,d\Omega - \int\limits_{\Omega^s(t)} \sigma : \nabla\delta\mathbf{v}\,d\Omega = 0 \quad \text{для любого} \ \ \delta\mathbf{v} \in \tilde{H}^1_0(\Omega^s(t)), \tag{3.3}$$

где

$$\tilde{H}^1(\Omega^s(t)) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega^s(t)) : \mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}} \ \ \text{на} \ \ \Gamma_u(t)\},$$
$$\tilde{H}^1_0(\Omega^s(t)) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega^s(t)) : \mathbf{v} = \mathbf{0} \ \ \text{на} \ \ \Gamma_u(t)\}.$$

С другой стороны, поскольку для гиперупругих материалов существует упругий потенциал, задачу (3.3) можно записать в виде принципа виртуальной работы [16, с. 177]: найти такое $\mathbf{u} \in \tilde{H}^1(\Omega^s(t))$, что

$$\delta W - \delta U = 0, \tag{3.4}$$

где изменение внутренней энергии

$$\delta U = \int\limits_{\Omega^s(t)} \sigma : \nabla\,\delta\mathbf{u}\,dS$$

обеспечено работой внешних сил, приложенных к границе и к объёму тела

$$\delta W = \int\limits_{\Gamma_t(t)} \mathbf{t_0}\cdot\delta\mathbf{u}\,dS + \int\limits_{\Omega^s(t)} \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}\,d\Omega.$$

Учитывая представление (2.1), уравнение (3.4) можно записать в виде

$$\delta W - \frac{\partial}{\partial\mathbf{u}}\Bigg(\int\limits_{\Omega_s} \psi(\mathbf{F})\,d\Omega\Bigg)\cdot\delta\mathbf{u} = 0. \tag{3.5}$$

Таким образом, каждая из постановок (3.1), (3.2), (3.3), (3.5) может служить основой для дальнейшей дискретизации. При этом конечно-элементные решения задачи (3.3) и задачи (3.5) будут совпадать [5].

**4. Конечно-элементная дискретизация уравнений равновесия.** Рассмотрим простейший метод конечных элементов, в котором поле перемещений приближается непрерывными функциями, линейными на каждом треугольнике некоторой заданной конформной триангуляции области $\Omega_s$.

В случае использования коммерческих конечно-элементных пакетов стандартным подходом является линеаризация уравнений (3.3) и вычисление следующего интеграла [9, с. 178]

$$\int\limits_{\Omega^s(t)} \nabla\delta\mathbf{v} : c : \varepsilon \, d\Omega,$$

где

$$c := \frac{4}{J}\mathbf{F}\otimes\mathbf{F} : \frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbb{C}\partial\mathbb{C}} : \mathbf{F}^{\mathrm{т}}\otimes\mathbf{F}^{\mathrm{т}}, \quad \varepsilon := \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\mathrm{т}}).$$

Тензор $c$ называется тензором упругости, его задание является обязательным при использовании новых определяющих соотношений в случае решения задач деформирования. Многие определяющие соотношения, которые предлагаются для описания поведения мягких тканей, требуют написания специальных подпрограмм для определения тензора $c$.

В случае самостоятельной реализации метода конечных элементов удобно воспользоваться барицентрическими координатами. Пусть треугольник $T_P$ расчётной сетки с вершинами $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ переходит в результате деформации $\varphi(\mathbf{X}, t)$ в треугольник $T_Q$ с вершинами $\mathbf{Q_1}, \mathbf{Q_2}, \mathbf{Q_3}$. Обозначим площадь треугольника до деформации $(T_P)$ через $A_p$, площадь треугольника после деформации $(T_Q)$ через $A_q$, тогда $J = A_q/A_p$.

Пусть $\lambda_1(\mathbf{X}), \lambda_2(\mathbf{X}), \lambda_3(\mathbf{X})$ – барицентрические координаты точки $\mathbf{X}$, тогда координаты любой точки треугольника до деформации $\mathbf{X} \in T_P$ и соответствующей точки треугольника после деформации $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) \in T_Q$ можно представить в виде

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\mathbf{X})\mathbf{P}_i, \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\mathbf{X})\mathbf{Q}_i, \tag{4.1}$$

и перемещение $\mathbf{u}$ точки $\mathbf{X}$ равно

$$\mathbf{u} := \mathbf{x} - \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\mathbf{X})(\mathbf{Q}_i - \mathbf{P}_i) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\mathbf{X})\mathbf{u}_i, \tag{4.2}$$

где $\mathbf{u}_i$ – перемещение узла $\mathbf{P}_i$. Интерполяционные свойства барицентрических координат обеспечивают простоту выражений (4.1), (4.2).

По определению градиент деформации $\mathbf{F} = \partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X}$, тогда, используя равенства (4.1), получаем, что

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{Q}_i \otimes \mathbf{D}_i, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} := (a_1, a_2)^{\mathrm{т}}(b_1, b_2)$, $\mathbf{D}_i := \partial\lambda_i/\partial\mathbf{X}$, т.е. векторы $\mathbf{D}_i$ полностью определяются геометрией треугольника $T_P$ :

$$\mathbf{D}_i = \frac{1}{2A_p}(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_{i+2})^{\perp}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь и далее приняты обозначения $\mathbf{P}_4 := \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_5 := \mathbf{P}_2$, $\mathbf{X}^{\perp} := (X_2, -X_1)^{\mathrm{т}}$, если $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{т}}$.

Используя равенство (4.3), получаем следующие элементарные выражения:

$$\mathbb{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{т}}\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} (\mathbf{Q_i}\cdot\mathbf{Q_j})\mathbf{D_i}\otimes\mathbf{D_j}$$

для правого тензора деформаций Коши–Грина и

$$I_1 = \mathrm{tr}(\mathbb{C}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} (\mathbf{Q_i}\cdot\mathbf{Q_j})(\mathbf{D_i}\cdot\mathbf{D_j}) \tag{4.4}$$

для первого инварианта тензора $\mathbb{C}$. Поскольку рассматриваем линейные базисные функции, то значение упругого потенциала $\psi(\mathbf{F})$ постоянно на треугольнике, и вклад $U_p$ треугольника $T_P$ во внутреннюю энергию (энергия деформации треугольника) согласно равенству (2.1) будет равен

$$U_p = A_p \psi(\mathbf{G}),$$

где $\mathbf{G}$ – любая точка треугольника $T_P$.

Теперь мы можем использовать постановки (3.3) или (3.5) для приближённого решения задачи деформации. Принципиальным отличием конечно-элементного решения для задач (3.3) и (3.5) является только вычисление интегралов, связанных с внутренней энергией. Интегралы, связанные с работой внешних сил, полностью совпадают, поэтому мы их не будем обсуждать.

Обратимся к стандартному конечно-элементному подходу, основанному на постановке (3.3). Так как область $\Omega^s(t)$ определяется неизвестным полем перемещений $\mathbf{u}$, то на практике задача (3.3) записывается в координатах $\mathbf{X}$ начальной области $\Omega_s$. Интересующий нас интеграл – последний в формуле (3.3) – записывается в виде

$$\int\limits_{\Omega^s(t)} \sigma : \nabla\delta\mathbf{v}\, d\Omega = \int\limits_{\Omega_s} J\sigma\mathbf{F}^{-T} : \nabla_0\delta\mathbf{v}\, d\Omega,$$

а интеграл по $\Omega_s$ заменяется суммированием интегралов по треугольникам $T_P$ из триангуляции области $\Omega_s$, причём предполагается, что функция $\delta\mathbf{v}$ принадлежит классу $\tilde{H}^1_0(\Omega_s)$ с прообразом границы $\Gamma_u(t)$ в начальной конфигурации.

Рассмотрим последний интеграл для гиперупругих материалов, описанных в п. 2. Поскольку на треугольнике $T_P$ имеем $\delta\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\mathbf{X})\delta\mathbf{v}_i$ и $\nabla_0\delta\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \delta\mathbf{v}_i \otimes \nabla_0\lambda_i(\mathbf{X})$, то с учётом тождества $J\sigma\mathbf{F}^{-T} : (\delta\mathbf{v}_i \otimes \nabla_0\lambda_i) = \delta\mathbf{v}_i \cdot J\sigma\mathbf{F}^{-T}\nabla_0\lambda_i$ для неогуковского материала (2.2) получим

$$\sum_{i=1}^3 \delta\mathbf{v}_i \cdot \int\limits_{T_P} J\sigma\mathbf{F}^{-T}\nabla_0\lambda_i\, dT = \sum_{i=1}^3 \delta\mathbf{v}_i \cdot \int\limits_{T_P} (\mu(\nabla_0\mathbf{u} - \hat{\nabla}_0\mathbf{u}) + \mu d(J-1)(\mathbb{I} + \hat{\nabla}_0\mathbf{u}))\nabla_0\lambda_i\, dT, \quad (4.5)$$

для модели Гента (2.3)

$$\sum_{i=1}^3 \delta\mathbf{v}_i \cdot \int\limits_{T_P} J\sigma\mathbf{F}^{-T}\nabla_0\lambda_i\, dT =$$

$$= \sum_{i=1}^3 \delta\mathbf{v}_i \cdot \int\limits_{T_P} \left(\mu(\nabla_0\mathbf{u} - \hat{\nabla}_0\mathbf{u}) + \mu d(J-1)(\mathbb{I} + \hat{\nabla}_0\mathbf{u}) + \mu\frac{(2\nabla_0\cdot\mathbf{u} + \nabla_0\mathbf{u} : \nabla_0\mathbf{u})(\mathbb{I} + \nabla_0\mathbf{u})}{J_m - 2\nabla_0\cdot\mathbf{u} - \nabla_0\mathbf{u} : \nabla_0\mathbf{u}}\right)\nabla_0\lambda_i\, dT, \quad (4.6)$$

для модели Еоха (2.4)

$$\sum_{i=1}^3 \delta\mathbf{v}_i \cdot \int\limits_{T_P} J\sigma\mathbf{F}^{-T}\nabla_0\lambda_i\, dT =$$

$$= \sum_{i=1}^3 \delta\mathbf{v}_i \cdot \int\limits_{T_P} \left(\left(\frac{2W_1}{J} - \frac{I_1W_1}{J^2} + d(J-1)\right)\mathbb{I} + \frac{2W_1}{J}\nabla_0\mathbf{u} - \frac{I_1W_1}{J^2}\hat{\nabla}_0\mathbf{u} + d(J-1)\hat{\nabla}_0\mathbf{u}\right)\nabla_0\lambda_i\, dT, \quad (4.7)$$

где введены следующие обозначения:

$$\hat{\nabla}_0\mathbf{w} := \begin{pmatrix} \partial w_2/\partial X_2 & -\partial w_2/\partial X_1 \\ -\partial w_1/\partial X_2 & \partial w_1/\partial X_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2)^{\mathrm{T}}, \quad W_1 = c_1 + 2c_2(I_1/J - 2) + 3c_3(I_1/J - 2)^2.$$

Используем концепцию, предложенную в работе [5] для материала Сен-Венана–Кирхгофа, для любого гиперупругого изотропного материала. Из уравнения (3.5) можно получить уравнения относительно новых координат узлов. Рассмотрим вклад каждого треугольника, содержащего $i$-й узел, в узловые силы. Пусть $\mathbf{F}_i(T_P)$ – упругая и $\mathbf{F}_{i,\mathrm{ext}}(T_P)$ – внешняя силы в $i$-м узле треугольника $T_P$, тогда

$$\mathbf{F}_i(T_P) = -\frac{\partial U_p}{\partial \mathbf{Q}_i}, \quad \mathbf{F}_{i,\mathrm{ext}}(T_P) = \int\limits_{\Gamma_t^e(t)} \mathbf{t_0}\lambda_i\, dS + \int\limits_{T_Q} \mathbf{b}\lambda_i\, d\Omega.$$

Ассемблируя по окружающим треугольникам, получаем уравнение статического равновесия для $i$-го узла треугольника

$$\sum_{T_p\in S_i} (\mathbf{F}_i(T_p) + \mathbf{F}_{i,\mathrm{ext}}(T_P)) = 0, \tag{4.8}$$

где $S_i$ – множество треугольников, содержащих $i$-й узел. Таким образом, имеет место следующая

**Теорема.** *Для изотропного гиперупругого материала справедливо равенство* $\psi(\mathbf{G}) = W_e(I_1, J)$ *и выражение для упругих сил в* $i$*-м узле треугольника имеет вид*

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U_p}{\partial \mathbf{Q}_i} = -A_p\left(\frac{\partial W_e}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{Q}_i} + \frac{\partial W_e}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \mathbf{Q}_i}\right), \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{Q}_i} = 2\sum_{n=1}^{3}(\mathbf{D_n}\cdot\mathbf{D}_i)\mathbf{Q}_n^{\mathrm{т}}, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{Q}_i} = \frac{1}{2A_p}(\mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{Q}_{i+2})^{\perp}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.11}$$

*Производные* $\partial W_e/\partial I_1$, $\partial W_e/\partial J$ *полностью заданы видом определяющих соотношений.*

При необходимости можно получить аналитические формулы для $\partial\mathbf{F}_i/\partial\mathbf{Q}_j$. Найдём выражение для упругих сил $\mathbf{F}_i$ для рассматриваемых гиперупругих моделей.

**Следствие.** *Для неогуковского материала (2.2)*

$$\mathbf{F}_i(T_p) = -A_p\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{Q}_i} + (2Jd - 2(d+1))\frac{\partial J}{\partial \mathbf{Q}_i}\right), \tag{4.12}$$

*для модели Гента (2.3)*

$$\mathbf{F}_i(T_p) = -A_p\frac{\mu}{2}\left(\frac{J_m}{J_m - (I_1 - 2)}\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{Q}_i} + (2Jd - 2(d+1))\frac{\partial J}{\partial \mathbf{Q}_i}\right), \tag{4.13}$$

*для модели Еоха (2.4)*

$$\mathbf{F}_i(T_p) = -A_p\left(\frac{W_1}{J}\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{Q}_i} - \frac{I_1 W_1}{J^2}\frac{\partial J}{\partial \mathbf{Q}_i} + d(J-1)\frac{\partial J}{\partial \mathbf{Q}_i}\right), \tag{4.14}$$

*где* $I_1$ *и* $\partial I_1/\partial\mathbf{Q}_i$, $\partial J/\partial\mathbf{Q}_i$ *определяются формулами (4.4), (4.10), (4.11) соответственно.*

Как можно заметить, выражения (4.12), (4.13) и (4.14) намного компактней и удобней для вычислений по сравнению с соответствующими выражениями (4.5), (4.6) и (4.7). Таким образом, сеточные уравнения для статического равновесия деформируемых мягких биологических тканей записываются проще в случае постановки (3.5). Решение нелинейной системы уравнений (4.8) может быть получено либо классическим методом Ньютона (соответствующий якобиан может быть записан в обоих случаях), либо безъякобианным методом Ньютона–Крылова [17, 18].

**5. Численные эксперименты.** Рассмотрим задачу об одноосном растяжении квадратной мембраны силой $P$. В данном случае деформация имеет вид $(\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}},\ \ \mathbf{X} = (X_1, X_2)^{\mathrm{T}})$

$$x_1 = \lambda_1 X_1, \quad x_2 = \lambda_2 X_2. \tag{5.1}$$

Величины $\lambda_1, \lambda_2$ называются главными удлинениями.

В качестве параметров материалов были использованы значения для артерии человека [13]:

$$\mu = 3 \times 10^3\text{Н/м}, \quad J_m = 2.3, \quad d = 10,\ 10^2,\ 10^3.$$

В случае модели Еоха один из возможных наборов [19]:

$$c_1 = 0.441 \times 10^3\text{Н/м}, \quad c_2 = 0.437 \times 10^3\text{Н/м}, \quad c_3 = 0.885 \times 10^3\text{Н/м}, \quad d = 10^6\text{Н/м}.$$

Размеры мембраны $1\,\text{см} \times 1\,\text{см}$. Для определения констант материалов считалось, что толщина мембраны равна $1\,\text{мм}$.

Значения главных удлинений $\lambda_1, \lambda_2$, полученные в результате решения систем уравнений (4.8) для трёх материалов, приведены в табл. 1 и совпадают с решением, полученным с помощью слабой постановки (3.3) и полуаналитических методов. В силу линейности решения (5.1) погрешность аппроксимации равна нулю независимо от триангуляции.

**Таблица 1.** Величины главных удлинений $\lambda_1, \lambda_2$ для различных параметров неогуковского материала, моделей Гента и Еоха, полученные в результате применения метода, предложенного в работе [5]

| $P$, Н | $d$ | Неогуковский материал | | Модель Гента | | Модель Еоха | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ |
| 1 | 10 | 0.99252 | 1.00920 | 0.99246 | 1.00912 | – | – |
| 1 | 100 | 0.99178 | 1.00845 | 0.99178 | 1.00845 | – | – |
| 1 | 1000 | 0.99171 | 1.00838 | 0.99171 | 1.00837 | – | – |
| 1 | $10^6$ Н/м | – | – | – | – | 0.97226 | 1.02858 |
| 5 | 10 | 0.96306 | 1.04665 | 0.96298 | 1.04578 | – | – |
| 5 | 100 | 0.95962 | 1.04291 | 0.95975 | 1.04273 | – | – |
| 5 | 1000 | 0.95927 | 1.04254 | 0.95939 | 1.04240 | – | – |
| 5 | $10^6$ Н/м | – | – | – | – | 0.88451 | 1.13085 |

**6. Заключение.** В данной работе описан подход к расчёту деформации гиперупругих изотропных материалов. Отличительной особенностью данного подхода является компактная форма уравнений, что приводит к уменьшению объёма вычислений и позволяет достаточно просто реализовать любое определяющее соотношение для изотропной гиперупругой модели, которая используется для описания механического поведения мягких биологических тканей. В данной работе рассматривались только статические задачи в двумерной постановке, но описанный выше подход может быть аналогичным образом применён для динамических задач или для трёхмерной постановки. Одним из ограничений предложенного подхода является использование только линейных конечных элементов. Заметим, что при использовании элементов более высокого порядка и класса гиперупругих изотропных материалов, линейно зависимых от первого инварианта $I_1$, можно получить аналитические выражения для силы $\mathbf{F}_i$, аналогичные формуле (4.9). В данной работе использованы малосжимаемые модели материалов, что является одним из общепринятых подходов к моделированию деформаций мягких тканей, несмотря на то что все экспериментальные данные обрабатываются в предположении несжимаемости мягких тканей. Дальнейшим развитием описанного подхода является возможность учёта анизотропных свойств тканей и исследование вопросов моделирования несжимаемых материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-31-00196).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Cotin S., Delingette H., Ayache N.* Real-time elastic deformations of soft tissues for surgery simulation // IEEE transactions on Visualization and Computer Graphics. 1999. V. 5. № 1. P. 62–73.
2. *Székely G., Brechbühler C., Hutter R. et. al.* Modelling of soft tissue deformation for laparoscopic surgery simulation // Medical Image Analysis. 2000. V. 4. № 1. P. 57–66.
3. *Delingette H., Ayache N.* Soft tissue modeling for surgery simulation // Handbook of Numerical Analysis. 2004. V. 12. P. 453–550.
4. *Famaey N., Sloten J.V.* Soft tissue modelling for applications in virtual surgery and surgical robotics // Computer methods in biomechanics and biomedical engineering. 2008. V. 11. № 4. P. 351–366.
5. *Delingette H.* Triangular springs for modeling nonlinear membranes // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2008. V. 14. № 2. P. 329–341.
6. *Holzapfel G.A.* Biomechanics of soft tissue // The handbook of materials behavior models. 2001. V. 3. P. 1049–1063.
7. *Martins P., Natal Jorge R.M., Ferreira A.J.M.* A Comparative Study of Several Material Models for Prediction of Hyperelastic Properties: Application to Silicone–Rubber and Soft Tissues // Strain. 2006. V. 42. № 3. P. 135–147.
8. *Kim J., Ahn B., De S., Srinivasan M.A.* An efficient soft tissue characterization algorithm from in vivo indentation experiments for medical simulation // The international journal of medical robotics and computer assisted surgery. 2008. V. 4. № 3. P. 277–285.
9. *Bonet J., Wood R.D.* Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. Cambridge, 1997.
10. *Rivlin R.S.* Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory // Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1948. V. 241. № 835. P. 379–397.
11. *Mihai L.A., Chin L., Janmey P.A., Goriely A.* A comparison of hyperelastic constitutive models applicable to brain and fat tissues // J. of the Royal Society Interface. 2015. V. 12. № 110. P. 20150486.
12. *Chui C., Kobayashi E., Chen X. et. al.* Combined compression and elongation experiments and non-linear modelling of liver tissue for surgical simulation // Medical and Biological Engineering and Computing. 2004. V. 42. № 6. P. 787–798.
13. *Horgan C.O., Saccomandi G.* A description of arterial wall mechanics using limiting chain extensibility constitutive models // Biomechanics and modeling in mechanobiology. 2003. V. 1. № 4. P. 251–266.
14. *Horgan C.O.* The remarkable gent constitutive model for hyperelastic materials // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015. V. 68. P. 9–16.
15. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980.
16. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М; Л., 1935.
17. *Kelley C.T.* Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations. Philadelphia, 1995.
18. *Knoll D.A., Keyes D.E.* Jacobian-free Newton–Krylov methods: a survey of approaches and applications // J. of Computational Physics. 2004. V. 193. № 2. P. 357–397.
19. *Sharma S.* Critical comparison of popular hyper-elastic material models in design of anti-vibration mounts for automotive industry through FEA // Constitutive Models for Rubber III / Eds. Busfield J., Muhr A.: Proc. of the Third European Conference on Constructive Models for Rubber. London (15–17 Sept. 2003). London, 2003. P. 161–168.


Институт вычислительной математики
Российской академии наук, г. Москва,
Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
02.02.2017 г.