Метод дефляций для отыскания множественных решений

1 Задача

Решаем нелинейную задачу вида $\mathcal{F}(\mathbf{u}, \epsilon) = \mathbf{0} \in \mathcal{R}^N$ относительно неизвестного решения $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^N$ при фиксированном параметре ϵ.

2 Метод Ньютона

Пусть $\mathbf{x}$ - текущее приблежение к решению, $F = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \epsilon) \in \mathcal{R}^N$ - невязка, $J = \frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{x},\epsilon)}{\partial \mathbf{x}^T} \in \mathcal{R}^{N\times N}$ - Якобиан.

Шаг метода Ньютона заключается в решении системы $J\mathrm{d}\mathbf{x} = -F$ на изменение приближения к решению $\mathrm{d}\mathbf{x}$ и определении нового приближения к решению $\mathbf{x} := \mathbf{x} + \mathrm{d}\mathbf{x}$. Шаги выполняются до тех пор, пока $\|F\|$ не будет меньше заданной точности.

3 Метод дефляций

Пусть $\mathbf{x}_i \in \mathcal{R}^N, i \in [1, L]$ - известные решения, такие что $\mathcal{F}(\mathbf{x}_i, \epsilon) = \mathbf{0}$ выполнено с достаточной точностью. Сформулируем применение метода дефляции для отыскания нового решения при помощи метода Ньютона.

Пусть $M_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|^p} + s \in \mathcal{R}$ - скалярный оператор дефляции, $E_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial M_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \in \mathcal{R}^N$ - производные оператора дефляции по компонентам решения. Введем $M_0(\mathbf{x}) = \prod\limits_{i=1}^{L} M_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}$ и $E_0(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{L} M_i(\mathbf{x})^{-1} E_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}^N$.

Модифицируем с учетом дефляции невязку $G = \prod\limits_{i=1}^{L} M_i F = M_0 F$. На шаге метода Ньютона решаем систему $Q\mathrm{d}\mathbf{y} = -G$, где $Q \in \mathcal{R}^{N\times N}$ соответствует Якобиану модифицированной невязки. Запишем Q:

$$Q = \prod_{i=1}^{L} M_i J + \sum_{j=1}^{L} \prod_{i=1}^{L} \frac{M_i}{M_j} F E_i^T = \left(\prod_{i=1}^{L} M_i\right) \left(J + F \left(\sum_{i=1}^{L} M_i^{-1} E_i^T\right)\right) = M_0 \left(J + F E_0^T\right). \quad (1)$$

Выразим изменение решения $\mathrm{d}\mathbf{y}$:

$$\mathrm{d}\mathbf{y} = -Q^{-1} G = -Q^{-1} M_0 F = -\left(J + F E_0^T\right)^{-1} F. \quad (2)$$

Воспользуемся формулай Шермана-Моррисона-Вудбери:

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} U \left(C^{-1} + V A^{-1} U\right)^{-1} V A^{-1}, \quad (3)$$

получим

$$\mathrm{d}\mathbf{y} = -\left(J^{-1} - J^{-1} F \left(1 + E_0^T J^{-1} F\right)^{-1} E_0^T J^{-1}\right) F. \quad (4)$$

Заметим, что $\mathrm{d}\mathbf{x} = -J^{-1}F$, подставим:

$$\mathrm{d}\mathbf{y} = \mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{E_0^T \mathrm{d}\mathbf{x}}{1 - E_0^T \mathrm{d}\mathbf{x}} \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{1 - E_0^T \mathrm{d}\mathbf{x}} \mathrm{d}\mathbf{x} = \tau \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{5}$$

Таким образом, шаг метода Ньютона для модифицированной невязки заключается в:

- решении системы $J\mathrm{d}\mathbf{x} = -F$;
- вычислении параметра $\tau = \left(1 - E_0^T \mathrm{d}\mathbf{x}\right)^{-1}$;
- определении нового приближения к решению $\mathbf{x} := \mathbf{x} + \tau \mathrm{d}\mathbf{x}$.