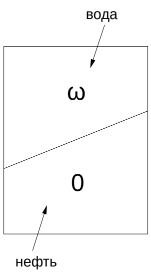
Методы решения блочных систем

Кормщикова Валерия

Конспект Софии Сукманюк

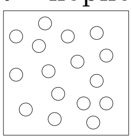
1 Блочные системы

1.1 1. Метод CPR для решения задач многофазной фильтрации

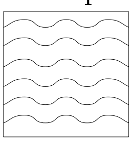


$$\begin{cases} \theta \dfrac{\partial S_\omega}{\partial t} - div(S_\omega^2 \boldsymbol{K} \nabla p) = q_\omega \quad (\ ) \\ \theta \dfrac{\partial S_0}{\partial t} - div(S_0^2 \boldsymbol{K} \nabla p) = q_0 \quad (\ ) \\ S_\omega + S_0 = 1, \end{cases}$$

θ - пористость среды



$\boldsymbol{K}$ - проницаемость среды(ориентированность пор).



Неизвестные: p - давление, S_ω - насыщенность воды, S_0 - насыщенность нефти. Будем считать, что S_ω неизвестно, тогда $S_0 = 1 - S_\omega$.

Линейная система записывается в блочном виде:

$$\begin{bmatrix} A_{pp} & A_{ps} \\ A_{sp} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_p \\ b_s \end{bmatrix} \tag{1}$$

A_{pp}, A_{sp} - эллиптические системы(могут вырождаться),

A_{ss}, A_{ps} - гиперболические системы.

Если в качестве неизвестной взять S_ω, то A_{ss} - положительная диагональ, A_{ps} - отрицательная.

Методы расщепления(IMPES)(неявное p, явное s) на алгебраическом уровне - CPR(метод ограничения невязки по давлению).

Многошаговые методы:

Система $Ax = b$.

Решаем переобусловленную систему $(AM^{-1})(Mx) = b$,

где $M^{-1} = M_1^{-1} + \sum_{i=2}^{n} M_i^{-1} \prod_{j=1}^{i-1}(I - AM_j)$,

где n - число шагов, M_j^{-1} для $j = \overline{1,n}$ - переобуславливатель для A.

Если $n = 2$, то M_1, M_2 - переобуславливатели,

$$M^{-1} = M_1^{-1} + M_2(I - AM_1^{-1})$$

Для системы (1) введем множитель $S = \begin{bmatrix} I & -D_{ps}D_{ss}^{-1} \\ O & I \end{bmatrix}$, D_{ps}, D_{ss} определяется дальше.

$$SA = \begin{bmatrix} B_{pp} & Z_{ps} \\ A_{sp} & A_{ss} \end{bmatrix}$$

$$S \begin{bmatrix} b_p \\ b_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_p - D_{ps}D_{ss}^{-1}b_s \\ b_s \end{bmatrix},$$

где $B_{pp} = A_{pp} - D_{ps}D_{ss}^{-1}A_{sp}$, $Z_{ps} = A_{ps} - D_{ps}D_{ss}^{-1}A_{ss}$.

Аналогично методу Узавы, решаем систему:

1. Сначала решаем сислему с давлением:

$$B_{pp}\Delta\tilde{p} = b_p - D_{ps}D_{ss}^{-1}b_s$$

2. Решаем полную систему:

$$\begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = A^{-1}\left(b - A\begin{bmatrix} \Delta\tilde{p} \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} \Delta\tilde{p} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} B_{pp}^{-1} & \\ & O \end{bmatrix}$, $M_2^{-1} = (SA)^{-1}$ - многошаговый метод.

Выбор D_{ps} и D_{ss}:

1. $D_{ps} = A_{ps}$, $D_{ss} = A_{ss}$ - точно, но не практично(считать D_{ss}^{-1} дорого).

2. Настоящй IMPES: $D_{ps} = colsum(A_{ps}) = diag(A_{ps}^T e)$,

   $D_{ss} = colsum(A_{ss}) = diag(A_{ss}^T e)$, $e = [1, \ldots, 1]^T$

3. Квази-IMPES: $D_{ps} = diag(A_{ps}), D_{ss} = diag(A_{ss})$

1.2 Блочный метод Гаусса-Зейделя

Шаг 1:

$$\begin{bmatrix} \Delta\tilde{p} \\ \Delta\tilde{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{pp} & O \\ A_{sp} & A_{ss} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} b_p \\ b_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O & Z_{ps} \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} \right)$$

Шаг 2:

$$\begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{pp} & Z_{ps} \\ O & A_{ss} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} b_p \\ b_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O & O \\ Asp & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\tilde{p} \\ \Delta\tilde{s} \end{bmatrix} \right)$$

В 3 шага:

$$\Delta\tilde{p} = B_{pp}^{-1}(b_p - Z_{ps}x_s)$$
$$\Delta s = A_{ss}^{-1}(b_s - A_{sp}\Delta\tilde{p})$$
$$\Delta p = B_{pp}^{-1}(b_p - Z_{ps}\Delta s)$$

1.3 Метода IMPES

Уравнение для сохранения масс:

$$\phi\partial_t S_\alpha + div(u_\alpha) = q_\alpha,\ \alpha = 0, \omega$$

Закон Дарси: $u_\alpha = -S_\alpha^2 \boldsymbol{K}\nabla p$, u_α - фазовая скорость.

Введем суммарную скорость: $u = u_\omega + u_0 = -(S_\omega^2 + S_0^2)\boldsymbol{K}\nabla p$.

$$div(u) = q_\omega + q_0\ - \tag{2}$$

$$\phi\partial_t S_0 - div(\frac{S_0^2}{S_\omega^2 + S_0^2}u) = q_0\ - \tag{3}$$

Шаг 1: p - неизвестно, S_0 - фиксировано

$$(2) : -div(((S_0^n)^2 + (1 - S_0^n)^2)\boldsymbol{K}\nabla p) = q_\omega + q_0,$$

n - номер шага. Получаем p, считаем u.

Шаг 2: p - фиксировано, S_0 - неизвестно

$$(3) : \phi\partial_t S_0 - div(\frac{S_0^2}{S_\omega^2 + S_0^2}u) = q_0$$

1.4 Метод Fixed-Stess для задачи Био

Линейная упругость:

$$-\mu\Delta\vec{u} - (\mu+\lambda)\nabla div(\vec{u}) + \alpha\nabla p = b$$

Фильтрация:

$$\partial_t(\xi p + \alpha div(\vec{u})) - \boldsymbol{K}\nabla p = q,$$

$\vec{u}$ - вектор перемещения, p - давление жидкостей; μ, λ - параметры линейной упругости среды, α - коэффициент Био.

Система вида

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -\Delta t C - D \end{bmatrix}$$

<u>Напомним:</u>

Система Стокса:

$$\begin{cases} -\mu\Delta\vec{u} + \nabla p = b \\ div(\vec{u}) = 0 \end{cases}$$

Расщепление: Fixed-Stress, Fixed-Strain, ...

Шаг 1: решаем фильтрацию

$$(2) : \partial_t(\xi p + \alpha div(\vec{u})) - \boldsymbol{K}\nabla p = q,$$

$\vec{u}$ фиксировано, p - неизвестно.

Шаг 2: решаем упругость

$$(3) : -\mu\Delta\vec{u} - (\mu+\lambda)\nabla div(\vec{u}) + \alpha\nabla p = b,$$

p - фиксировано, $\vec{u}$ - неизвестно.

Введем

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) = \frac{1}{3}I\varepsilon_V + e,$$

$$div(\vec{u}) = trace(\varepsilon) = \varepsilon_V$$

$$\sigma = \mu\nabla u + \mu(\nabla u)^T + \lambda div(\vec{u}) = \sigma_V I + S$$

$$\sigma_V = \frac{1}{3}trace(\sigma)$$

Из физики известна замена:

$$\alpha(p - p_0) + (\sigma_V - \sigma_{V_0}) = K_{dr}\sigma_V, \quad (4)$$

K_{dr} - модуль объемного сжатия в дренированном состоянии.

Обычно

$$\xi = \frac{\theta}{K_f} + \frac{\alpha - \theta}{K_s},\ \alpha = 1 - \frac{K_{dr}}{K_s},$$

где K_f - коэффициент объемного сжатия жидкости, K_s - коэффициент объемного сжатия породы.

Заменяем (2) используя (4):

$$\left(\xi + \frac{\alpha^2}{K_{dr}}\right)\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\alpha}{K_{dr}}\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} - \boldsymbol{K}\Delta p = q. \tag{5}$$

Решаем (5) на шаге 1, то Fixed-Stress.

$$\begin{bmatrix} A_{uu} & A_{up} \\ A_{pu} & A_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ q \end{bmatrix}$$

На n-й итерации:

$$A_{pp}p^{n+1} = q - A_{pu}u^n \ 1$$

$$A_{uu}u^{n+1} = b - A_{up}p^{n+1} \ 2$$

Аналогично блочному методу Гаусса-Зейделя:

$$\begin{bmatrix} A_{pp} & O \\ A_{up} & A_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^{n+1} \\ u^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} O & A_{pu} \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^n \\ u^n \end{bmatrix}$$

Пусть $D_{pp} = -diag(A_{pu}A_{uu}^{-1}A_{up}e)$, $e = [1, \dots, 1]^T$.
$D_{pp} \approx \dfrac{\alpha}{K_{dr}}$
Новая система:

$$\begin{bmatrix} A_{pp} + D_{pp} & O \\ A_{up} & A_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ q \end{bmatrix}$$