Метод Брамбла-Пасьяка

Кормщикова Валерия

Седловые задачи:

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} (*)$$

$X, F \in S_1 = R^{N_1}, Y, G \in S_2 = R^{N_2}, A > 0, C \geq 0$

Матрица $\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{bmatrix}$ квазиопределённая - симметричная, но не положительно определённая.

Задачи:

- задача Стокса (Навье-Стокса)
- линейная упругость
- задача диффузии с множителями Лагранжа

Для них всех должно выполняться условие разрешимости (*).

Рассмотрим дополнение по Шуру:

$(C + BA^{-1}B^T)Y = BA^{-1}F - G$ (**)

Система (**) разрешима, если $BA^{-1}B^T$ - положительно определённая.

Рассмотрим $\forall V \in S_1$

$$(BA^{-1}B^TV, V) = (AA^{-1}B^TV, A{-}1BTV) = \underset{U \in S_1^{\perp}}{sup} \frac{(AA^{-1}B^TV, U)^2}{(AU, U)} = \underset{U \in S_1^{\perp}}{sup} \frac{(U, BU)^2}{(AU, U)^2}$$

inf - sup: $\exists c > 0$:

$$\underset{U \in S_1^{\perp}}{sup} \frac{(U, BU)^2}{(AU, U)^2} \geq C||U||^2 \quad \forall U \in S_2 \qquad (***)$$

Если (***) выполнено, то $(C + BA^{-1}B^T) > 0$. Решив (**)б получим Y и найдём X из $X = A^{-1}(F - B^TY)$

Алгоритм Узава:

$X_0 \in S_1, Y_0 \in S_2$

$X_{i+1} = X_i + (A^{-1}(F - (AX_i + BY_i)$

$Y_{i+1} = Y_i + \tau(BX_{i+1} - G)$, где τ - параметр

Скорость сходимости: $\rho = max(1 - c\tau, \lambda, \tau - 1)$, где c из (***).

Предобусловленный метод Узавы.

$X_{i+1} = X_i + (A^{-1}(F - (AX_i + BY_i)$

$Y_{i+1} = Y_i + Q_B^{-1}(BX_{i+1} - G)$,

где Q_b - предобуславливатель для $BA{-}1B^T$.

Алгоритм (неточный метод Узавы) $X_{i+1} = X_i + (Q_A^{-1}(F - (AX_i + BY_i)$

Q_A - предобуславливатель для A.

Метод Брамбла-Пасьяна

$P \subset G$ для системы (*)

Пусть $A_0^{-1} \approx A^{-1}$ - предобуславливатель.

Пусть $\exists \alpha_1, \alpha_0 : \quad \dfrac{\alpha_1}{\alpha_0} << 1$
(1) $\alpha_0(AU,U) \leqslant (A_0U,U) \leqslant \alpha_1(AU,U) \quad \forall U \in S_1$
(2) $\alpha_1 \leqslant 1$
(3) для $\alpha = (1 - alpha_0)$ выполняется $0 < ((A-A_0)U,U) \leqslant \alpha(AU,U) \quad \forall U \neq 0 \in S_1$

Определим

$$Q = \begin{bmatrix} A_0^{-1} & 0 \\ BA_0^{-1} & I \end{bmatrix}$$

и домножим систему (*) слева на Q.

$$M \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0^{-1}A & A_0^{-1}B^T \\ BA_0^{-1}(A-A_0) & C + BA{-}1B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0^{-1}F \\ BA_0^{-1}F - G \end{bmatrix} \quad (****)$$

Из (****) определим скалярное произведение на $S_1 \times S_2$:

$$\begin{bmatrix} U & W \\ V & X \end{bmatrix} \equiv (AU,W) - (A_0U,W) + (U,X)$$

Заметим, что

$$(M(U \quad V)^T, (W \quad X)^T) = ((AA_0^{-1}A - A)U, W) + ((A-A_0)A_0^{-1}B^TX, W) + (BA_0^{-1}(A-A_0)U, X) + j((C + BA_0^{-1}B^T)V, X)$$

То есть M - симметричная для нового скалярного произведения матрица, следовательно можно применять CG.

<u>Теорема</u> Пусть $M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C + BA^{-1}G^T \end{bmatrix}$ тогда выполнены следующие неравенства:
$\lambda_0[\tilde{M}(U \quad V)^T, (U \quad V)^T] \leqslant [M(U \quad V)^T, (U \quad V)^T] \leqslant \lambda_1[\tilde{M}(U \quad V)^T, (U \quad V)^T]$
где $\lambda_0 = (1 + \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{\alpha^2}{4}})^{-1}$
$\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}$

Можно отмасштабировать A_0 на $\lambda_{max}(A_0)$ – поделить A_0 на $\lambda_{max}(A_0)$

Если $\alpha \longrightarrow 0$, то $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$ и $\tilde{M}^{-1}M$ сходится к 1, то есть надо масштабировать A_0 так, чтобы α была меньше.

Оценка теоремы строга.

Возьмём

$$\begin{bmatrix} A & A^{0.5} \\ A^{0.5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$$

$A_0 = (1-\alpha)A_0$, $0 < \alpha < 1$,
тогда $M = (1-\alpha)^{-1} \begin{bmatrix} I & A^{-0.5} \\ \alpha A^{-0.5} & I \end{bmatrix}$
Для $\tilde{M} = I$ с.з.:
$(\lambda_0)\gamma_0 = \dfrac{1-\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}$
$(\lambda_1)\gamma_1 = \dfrac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}$
то есть λ_1 - точка, а λ_0 ведёт себя как γ_0

<u>CG Брамбла-Пасьяна</u>

Пусть z_0 – начальное приближение к $(X,Y)^T$, $\tilde{F} = \begin{bmatrix} A_0^{-1}F & 0 \\ BA_0^{-1} & F - G \end{bmatrix}$

Введём $P_0 = R_0 = \tilde{F} - Mz_0$

<u>Цикл по i:</u>

$\alpha_i = dfrac[R_i, Pi][MP_i, P_i]$
$z_{i+1} = z_i + \alpha_i P_i$
$R_{i+1} = \tilde{F} - M z_{i+1}$
$\beta_{i+1} = \dfrac{[MR_{i+1}, P_i]}{[MP_i, P_i]}$
$P_{i+1} = R_{i+1} - \beta_i P_i$

Решаем систему с матрицей

$$HM = \begin{bmatrix} A - A_0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA_0A - A & AA_0^{-1} - B^T - B^T \\ B^T A_0^{-1} A - B & C + BA_0^{-1} B^T \end{bmatrix}$$

Предобуславленная система – без умножения на H. Правая часть $HM \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA_0^{-1}F - F \\ BA_0^{-1}F - G \end{bmatrix}$