Переупорядочивание и масштабирование

Конспект Комарова А.М., 403 группа ВМиК

1 Введение

Решаем систему

$$Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{N\times N}\ x \in \mathbb{R}^N,\ b \in \mathbb{R}^N$$

Скорость сходимости метода CG, рассмотренного на прошлой лекции, зависит от числа обусловленности матрицы A.

$$LU = C \approx A$$

$$Ax = b$$

$$AC^{-1}y = b,\ x = C^{-1}y$$

Проблема метода ILU - малый диагональный элемент.
Изучим методы, которые помогут нам обойти эти проблемы.

Пусть $A_s = D_L A D_R$, где D_L и D_R - невырожденные диагональные матрицы. D_L называется матрицей масштабирования строк, а D_R - матрицей масштабирования столбцов.

Простой подход - метод Синкхорна.

$$A_s y = r,\ r = D_L b,\ x = D_R y$$

$$A_s = C_s + \epsilon_s = LU + \epsilon_s,\ A_s C_s^{-1} z = r$$

2 Переупорядочивание

Пусть Σ - множество перестановок чисел $\overline{1, N}$.

Определение 1. *Для $\sigma \in \Sigma$ матрица P_σ размера $N \times N$ есть матрица перестановок*

$$(P_\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1,\ j = \sigma(i), \\ 0, \textit{иначе}; \end{cases}$$

$B = P_\sigma A$ получается из A перестановкой строк, такой что элемент $a_{\sigma(i)i}$ находится на диагонали.
$B = P_\sigma A P_\sigma^T$ - симметричная перестановка. Если матрица A была симметричной, то и B - симметричная.

Определение 2. *Назовём $\pi \in \Sigma$ трансверсалью, если $a_{\pi(i)i} \neq 0\ \ \forall i \in \overline{1, N}$.*

Лемма 1. *Если матрица A невырожденна, то существует как минимум одна трансверсаль.*

Определение 3. *Трансверсаль π называется доминантной, если*

$$\prod_{j=1}^{N} |a_{\pi(j)j}| = \max_{\sigma \in \Sigma} \prod_{j=1}^{N} |a_{\sigma(j)j}|$$

Лемма 2. *Пусть D_L и D_R - невырожденные диагональные матрицы, а π - доминантная трансверсаль для матрицы A. Тогда π так же является доминантной трансверсалью для матрицы $B = D_L A D_R$.*

Теорема 1. *Для H-матриц, диагонально-доминантных матриц, симметиричнo положительно опредленных матриц, $P_\pi = I$ - уникальная доминантная трансверсаль.*

Следствие 1. *Если мы найдём π - то можно восстановить исходную матрицу.*

Определение 4. *Назовём $A = (a_{ij}),\ 1 \leq i,\ j \leq N$ - I-матрицей, если*

$$|a_{ii}| = 1 \ \ \forall i \in \overline{1, N}$$

$$|a_{ij}| \leq 1 \ \ \forall i \neq j \in \overline{1, N}$$

Опредление 5. *Назовём $A = (a_{ij}),\ 1 \leq i,\ j \leq N$ - строгой I-матрицей, если*

$$|a_{ii}| = 1 \ \ \forall i \in \overline{1, N}$$

$$|a_{ij}| < 1 \ \ \forall i \neq j \in \overline{1, N}$$

Теорема 2. *Для любой не сингулярной матрицы A существует переупорядочивание P и $D_L,\ D_R$ - невырожденные диагональные матрицы, такие что PD_LAD_R - I-матрица, причём $P,\ D_L,\ D_R$ могут быть вычисленны за $O(N^3)$(на практике за $O(N^{2,25})$).*

Определение 6. *Введём $C = (c_{ij}),\ 1 \leq i,\ j \leq N$,*

$$c_{ij} = \begin{cases} \log \max |a_{ij}| - \log |a_{ij}|,\ a_{ij} \neq 0, \\ +\infty, \textit{иначе}; \end{cases}$$

Лемма 3. *Трансверсаль π - доминантная для A, если $\sum\limits_{j=1}^{N} c_{\pi(j)j}$ минимальна в C $\forall \sigma \in \Sigma$, где $c_{\sigma(j)j} < +\infty,\ j \in \overline{1, N}$.*

3 Задача линейного программирования

Мы хотим найти $x_{ij} \in \mathbb{R},\ i \in V_1,\ j \in V_2$, где

$$G = \{V_1,\ V_2,\ E\},$$

$$V_1,\ V_2 = \{1, ..., N\},$$

$$E = \{(i, j) \mid c_{ij} < +\infty\},$$

минимизируя $\sum\limits_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$, при условиях

$$\sum_{j\in V_2,\,(i,j)\in E} x_{ij} = 1,\ i\in V_1$$

$$\sum_{i\in V_1,\,(i,j)\in E} x_{ij} = 1,\ j\in V_2$$

$$\sum_{(i,j)\notin E} x_{ij} = 0,$$

$$x_{ij}\geq 0,\ i\in V_1,\ j\in V_2$$

Теорема 3. *1. Если задача линейного программирования разрешима, то существует x^*, такой что $x^*_{ij}\in(0,1],\ i\in V_1,\ j\in V_2$ и $M^*=\{(i,j)\mid x^*_{ij}=1\}$ - оптимальное соответствие.*

2. Любое оптимальное M^* является решением задачи линейного программирования.

3. M^* оптимально, если $u_i,\ i\in V_1$ и $v_j,\ j\in V_2$ существуют с условиями

$$u_i+v_j\leq c_{ij},\ (i,j)\in E,$$

$$u_i+v_j=c_{ij},\ (i,j)\in M^*.$$

Изменённый путь $\hat{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j\geq 0,\ \forall(i,j)\in E$.
Поиск кратчайшего пути: $\sum\limits_{(i,j)\in E}\hat{c}_{ij}\to\min$.

Лемма 4. *Пусть π - доминантная трансверсаль для A, определённая соответствием M^*, D_L, D_R - диагональные матрицы, такие что*

$$D^L_{ii}=\frac{\exp u_i}{\max\limits_{j\in\overline{1,N}} a_{ij}},\ \forall i\in\overline{1,N},$$

$$D^R_{jj}=\exp v_j,\ \forall j\in\overline{1,N},$$

тогда $B=P_\pi D_L A D_R$ - I-матрица.

Лемма 5. *Допустим $q\in\mathbb{R}^N$ удовлетворяет неравенству*

$$\hat{c}_{\pi(j)k}+q_j-q_k\geq 0,\ \forall j,k\in\overline{1,N}.$$

Тогда

$$D^L_{\pi(j)\pi(j)}=\frac{\exp(-(u_j+q_j))}{|a_{\pi(j)j}|},$$

$$D^R_{jj}=\exp(v_j+q_j),$$

задаёт масштабирование, такое что $B=P_\pi D_L A D_R$ - I-матрица.

Более того $\hat{c}_{\pi(j)k}+q_j-q_i>0$, откуда следует

$$D^L_{\pi(j)\pi(j)}|a_{\pi(j)k}|D^R_{kk}<1.$$