Лекции 5-6: Алгебраический многосеточный метод

1 Введение

Решаем систему вида

$$Ax = b, \tag{1}$$

где $A \in \mathcal{R}^{N\times N}$ матрица, $x, b \in \mathcal{R}^N$ вектора. Для решения системы используем метод подобный много-сеточному методу (MG). Для этого необходимо сформировать последовательность систем

$$A^m x^m = b^m, \quad 1 \le m \le q, \tag{2}$$

где $A^1 = A$, $A^m \in \mathcal{R}^{N_m\times N_m}$, $N_m < N_{m-1}$ для $2 \le m \le q$. Системы при $m \ge 2$ соответствуют системам уравнений на грубых сетках.

Определение 1.1. Определим операторы

$$I_{m+1}^m : \underset{\text{(грубая сетка)}}{\mathcal{R}^{N_{m+1}}} \to \underset{\text{(мелкая сетка)}}{\mathcal{R}^{N_m}}, \qquad \underline{\text{интерполяция}}\ (\textit{пролонгация})$$

$$I_m^{m+1} : \underset{\text{(мелкая сетка)}}{\mathcal{R}^{N_m}} \to \underset{\text{(грубая сетка)}}{\mathcal{R}^{N_{m+1}}}, \qquad \underline{\text{сужение}}\ (\textit{рестрикция})$$

$$S^m : \mathcal{R}^{N_m} \to \mathcal{R}^{N_m}. \qquad \text{оператор } \underline{\text{сглаживания}}$$

Имея последовательность операторов $A^m, S^m \in \mathcal{R}^{N_m\times N_m}, I_{m+1}^m \in \mathcal{R}^{N_m\times N_{m+1}}, I_m^{m+1} \in \mathcal{R}^{N_{m+1}\times N_m}$ можно построить метод, подобный много-сеточному. Пусть $A > 0$ - симметричная положительно определенная матрица, оператор интерполяции I_{m+1}^m задан и имеет полный ранг. Тогда можно задать

$$I_m^{m+1} = \left(I_{m+1}^m\right)^T, \qquad \text{оператор сужения} \tag{3}$$

$$A^{m+1} = I_m^{m+1} A^m I_{m+1}^m, \qquad \text{система на грубой сетке} \tag{4}$$

$$S^m = I - \left(Q^m\right)^{-1} A^m, \qquad \text{оператор сглаживания} \tag{5}$$

$$T^m = I - I_{m+1}^m \left(A^{m+1}\right)^{-1} I_m^{m+1} A^m, \qquad \text{оператор } \underline{\text{коррекции}} \text{ на грубой сетке} \tag{6}$$

где I - единичная матрица необходимого размера.

При таком выборе T^m является ортогональным проектором. Сглаживание S^m задано в общем виде, где Q^m в зависимости от метода принимает вид

- Метод Гаусса-Зейделя: Q^m нижняя треугольная часть A^m с диагональю.
- Метод Якоби: Q^m диагональ A^m, помноженная на скаляр.
- Метод неполной факторизации: $Q^m = LU = A^m + E$, где E - ошибка разложения.

Заметим, что построение и обращение $(Q^m)^{-1}$ для первых двух методов является тривиальным и вычислительно недорогим. В дополнении к этому метод Якоби легко параллелизуем.

В итоге имеем все компоненты для построения многосеточного метода, если зададим оператор интерполяции I_{m+1}^m.

2 Алгоритмы построения

Определение 2.1. Введем Ω^m - сетку на уровне m, элементы которой представлены действительными числами $[1, N^m]$, а связи - оператором A^m.

Определение 2.2. Введем множество связей элемента i, $\mathcal{N}_i^m = \{j : a_{ij}^m \neq 0, j \neq i\}$.

Определение 2.3. Введем C/F-разбиение на уровне m для сетки $\Omega^m = C^m \cup F^m$, где C^m - множество элементов сетки Ω^m представленных на грубой сетке $\Omega^{m+1} = \Omega^m \cap C^m$, а F^m - множество элементов представленных только на мелкой сетке $F^m = \Omega^m \setminus C^m$.

Определение 2.4. Определим действие оператора интерполяции $I_{m+1}^m : C^m \to F^m \cup C^m$ на вектор $e^{m+1} \in \mathcal{R}^{N_{m+1}}$

$$e^m = I_{m+1}^m e^{m+1} = \begin{cases} e_i^{m+1} & i \in C^m, \\ \sum\limits_{k \in \mathcal{I}_i^m} w_{ik}^m e_k^{m+1} & i \in F^m, \end{cases} \tag{7}$$

где $\mathcal{I}_i^m \subseteq \mathcal{N}_i^m$ - множество интерполяционных связей элемента i на уровне m с вектором весов $\mathbf{w}_i^m = \{w_{ik}^m \neq 0 : k \in \mathcal{I}_i^m\}$. Таким образом интерполяция элемента i определяется множеством связей $\mathcal{I}_i^m$ и вектором весов $\mathbf{w}_i^m$.

На уровне m интерполятор I_{m+1}^m, сужение I_m^{m+1} и система на грубом уровне A^{m+1} строятся в три этапа:

- Для всех элементов выберем C/F-разбиение.
- Для каждого элемента i выберем множество $\mathcal{I}_i^m$ и веса $\mathbf{w}_i^m$.
- Посчитаем $I_m^{m+1} = (I_m^{m+1})^T$ и $A^{m+1} I_m^{m+1} A^m I_{m+1}^m$.

Данные шаги называются этапом настройки алгебраического многосеточного метода. Алгоритм 1 реализует данную последовательность.

Алгоритм 1 Настройка AMG

1: $m = 1$
2: выберем элементы грубой сетки $\Omega^{m+1} = C^m$ (Алгоритм 2)
3: расширим C^m (Алгоритм 3)
4: определим интерполятор I_{m+1}^m (Алгоритм 4)
5: посчитаем сужение $(I_{m+1}^m)^T = I_m^{m+1}$
6: посчитаем систему на грубой сетке $A^{m+1} = I_m^{m+1} A^m I_{m+1}^m$
7: **если** система A^{m+1} мала **то**
8: $\quad q = m + 1$
9: $\quad$ вычислим $(A^{m+1})^{-1}$
10: **иначе**
11: $\quad m = m + 1$
12: $\quad$ **перейдем к шагу 2**
13: **завершим если**

Определение 2.5. Назовем элемент i связанным сильно с элементом $j \in \mathcal{N}_i^m$, если $|a_{ij}^m| \geq \theta \max\limits_{l \neq i} |a_{il}^m|$, где $0 < \theta \leq 1$, обычно $\theta = 1/4$.

Определение 2.6. Опеределим $\mathcal{S}_i^m = \{j : |a_{ij}^m| \geq \theta \max\limits_{l \neq i} |a_{il}^m|\}$ - множество сильных связей элемента i, $\mathcal{S}_i^m \subseteq \mathcal{N}_i^m$, введем множество смежных сильных связей элемента i, $(\mathcal{S}_i^m)^T = \{j : i \in \mathcal{S}_j^m\}$.

Построим C/F-разбиение на уровне m исходя из следующих двух правил:

1. C^m должно быть максимальным подмножеством всех элементов Ω^m, с условием, что никакие два элемента из C^m не являются сильно связанными.

2. $\forall i \in F^m$ каждый элемент $j \in \mathcal{S}_i^m$ должен либо принадлежать C^m, либо должен быть сильно связан хотя бы с одним элементом из $C^m \cap \mathcal{S}_i^m$.

Алгоритм 2 находит первоначальное приближение к множеству C^m. Алгоритм ищет множество выбирая i с максимальным значением $\lambda_i = \left|(\mathcal{S}_i^m)^T \cap U\right| + 2\left|(\mathcal{S}_i^m)^T \cap F^m\right|$, тем самым отбирая элементы с наибольшим числом связей.

Алгоритм 2 Выбор C^m

пусть $C^m = F^m = \emptyset$
пусть $U = \Omega^m$ ▷ множество элементов-кандидатов
определим $\lambda_i = \left|(\mathcal{S}_i^m)^T\right|, \forall i \in \Omega^m$ ▷ количество смежных сильных связей
цикл пока $U \neq \emptyset$ **выполним**
  выберем $i = \arg\max_{j \in U}(\lambda_j)$.
  добавим $C^m = C^m \cup \{i\}$
  уберем $U = U \setminus \{i\}$
  цикл для всех $j \in (\mathcal{S}_i^m)^T \cap U$ **выполним**
    добавим $F^m = F^m \cup \{j\}$
    уберем $U = U \setminus \{j\}$
    увеличим $\lambda_l = \lambda_l + 1, \quad \forall l \in \mathcal{S}_j^m \cap U$
  завершим цикл для
  уменьшим $\lambda_j = \lambda_j - 1, \quad \forall j \in \mathcal{S}_i^m \cap U$
завершим цикл пока

Определение 2.7. Определим $\mathcal{D}_i^m = \mathcal{N}_i^m \setminus \mathcal{I}_i^m$ - множество пропущенных связей.

Определение 2.8. Определим разбиение множества пропущенных связей $\mathcal{D}_i^m = \mathcal{D}_i^s \cap \mathcal{D}_i^w$, где $\mathcal{D}_i^s = \mathcal{D}_i^m \cap \mathcal{S}_i^m$ - множество сильных пропущенных связей и $\mathcal{D}_i^w = \mathcal{D}_i^m \setminus \mathcal{S}_i^m$ - множество слабых пропущенных связей.

Алгоритм 3 расширяет множество C^m. Для каждого элемента $i \in F^m$ производится проверка, что каждый элемент из $\mathcal{D}_i^s$ имеет сильную связь к хотя бы одному элементу из C^m.

Алгоритм 3 Расширение C^m

цикл для всех $i \in F^m$ **выполним**
  пусть $\hat{C}^m = \emptyset$ ▷ множество расширения C^m
  определим $\mathcal{I}_i^m = \mathcal{S}_i^m \cap C^m$ ▷ множество интерполяционных связей
  определим $\mathcal{D}_i^s = \mathcal{S}_i^m \setminus \mathcal{I}_i^m$ ▷ пропущенные сильные связи
  цикл для всех $j \in \mathcal{D}_i^s$ **выполним**
    если $\mathcal{S}_j^m \cap \left(\mathcal{I}_i^m \cup \hat{C}^m\right) = \emptyset$ **то**
      добавим $\hat{C}^m = \hat{C}^m \cup \{j\}$
    завершим если
  завершим цикл для
  если $|\hat{C}^m| > 1$ **то**
    добавим $C^m = C^m \cup \{i\}$
    уберем $F^m = F^m \setminus \{i\}$
  иначе
    добавим $C^m = C^m \cup \hat{C}^m$
    уберем $F^m = F^m \setminus \hat{C}^m$
  завершим если
завершим цикл для

Алгоритм 4 определяет веса интерполяции.

Алгоритм 4 Выбор весов

цикл для всех $i \in F^m$ **выполним**
  определим $\mathcal{I}_i^m = \mathcal{S}_i^m \cap C^m$ ▷ множество интерполяционных связей
  определим $\mathcal{D}_i^s = \mathcal{S}_i^m \setminus \mathcal{I}_i^m$ ▷ пропущенные сильные связи
  определим $\mathcal{D}_i^w = \mathcal{N}_i^m \setminus \mathcal{S}_i^m$ ▷ пропущенные слабые связи
  определим $d_i = a_{ii}^m + \sum_{j \in \mathcal{D}_i^w} a_{ij}^m$
  определим $d_j = a_{ij}^m, \quad \forall j \in \mathcal{I}_i^m$
  цикл для всех $j \in \mathcal{D}_i^s$ **выполним**
    посчитаем $s_j = \sum_{k \in \mathcal{I}_i^m} a_{jk}$
    добавим $d_k = d_k + a_{ij}^m a_{jk}^m / s_j, \quad \forall k \in \mathcal{I}_i^m$
  завершим цикл для
  определим веса $w_{ik}^m = -d_k / d_i, \quad \forall k \in \mathcal{I}_i^m$
завершим цикл для

3 Сходимость метода

Сходимость метода зависит от действия оператора сглаживания S^m и оператора коррекции на грубой сетке T^m на ошибку. Ниже приведены теоремы о сходимости метода при некоторых предположениях о свойствах данных операторов.

Определение 3.1. Назовем ошибкой вектор $e^m \in \mathcal{R}^{N_m}$ приближенного решения $\tilde{x}^m \in \mathcal{R}^{N_m}$ заданный $A^m e^m = b^m - A\tilde{x}^m$. Скорость сходимости метода определяется уменьшением нормы ошибки после применения метода.

Определение 3.2. Введем скалярное произведение вида $\langle u, v \rangle_\alpha = \left\langle \left((D^m)^{-1} A^m \right)^{\alpha - 1} u, A^m v \right\rangle$ для векторов $u, v \in \mathcal{R}^{N_m}$, где $D^m = \mathrm{diag}(A^m)$ и соответствующую норму $\|u\|_\alpha = \sqrt{\langle u, u \rangle_\alpha}$.

Определение 3.3. Введем $\tilde{T}^m$ - оператор рекурсивной коррекции на грубой сетке с использованием V-цикла.

Отличие $\tilde{T}^m$ от T^m заключается в неточном обращении $(A^{m+1})^{-1}$ в первом операторе.

Теорема 3.1. *При условиях $A > 0$, I_{m+1}^m имеет полный ранг и* (3)-(4) *и предположении, что $\exists \delta_1 > 0 : \forall e^m \in \mathcal{R}^{N_m}$ выполняется условие*

$$\|S^m e^m\|_1^2 \leq \|e^m\|_1^2 - \delta_1 \|T^m e^m\|_1^2, \tag{8}$$

где δ_1 не зависит от e^m и m. Тогда $\delta_1 \leq 1$, при условии что система A^q решается точно и оператор сглаживания применяется ***после*** *шага коррекции на грубой сетке $\tilde{T}^m$, то скорость сходимости V-цикла для системы* (1) *ограничена сверху $\zeta = \sqrt{1 - \delta_1}$.*

Доказательство. Пусть сходимость V-цикла на уровне $m+1$ фиксирована $0 \leq \zeta_{m+1} < 1$. Определим ζ_m от ζ_{m+1}. Пусть $\tilde{v}^{m+1}$ поправка решения с использованием V-цикла, а v^{m+1} поправка решения при точном решении системы $A^{m+1} v^{m+1} = I_m^{m+1} A^m e^m$. Тогда ошибка после оператора коррекции на грубой сетке имеет вид

$$\tilde{T}^m e^m = e^m - I_{m+1}^m \tilde{v}^{m+1} = e^m - I_{m+1}^m v^{m+1} + I_{m+1}^m (v^{m+1} - \tilde{v}^{m+1}) = T^m e^m + I_{m+1}^m (v^{m+1} - \tilde{v}^{m+1}), \tag{9}$$

так как $\forall w^{m+1} : \|w^{m+1}\|_1 = \|I_{m+1}^m w^{m+1}\|_1$ имеем

$$\|I_{m+1}^m (v^{m+1} - \tilde{v}^{m+1})\|_1 = \|v^{m+1} - \tilde{v}^{m+1}\|_1 \leq \eta_{m+1} \|v^{m+1}\|_1 = \eta_{m+1} \|I_{m+1}^m v^{m+1}\|. \tag{10}$$

Используя ортогональность образов линейных операторов $im(T^m) \perp im(I_{m+1}^m)$ получим

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{T}^m e^m\|_1^2 &= \|T^m e^m\|_1^2 + \|I_{m+1}^m (v^{m+1} - \tilde{v}^{m+1})\|_1^2 \\
&\le \|T^m e^m\|_1^2 + \zeta_{m+1}^2 \|I_{m+1}^m v^{m+1}\|_1^2 = \|T^m e^m\|_1^2 + \zeta_{m+1}^2 (\|e^m\|_1^2 - \|T^m e^m\|_1^2).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Используя (8) и свойства ортогональных проекторов $T^m \tilde{T}^m = T^m$ и $\|T^m e^m\|_1 \le \|e^m\|_1$, получим:

$$
\begin{aligned}
\|S^m \tilde{T}^m e^m\|_1^2 &\le \|\tilde{T}^m e^m\|_1^2 - \delta_1 \|T^m \tilde{T}^m e^m\|_1^2 = \|\tilde{T}^m e^m\|_1^2 - \delta_1 \|T^m e^m\|_1^2 \\
&\le \left(1 - \delta_1 - \zeta_{m+1}^2\right) \|T^m e^m\|_1^2 + \zeta_{m+1}^2 \|e^m\|_1^2 \le \max\left(\zeta_{m+1}^2, 1 - \delta_1\right) \|e^m\|_1^2,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

откуда $\zeta_m = \max\left(\zeta_{m+1}, \sqrt{1-\delta_1}\right)$. Применим оценку рекурсивно. □

Теорема 3.2. *Если при тех же условиях вместо условия* (8) *выполняется условие*

$$
\|S^m e^m\|_1^2 \le \|e^m\|_1^2 - \delta_2 \|T^m S^m e^m\|_1^2 , \tag{13}
$$

*и оператор сглаживания применяется **перед** шагом коррекции на грубой сетке $\tilde{T}^m$, то скорость сходимости V-цикла для системы* (1) *ограничена сверху $\zeta = 1/\sqrt{1+\delta_2}$.*

Доказательство. Подставим $S^m e^m$ вместо e^m в (11) и заменим $\xi = \|T^m S^m e^m\|_1^2 / \|S^m e^m\|_1^2$, тогда получим

$$
\|\tilde{T}^m S^m e^m\|_1^2 \le \left(\xi + \zeta_{m+1}^2 (1-\xi)\right) \|S^m e^m\|_1^2. \tag{14}
$$

Перепишем (13) в виде

$$
(1 + \delta_2 \xi) \|S^m e^m\|_1^2 \le \|e^m\|_1^2, \tag{15}
$$

тогда из (14) получим

$$
\|\tilde{T}^m S^m e^m\|_1^2 \le \max_{0 \le \xi \le 1} \left(\frac{\xi + \zeta_{m+1}^2 (1-\xi)}{1 + \delta_2 \xi} \right) \|e^m\|_1^2 = \max\left(\zeta_{m+1}^2, \frac{1}{1+\delta_2} \right) \|e^m\|_1^2, \tag{16}
$$

то есть $\zeta_m = \max\left(\zeta_{m+1}, \frac{1}{\sqrt{1+\delta_2}}\right)$. □

Следствие 3.2.1. *Если оператор сглаживания S^m применяется и **перед** и **после** шага коррекции на грубой сетке $\hat{T}^m$ и условия* (8) *и* (13) *выполняются с параметрами δ_1 и δ_2, соответственно, то скорость сходимости V-цикла ограничена сверху $\zeta = \sqrt{(1-\delta_1)/(1+\delta_2)}$.*

Условие (8) можно заменить на пару условий

$$
\|S^m e^m\|_1^2 \le \|e^m\|_1^2 - \alpha_1 \|e^m\|_2^2 , \quad \|T^m e^m\|_1^2 \le \beta \|e^m\|_2^2 , \tag{17}
$$

тогда $\delta_1 = \alpha_1 / \beta$ и аналогично (13) можно заменить на пару условий

$$
\|S^m e^m\|_1^2 \le \|e^m\|_1^2 - \alpha_2 \|S^m e^m\|_2^2 , \quad \|T^m e^m\|_1^2 \le \beta \|e^m\|_2^2 , \tag{18}
$$

тогда $\delta_2 = \alpha_2 / \beta$. Таким образом α_1 и α_2 определяют свойство оператора сглаживания S^m, а β определяет свойство оператора коррекции на грубой сетке T^m.

Следствие 3.2.2. *Оператор сглаживания S^m должен уменьшать те компоненты ошибки e^m, которые T^m не затрагивает. И наоборот,* т.е. *образы линейных операторов ортогональны $im(S^m) \perp im(T^m)$.*

4 Свойства оператора сглаживания

Свойства оператора сглаживания S^m можно оценить используя лемму, приведенную ниже. Далее опустим индекс уровня m.

Лемма 4.1. *Пусть оператор сглаживания S матрицы $A > 0$ имеет общий вид $S = I - Q^{-1}A$, где Q - не вырождена. Тогда неравенства вида*

$$\|Se\|_1^2 \le \|e\|_1^2 - \alpha_1 \|e\|_2^2 , \quad \|Se\|_1^2 \le \|e\|_1^2 - \alpha_2 \|Se\|_2^2 , \tag{19}$$

эквиваленты неравенствам вида

$$\alpha_1 Q^T D^{-1} Q \le Q + Q^T - A, \quad \alpha_2 (A - Q^T) D^{-1} (A - Q) \le Q + Q^T - A, \tag{20}$$

где $D = diag(A)$.

Доказательство. Используем определение S получим

$$\|Se\|_1^2 = \|e\|_1^2 - \left\langle \left(Q + Q^T - A\right) Q^{-1}Ae, Q^{-1}Ae \right\rangle , \tag{21}$$

тогда условия (19) эквивалентны условиям

$$\begin{aligned} \alpha_1 \|e\|_2^2 &\le \left\langle \left(Q + Q^T - A\right) Q^{-1}Ae, Q^{-1}Ae \right\rangle , \\ \alpha_2 \|Se\|_2^2 &\le \left\langle \left(Q + Q^T - A\right) Q^{-1}Ae, Q^{-1}Ae \right\rangle , \end{aligned} \tag{22}$$

что в свою очередь эквивалентно

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left\langle D^{-1}Qe, Qe \right\rangle &\le \left\langle \left(Q + Q^T - A\right) e, e \right\rangle , \\ \alpha_2 \left\langle D^{-1}(Q - A)e, (Q - A)e \right\rangle &\le \left\langle \left(Q + Q^T - A\right) e, e \right\rangle , \end{aligned} \tag{23}$$

откуда следует (20). □

Теорема 4.1. *Пусть $A > 0$ - симметричная, положительно определенная, $A \in \mathcal{R}^{N\times N}$. Если оператор сглаживания S - метод релаксаций Гаусса-Зейделя, то Q - нижняя треугольная часть A с диаголналью. Тогда $\forall \omega \in \mathcal{R}^N : \omega_i > 0$ зададим*

$$\gamma_- = \max_{1\le i\le N} \left(\frac{1}{\omega_i a_{ii}} \sum_{j<i} \omega_j |a_{ij}| \right), \quad \gamma_+ = \max_{1\le i\le N} \left(\frac{1}{\omega_i a_{ii}} \sum_{j>i} \omega_j |a_{ij}| \right), \tag{24}$$

тогда

$$\alpha_1 \le \frac{1}{(1+\gamma_-)(1+\gamma_+)}, \quad \alpha_2 \le \frac{1}{\gamma_-\gamma_+}, \tag{25}$$

где α_1, α_2 параметры (19).

Доказательство. Для метода Гауса-Зейделя $Q + Q^T - A = D$, тогда согласно лемме (4.1) условия (20) принимают вид

$$\alpha_1 \le \|D^{-1}Q^T\|^{-1} \|D^{-1}Q\|^{-1}, \quad \alpha_2 \le \|D^{-1}(A - Q^T)\|^{-1} \|D^{-1}(A - Q)\|^{-1}, \tag{26}$$

для некоторой матричной нормы. Определим матричную норму

$$\|L\| = \|L\|_\omega = \max_{1\le i\le N} \left(\frac{1}{\omega_i} \sum_{j=1}^{N} \omega_j |l_{ij}| \right), \tag{27}$$

тогда получим (24) и (25). □

Следствие 4.1.1. *Пусть $A > 0$ имеет ширину l,* т.е. *не более l ненулевых элементов на строку. Выберем $\omega_i = 1/\sqrt{a_{ii}}$ и получим $\gamma_- < l$ и $\gamma_+ < l$, т.к. $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$. Таким образом $\alpha_1 = (1+l)^{-2}$ и $\alpha_2 = l^{-2}$.*

Замечание 4.1. *Если $A > 0$ - диагонально доминантная матрица,* т.е. $\sum_{j\neq i}|a_{ij}| \approx a_{ii}$, *то на практике можно ожидать $\gamma_+, \gamma_- \sim 1$, что дает более оптимистичные оценки.*

Определение 4.1. $A \in \mathcal{R}^{N\times N}, A > 0$ является симметричной М-матрицей, если $a_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$.

Замечание 4.2. *Пусть A - симметричная М-матрица. Тогда $\exists z : Az > 0$. Выбирая $\omega = z$ в теореме 4.1, получим*

$$\gamma_- = \max_{1\leq i\leq N}\left(\frac{1}{z_i a_i i}\sum_{j<i} z_j |a_{ij}|\right) = \max_{1\leq i\leq N}\left(1 - \frac{1}{z_i a_i i}\sum_{j<i} z_j a_{ij}\right) < 1. \tag{28}$$

Аналогично, получим $\gamma_+ < 1$. Таким образом $\alpha_1 = 1/4$ и $\alpha_2 = 1$.

5 Свойства операторов интерполяции и коррекции

Свойства оператора коррекции T^m зависит от свойств оператора интерполяции I_{m+1}^m. Построим оператор интерполяции. Согласно замечанию 3.2.2 образ интерполятора должен содержать ошибку оператора сглаживания. Рассмотрим свойства ошибок оператора сглаживания.

Определение 5.1. Назовем ошибку $e^m \in \mathcal{R}^{N_m}$ гладкой, если $\|S^m e^m\| \approx \|e^m\|$.

Для стандартных методов сглаживания, невязка от гладкой ошибки $r^m = A^m e^m$ на практике является малой по отношению к самой ошибке e^m после нескольких итераций сглаживания. Таким образом, для гладкой ошибки выполняется свойство $\|e^m\|_2 \ll \|e^m\|_1$ или

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(r_i^m)^2}{a_{ii}^m} \ll \sum_{i=1}^{N} r_i^m e_i^m, \tag{29}$$

откуда в среднем для любого i можно ожидать $|r_i^m| \ll a_{ii}^m |e_i^m|$.

Таким образом хорошей аппроксимацией компоненты e_i^m гладкой ошибки в зависимости от значений e_j^m из соседних элементов $j \in \mathcal{N}_i^m$ является выражение

$$r_i^m = a_{ii}^m e_i^m + \sum_{j\in\mathcal{N}_i^m} a_{ij}^m e_j^m \approx 0. \tag{30}$$

Исходя из (30) можно построить интерполятор взяв $\mathcal{I}_i^m = \mathcal{N}_i^m$ и $w_{ik}^m = -a_{ik}^m/a_{ii}^m$. Однако, как правило, $\mathcal{N}_i^m$ слишком велико, что при подобном выборе приводит к сильному заполнению системы на грубой сетке A^{m+1}. Следует уменьшить множество $\mathcal{I}_i^m$. Для отрбрасывания связей из множества $\mathcal{I}_i^m$ воспользуемся следующим свойством симметричных матриц. Исходя из неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\|e\|_1^2 = \langle Ae, e\rangle = \left\langle D^{-1/2}Ae, D^{1/2}e\right\rangle \leq \|D^{-1/2}Ae\|\|D^{1/2}e\| = \|e\|_2\|e\|_0, \tag{31}$$

тогда из $\|e\|_2 \ll \|e\|_1$ следует $\|e\|_1 \ll \|e\|_0$, что для симметричной матрицы A приводит к

$$\|e\|_1^2 = \langle Ae, e\rangle = -\frac{1}{2}\sum_{ij} a_{ij}(e_i - e_j)^2 + \sum_i \left(\sum_j a_{ij}\right) e_i^2 \ll \sum_i a_{ii} e_i^2 = \langle De, e\rangle = \|e\|_0^2, \tag{32}$$

тогда если $\sum_{j\neq i}|a_{ij}| \approx a_{ii}$ и матрица A является симметричной M-матрицей, то в среднем для каждого i выполнено

$$-\sum_{j\neq i}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\frac{(e_i-e_j)^2}{e_i^2} \ll 1, \tag{33}$$

что означает, что ошибка меняется медленно в направлении сильных связей, если $|a_{ij}|/a_{ii}$ достаточно велико.

Замечание 5.1. *Данные рассуждения не используют свойства и структуру конкретного оператора сглаживания S. Используются наблюдения за поведением решения для специального вида матриц.*

Замечание 5.2. *Произведем C/F-разбиение для Ω^m следующим образом. Положим в F^m все элементы не имеющие связи друг с другом и определим веса интерполяции $w_{ik}^m = -a_{ik}^m/a_{ii}^m, i \in F^m, k \in C^m$. Затем сужение и система на грубом уровне вычисляются согласно (3)-(4) и процедура выбора узлов для F^{m+1} повторяется. При таком построении $im(S^m) \subseteq im(I_{m+1}^m)$. Тогда, на каждом уровне элементы можно упорядочить так, что ошибка после применения метода Гаусса-Зейделя для элементов из F^m равна нулю и метод сойдется за один V-цикл.*

Теорема 5.1. *Пусть $A^m > 0$ и для оператора сглаживания S^m выполняется свойство*

$$\|S^m e^m\|_1^2 \leq \|e^m\|_1^2 - \alpha_1\|e^m\|_2^2. \tag{34}$$

Пусть интерполятор I_{m+1}^m имеет полный ранг и $\forall e^m$ выполнено

$$\min_{e^{m+1}}\|e^m - I_{m+1}^m e^{m+1}\|_0^2 \leq \beta\|e^m\|_1^2, \tag{35}$$

где $\beta > 0$ не зависит от e^m. Тогда $\beta \leq \alpha_1$ и выполняется неравенство

$$\|S^m T^m e^m\|_1 \leq \sqrt{1-\alpha_1/\beta}\|e^m\|_1, \tag{36}$$

т.е. *фактор сходимости $\zeta = \sqrt{1-\alpha_1/\beta}$.*

Доказательство. Свойство (35) эквивалентно $\|T^m e^m\|_1^2 \leq \beta\|T^m e^m\|_2^2$. Так как $im(T^m)$ ортогонально $im(I_{m+1}^m)$ в норме $< \cdot,\cdot >_1$, то для любого $e^m \in im(T^m)$ и для любого e^{m+1} выполняется

$$\|e^m\|_1^2 = \left\langle A^m e^m, e^m - I_{m+1}^m e^{m+1}\right\rangle. \tag{37}$$

Используя неравенство Коши-Буниковского получим

$$\begin{aligned}\|e^m\|_1^2 &= \left\langle A^{\frac{1}{2}}\left(D^{-1}A\right)^{\frac{1}{2}}e^m, A^{\frac{1}{2}}\left(D^{-1}A\right)^{-\frac{1}{2}}\left(e^m - I_{m+1}^m e^{m+1}\right)\right\rangle \\ &\leq \left\|A^{\frac{1}{2}}\left(D^{-1}A\right)^{\frac{1}{2}}e^m\right\|\left\|A^{\frac{1}{2}}\left(D^{-1}A\right)^{-\frac{1}{2}}\left(e^m - I_{m+1}^m e^{m+1}\right)\right\| \\ &= \|e^m\|_2\left\|e^m - I_{m+1}^m e^{m+1}\right\|_0,\end{aligned} \tag{38}$$

где $A = A^m$ и $D = \mathrm{diag}(A^m)$. Используя (35) получим $\|e^m\|_1^2 \leq \beta\|e^m\|_2^2$ для всех $e^m \in im(T^m)$, откуда и следует, что $\|T^m e^m\|_1^2 \leq \beta\|T^m e^m\|_2^2$. Используя данное неравенство и (34) получим утверждение теоремы

$$\begin{aligned}\|S^m T^m e^m\|_1^2 &\leq \|T^m e^m\|_1^2 - \alpha_1\|T^m e^m\|_2^2 \leq \|T^m e^m\|_1^2 - \frac{\alpha_1}{\beta}\|T^m e^m\|_1^2 \\ &= \left(1-\frac{\alpha_1}{\beta}\right)\|T^m e^m\|_1^2 \leq \left(1-\frac{\alpha_1}{\beta}\right)\|e^m\|_1^2.\end{aligned} \tag{39}$$

□

Теорема 5.2. *Пусть $A^m > 0$ и для произвольного выбранного множества C^m-элементов I^m_{m+1} имеет вид (7), где $w^m_{ik} \geq 0$ и $\sum_{k\in C^m} w^m_{ik} \leq 1$. Тогда свойство (35) выполнено, если $\exists\ \beta > 0$ не зависящего от e^m такое что*

$$\begin{aligned}\sum_{i\in F^m}\sum_{k\in C^m} a^m_{ik}w^m_{ik}(e^m_i - e^m_k)^2 &\leq -\frac{\beta}{2}\sum_{i,j} a^m_{ij}(e^m_i - e^m_j)^2,\\ \sum_{i\in F^m} a^m_{ii}\left(1-\sum_{k\in C^m} w^m_{ik}\right)(e^m_i)^2 &\leq \beta\sum_i\left(\sum_j a^m_{ij}\right)(e^m_i)^2.\end{aligned} \tag{40}$$

Доказательство. Пусть $e^m = e$ задано произвольно, определим $e^{m+1}_k = e_k, \forall k \in C^m$. Тогда неравенство (35) имеет вид

$$\sum_{i\in F^m} a^m_{ii}\left(e_i - \sum_{k\in C^m} w^m_{ik}e_k\right)^2 \leq \beta\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j} a^m_{ij}\left(e_i - e_j\right)^2 + \sum_i\left(\sum_j a^m_{ij}\right)e^2_i\right). \tag{41}$$

Оценим левую часть неравенства (41) следующим образом

$$\begin{aligned}\sum_{i\in F^m} a^m_{ii}\left(e_i - \sum_{k\in C^m} w^m_{ik}e_k\right)^2 &= \sum_{i\in F^m} a^m_{ii}\left(\sum_{k\in C^m} w^m_{ik}(e_i-e_k) + \left(1-\sum_{k\in C^m} w^m_{ik}\right)e_i\right)^2\\ &\leq \sum_{i\in F^m}\sum_{k\in C^m} a^m_{ii}w^m_{ik}(e_i-e_k)^2 + \sum_{i\in F^m} a^m_{ii}\left(1-\sum_{k\in C^m} w^m_{ik}\right)e^2_i\end{aligned} \tag{42}$$

Используя (40) в (42) получим (41), т.е. (35) выполнено. □

Разобъем множество связей i-го элемента на два множества $\mathcal{N}^m_i = \mathcal{I}^m_i \cup \mathcal{D}^m_i$. Множество связей $\mathcal{I}^m_i \subseteq \mathcal{N}^m_i \cap C^m$ состоит из элементов которые используются при интерполяции, а $\mathcal{D}^m_i$ - которые пропускаются. Для элементов $k \in \mathcal{I}^m_i$ зададим веса

$$w^m_{ik} = \eta_i|a^m_{ik}|, \quad \forall i \in F^m, k \in \mathcal{I}^m_i, \tag{43}$$

где η_i параметр удовлетворяющий

$$0 \leq \eta_i \leq \left(\sum_{l\in\mathcal{I}^m_i} |a^m_{il}|\right)^{-1}, \tag{44}$$

введенный для выполнения условия $\sum_{k\in C^m} w^m_{ik} \leq 1$ теоремы (5.2). Чтобы выполнялось свойство (35) согласно теореме 5.2 достаточно потребовать $\forall i \in F^m, k \in \mathcal{I}^m_i$:

$$0 \leq a^m_{ii}w^m_{ik} \leq \beta|a^m_{ik}|, \quad 0 \leq a^m_{ii}\left(1-\sum_{k\in\mathcal{I}^m_i} w^m_{ik}\right) \leq \beta\sum_j a^m_{ij}. \tag{45}$$

Следствие 5.2.1. *Пусть $\beta \geq 1$ фиксировано, A^m - симметричная слабо диагонально - доминантная M-матрица, а множество C^m выбрано так, что $\forall i \in F^m : \exists\mathcal{I}^m_i \subseteq \mathcal{N}^m_i \cap C^m \neq \emptyset$ и выполняется свойство $\beta\left(a_{ii} + \sum_{j\in\mathcal{D}^m_i} a^m_{ij}\right) \geq a^m_{ii}$, определим веса интерполяции согласно (43) с $\eta_i = \left(a_{ii} + \sum_{j\in\mathcal{D}^m_i} a^m_{ij}\right)^{-1}$, тогда свойство (35) выполнено.*

Замечание 5.3. *Достаточно задать $\beta \geq 1$ и строить интерполятор автоматически согласно следствию 5.2.1 для заданного C/F-разбиения. Чем больше β, тем слабее (35) и тем хуже сходимость.*

Теорема 5.3. *Пусть A^m - симметричная слабо диагонально - доминантная M-матрица и веса интерполяции удовлетворяют* (45) *с* $\beta \le 2$, *тогда* A^{m+1} *имеет те же свойства, что и* A^m.

Доказательство. Заметим, что по определению A^{m+1} симметричная и положительно определенная. Покажем, что вне-диагональные элементы A^{m+1} не положительны. Выпишем их в явной форме:

$$a_{kl}^{m+1} = \sum_{i,j} w_{ik}^m a_{ij}^m w_{jl}^m, \quad \forall k, l \in C^m. \tag{46}$$

Так как $w_{ik}^m = \delta_{ik}$ для $i, k \in C^m$ и за счет симметрии получим

$$\begin{aligned} a_{kl}^{m+1} &= a_{kl}^m + \sum_{i \in F^m} (w_{ik}^m a_{il}^m + w_{il}^m a_{ik}^m) + \sum_{i \in F^m} \sum_{j \in F^m} w_{ik}^m a_{ij}^m w_{jl}^m \\ &= a_{kl}^m + \sum_{i \in F^m} w_{ik}^m \left(a_{il}^m + \frac{1}{2} \sum_{j \in F^m} w_{jl}^m a_{ij}^m \right) + \sum_{i \in F^m} w_{il}^m \left(a_{ik}^m + \frac{1}{2} \sum_{j \in F^m} w_{jk}^m a_{ij}^m \right). \end{aligned} \tag{47}$$

Согласно предположению $w_{ik}^m a_{ii}^m \le 2|a_{ik}^m|$ для $i \in F^m, k \in C^m$, получим

$$a_{ik}^m + \frac{1}{2} \sum_{j \in F^m} w_{jk}^m a_{ij}^m \le a_{ik}^m + \frac{1}{2} w_{ik} a_{ii}^m \le 0, \quad i \in F^m, k \in C^m, \tag{48}$$

откуда следует $a_{kl}^{m+1} \le 0$ для $k, l \in C^m, k \ne l$, *т.к.* $a_{kl}^m \le 0$ и $w_{ij}^m \ge 0, \forall i, j$.

Покажем, что A^{m+1} слабо диагонально доминантная. Посчитаем сумму k-ой строки A^{m+1} складывая выражения из (47)

$$\begin{aligned} \sum_{l \in C^m} a_{kl}^{m+1} &= \sum_{l \in C^m} a_{kl}^m + \sum_{i \in F^m} w_{ik}^m \left(\sum_{l \in C^m} a_{il}^m + \frac{1}{2} \sum_{j \in F^m} \left(\sum_{l \in C^m} w_{jl}^m \right) a_{ij}^m \right) \\ &+ \sum_{i \in F^m} \left(\sum_{l \in C^m} w_{il}^m \right) \left(a_{ik}^m + \frac{1}{2} \sum_{j \in F^m} w_{jk}^m a_{ij}^m \right) \\ &= \sum_{l} a_{kl}^m + \sum_{i \in F^m} w_{ik}^m \left(\sum_{l} a_{il}^m + \frac{1}{2} \sum_{j \in F^m} \left(\sum_{l \in C^m} w_{jl}^m - 1 \right) a_{ij}^m \right) \\ &- \sum_{i \in F^m} \left(1 - \sum_{l \in C^m} w_{il}^m \right) \left(a_{ik}^m + \frac{1}{2} \sum_{j \in F^m} w_{jk}^m a_{ij}^m \right) \ge 0, \end{aligned} \tag{49}$$

т.к. из (45) следует

$$\sum_{l} a_{il}^m + \frac{1}{2} \sum_{j \in F^m} \left(\sum_{l \in C^m} w_{jl}^m - 1 \right) a_{ij}^m \ge \sum_{l} a_{il}^m + \frac{1}{2} \left(\sum_{l \in C^m} w_{il}^m - 1 \right) a_{ii}^m \ge 0. \tag{50}$$

□

6 Вопросы

- Что называется сеткой в алгебраическом многосеточном методе? Что задает связи между элементами сетки? Что такое C/F-разбиение сетки?
- Какие операторы следует задать для построения алгебраического многосеточного метода? Какие свойства операторов должны выполняться для сходимости метода? Для каких

матриц верна теория о сходимости алгебраического многосеточного метода?

- Для чего используется оператор сглаживания? Какие методы могут быть использованы для реализации оператора сглаживания?
- Для чего используется оператор интерполяции? Какой самый простой метод выбора весов и связей оператора интерполяции? Почему этот метод не эффективен? При каких условиях система на грубой сетке сохраняет свои свойства?

Список литературы

[1] Ruge, John W., Stüben, Klaus "Algebraic Multigrid", Multigrid Methods, Society for Industrial and Applied Mathmetatics, 1987. pp. 73–130.

[2] Stüben, Klaus "A review of algebraic multigrid", Numerical Analysis: Historical Developments in the 20th Century, Elsevier, 2001. pp. 331–359