Лекция 4: Введение в многосеточный (MG) и многоуровневый (ML) методы

(конспект Когтенева Дмитрия, МФТИ)

1 Многосеточный метод (MG)

Пусть есть последовательность регулярных сеток $G_1, G_2, \ldots, G_m$, такая что

$$N_1 > N_2 > \ldots > N_m,$$

где $N_K = |G_K|$ - число элементов сетки. На каждой сетке дискретизируем одно и то же уравнение (например уравнение Пуассона $-\Delta U = f$). На k-й сетке имеем линейную систему

$$A_k x_k = b_k, \qquad A_k \in \mathbb{R}^{N_k \times N_k},\ x_k, b_k \in \mathbb{R}^{N_k}$$

Введем операторы

$$I_{k+1}^{k} : \underset{\text{(грубая сетка)}}{\mathbb{R}^{N_{k+1}}} \longrightarrow \underset{\text{(мелкая сетка)}}{\mathbb{R}^{N_k}} \qquad \text{интерполяция (пролонгация)}$$

$$I_{k}^{k+1} : \underset{\text{(мелкая сетка)}}{\mathbb{R}^{N_k}} \longrightarrow \underset{\text{(грубая сетка)}}{\mathbb{R}^{N_{k+1}}} \qquad \text{сужение (рестрикция)}$$

$$S^k : \mathbb{R}^{N_k} \longrightarrow \mathbb{R}^{N_k} \qquad \text{сглаживание}$$

Возможные виды сглаживателей

а) **Метод Гаусса-Зейделя**. Матрица A представляется в виде $A = L + D + U$, D - диагональная матрица, L, U - соответсвенно нижне- и верхнетреугольная матрица.

1) $(L + D)x^{n+1} = b - Ux^n$
2) $(U + D)x^{n+1} = b - Lx^{n+1}$

б) **Метод Якоби.** Аналогично, $A = L + D + U$.

$$Dx^{n+1} = b - (L + U)x^n$$

в) **Метод ILU.**

Невязка $r_m = A_m x_m - b_m$ дана за счет последовательности сеток.

Алгоритм 1 V-цикл $(\underset{(\text{in})}{k}, \underset{(\text{out})}{x_k}, \underset{(\text{in})}{b_k})$

$x_k = S_k x_k$ ▷ пре-сглаживание
$r_k = A_k x_k$
$b_{k+1} = I_k^{k+1} r_k$ ▷ сужение
$\varepsilon_k = 0$
Если $k+1 < m$ **тогда**
    V-цикл $(k+1, \varepsilon_{k+1}, b_k)$
иначе
    $\varepsilon_{k+1} = A_{k=1}^{-1} b_{k+1}$
Конец если
$x_k = x_k + I_{k+1}^k \varepsilon_{k+1}$ ▷ пролонгация и коррекция
$x_k = S_k x_k$ ▷ пост-сглаживание

Алгоритм 2 {W,F}-цикл (k, x_k, b_k)

$x_k = S_k x_k$ ▷ пре-сглаживание
$r_k = A_k x_k$
$b_{k+1} = I_k^{k+1} r_k$ ▷ сужение
$\varepsilon_k = 0$
Если $k+1 < m$ **тогда**
    {W,F}-цикл $(k+1, \varepsilon_{k+1}, b_k)$
иначе
    $\varepsilon_{k+1} = A_{k=1}^{-1} b_{k+1}$
Конец если
$x_k = x_k + I_{k+1}^k \varepsilon_{k+1}$ ▷ пролонгация и коррекция
$x_k = S_k x_k$ ▷ сглаживание
$r_k = A_k x_k$
$b_{k+1} = I_k^{k+1} r_k$
$\varepsilon_k = 0$
Если $k+1 < m$ **тогда**
    {W,V}-цикл $(k+1, \varepsilon_{k+1}, b_{k+1})$
иначе
    $\varepsilon_{k+1} = A_{k=1}^{-1} b_{k+1}$
Конец если
$x_k = x_k + I_{k+1}^k \varepsilon_{k+1}$
$x_k = S_k x_k$ ▷ пост-сглаживание

Покажем, что V-цикл имеет линейную сложность по времени. Обозначим $\rho_i = \dfrac{N_{i+1}}{N_i}$ и будем считать, что $\rho_i \sim \rho$, $0 < \rho < 1$. Обозначим C_k - сложность алгоритма на k-м уровне. Для C_k верно рекуррентное соотношение $C_k = C_{k+1} + \rho_k N_k$, поэтому

$$C_1 = N_1 \sum_{i=1}^{m} \rho^i \leq N_1 \frac{1}{1-\rho} = O(N_1)$$

2 Многоуровневый метод (ML)

Пусть есть система $Ax = b$. Представим матрицу A в виде $A = \begin{bmatrix} B & E \\ F & C \end{bmatrix}$. Тогда

$$A = \begin{bmatrix} B & E \\ F & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \\ EB^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & \\ & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & B^{-1}F \\ & I \end{bmatrix},$$

где $S = C - EB^{-1}F$ - дополнение по Шуру.

Пусть $x = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$, тогда исходная система принимает вид

$$\begin{bmatrix} B & E \\ F & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

Шаги решения системы:

1) $\tilde{f} = B^{-1}f$ - сглаживание
2) $\tilde{g} = g - E\tilde{f}$ - рестрикция
3) $y = S^{-1}\tilde{g}$ - решение на грубом уровне
3) $u = f - B^{-1}Fy$ - пролонгация, коррекция и сглаживание

Метод может быть вложенным, если при вычислении S^{-1} делать рекурсивный вызов.

Возможные варианты получения матриц B, E, F, C:

1) DDPQ-перестановка. От системы $AX = b$ переходим к системе

$$PAQ^TQx = Pb,$$

где P - перестановка строк, Q - перестановка столбцов. Матрицы P, Q выбираются таким образом, чтобы наибольшие элементы матрицы A переместились на главную диагональ.

2) Вложенное рассечение.

3) Выбираем такое B, чтобы нормы $\|L^{-1}\|$ и $\|U^{-1}\|$ были малы.

3 Алгебраический многосеточный метод (AMG)

Отличия от метода MG

1) Нет сеток или сетки неструктурированы

2) Сложная геометрия

Необходимые операторы

I_{m+1}^{m} - интерполяция;
I_{m}^{m+1} - сужение;
A_{m+1} - система на грубом уровне;
S_m - сглаживатель;
$T_m = I - I_{m+1}^{m}(A_m)^{-1}I_{m}^{m+1}$ - проектор.

Если $(I_{m+1}^m)^T = I_m^{m+1}$ и $A_{m+1} = I_m^{m+1} A_m I_{m+1}^m$, то T_m - ортогональный проектор.

Необходимо построить интерполцию. Пусть (G_m, V_m) - граф матрицы A_m. Введем разделение

$$\begin{aligned}&C_m \cup F_m = V_m\\&C_m \text{ - элементы грубой сетки}\\&F_m \text{ - элементы мелкой сетки}\end{aligned}$$

C_m - это максимальное независимое подмножество графа (G_m, V_m).

Аналогично методу ML получаем

$$A = \begin{bmatrix} CC & CF \\ FC & FF \end{bmatrix}$$

$$I_{m+1}^m = \begin{bmatrix} I \\ -(FF)^{-1} FC \end{bmatrix},\ I_m^{m+1} = \begin{bmatrix} I & -CF(FF)^{-1} \end{bmatrix}.$$

На практике оператор строится из предположении о знании вектора $\mathbf{z}$ вблизи ядра матрицы $A\mathbf{z} \approx 0$. Для эллиптических систем $\mathbf{z} \approx \mathbf{1}$, таким образом константное решение должно точно переноситься на следующий уровень.