Лекция 1. Происхождение СЛАУ

Набрала: Копнина Ирина, 403 группа

23 апреля 2023 г.

1 Введение

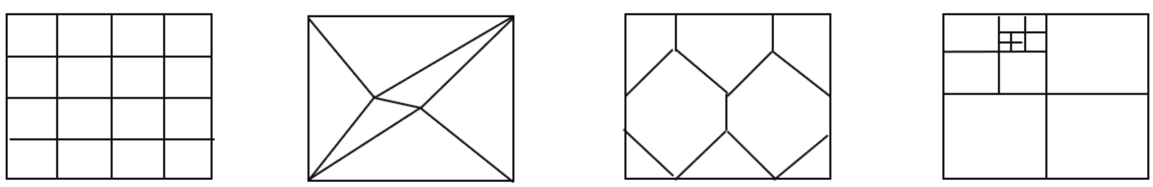
Решаем систему

$$Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{N\times N}\ x \in \mathbb{R}^N,\ b \in \mathbb{R}^N$$

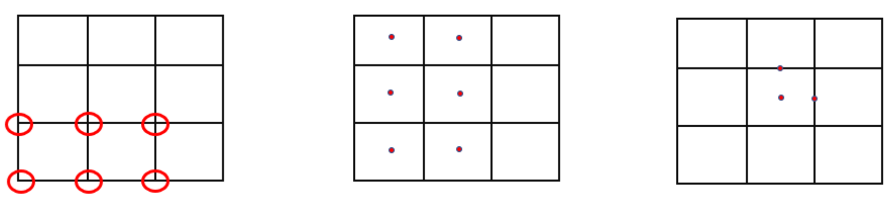
Если число элементов $a_{ij} \neq 0$ мало, то матрица A разреженная.(Если велико, то плотная)

Задачи математической физики:

1. $-\Delta p = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = b$ - уравнение Пуассона (эллиптическая система)
2. $\frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = b$ (параболическая система)
3. $(\vec{u}\cdot\Delta)c - D\Delta c = b$ (гиперболическая система при $D = 0$ + эллиптическая = смешанная)
4. $\begin{cases} -div(\mu\Delta\vec{u}) + \Delta p = b \\ -div(\Delta\vec{u}) = 0 \end{cases}$ - Задача Стокса (седловая система)



регулярная треугольная неструктурированная адаптивная(AMR)



p в узлах
метод конечных элементов
метод конечных разностей

p в центрах
метод конечных объемов

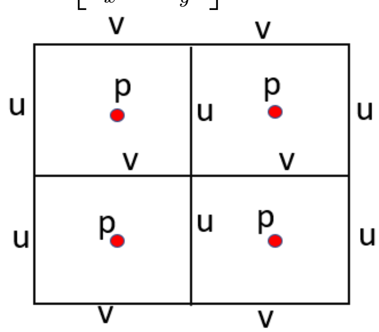
p в ячейках и гранях
гибридные конечные элементы
метод миметических разностей

2 Задача Стокса

$$\begin{cases} -\mu\Delta\vec{u} + \Delta p = 0 \\ \Delta\vec{u} = 0 \end{cases}$$

$\vec{u} = [u, v]$ - скорость, p - давление

$\Delta\vec{u} = \begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix}$, $(\Delta\vec{u})\Delta = \begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x \\ \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{xx} u + \partial_{yy} u \\ \partial_{xx} v + \partial_{yy} v \end{bmatrix}$

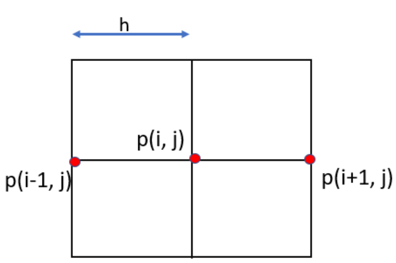


3 Построение СЛАУ для МКР системы Пуассона

$$-\Delta p = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = b$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \approx \frac{p(i+1,j) - 2p(i,j) + p(i-1,j)}{h^2}$$

$$-\Delta p = \frac{4p(i,j) - p(i-1,j) - p(i+1,j) - p(i,j-1) - p(i,j+1)}{h^2}$$



Строка для (i,j) элемента $\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(i,j) \\ p(i-1,j) \\ p(i+1,j) \\ \dots \end{bmatrix} = b_{ij}$

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(i,j) \\ p(i+1,j) \\ p(i,j-1) \\ p(i,j-1) \end{bmatrix} = b_{ij} + \frac{p_b}{h^2}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & \dots \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & \dots \\ & & \dots & & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2p_b}{h^2} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Получаем разреженное СЛАУ

4 МКО - Метод конечных объемов

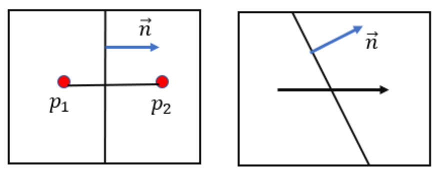
$$-\Delta^T(\Delta p) = b \Rightarrow -\int_V \Delta^T(\Delta p)\, dV = \int b\, dV$$

Теорема Гаусса-Остроградского

$$\oint_{\partial V} dS^T(\Delta p) = \int v dV$$

Апппроксимация интеграла 2-ого порядка

$$\sum_{\sigma \in \partial V} \vec{n}^T \Delta p = |v| b_i$$



$$n^T \Delta p \approx \frac{p_2 - p_1}{h}$$

$$n^T \Delta p \approx \frac{p_2 - p_1}{h} + (\vec{n} - \frac{\vec{x_2} - \vec{x_1}}{h})^T \Delta p$$

$-\Delta p = b$ - Метод миметических разностей

$$(\vec{x_{f_i}} - \vec{x_1})\Delta p \approx p_{f_i} - p_1$$

$$R_{\Delta p} = p_f - \vec{1} p_1$$

$$\begin{bmatrix} x_{f_1} - x_1 \\ \vdots \\ x_{f_\sigma} - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x p \\ \partial_y p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{f_1} \\ \vdots \\ p_{f_\Sigma} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} p_1$$

$$\sum_{\sigma \in \partial V} \vec{n}^T \Delta p = |v| b_i \approx \vec{1}^T Q$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_6 \end{bmatrix} = N \Delta p = \begin{bmatrix} |\sigma_1| \vec{n_1}^T \\ \vdots \\ |\sigma_6| \vec{n_6}^T \end{bmatrix} \Delta p$$

$$WR = N$$

$$6 \times 6 \;\; 2 \times 2 \;\; 6 \times 2$$

$Q = WR\Delta p = N\Delta p = W(p_f - \vec{1} p_1)$
$W = N(N^T R)^{-1} N^T + \mu(I - R(R^T R)^{-1} R^T) = 1^T W (P_f - 1 p_1) = b$

5 Задача Стокса

$$\begin{cases} -\mu\Delta\vec{u} + \Delta p = 0 \\ \Delta\vec{u} = 0 \end{cases}$$

$$\Delta\vec{u} = \begin{bmatrix} \partial^2_{xx}u + \partial^2_{yy}u \\ \partial^2_{xx}v + \partial^2_{yy}v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & ... & & & & \\ & & & 0 & ... & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(i+1,j) \\ u(i,j+1) \\ u(i,j) \\ u(i-1,j) \\ v(i+1,j) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} B & C^T \\ -C^T & 0 \end{bmatrix}$ - седловая система

6 Пакеты для решения системы СЛАУ

- Petsc, trilinos, Hypre - разреженные системы, открытые, итерационные
- Mumps, SuperLu - разреженные системы, прямые методы
- Pardiso - прямые, ILUPACK - разреженные, XSAMG - многосеточные