

Российская академия наук

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ РАН (ИВМ РАН)

УДК 519.6

№ госрегистрации

Инв.№

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИВМ РАН
чл.-корр.

_____ Е.Е.Тыртышников
«__» _____ 2010 г.

Государственный контракт от «01» декабря 2010 г. № 14.740.11.0844
Шифр «2010-1.1-400-150-053»

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

В рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры
инновационной России» на 2009-2013 годы

по теме:
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ДИАГНОСТИКИ
И МОНИТОРИНГА СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТЫХ И РЕСПИРАТОРНЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ
(промежуточный, этап № 1)

Наименование этапа: «Выбор оптимального направления исследований»

Руководитель НИР, зам. директора ИВМ РАН,
д. ф.-м. н., доцент

подпись, дата

Ю. В. Василевский

Москва 2010

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы,
д.ф.-м.н.,
зам. директора ИВМ РАН

Ю.В. Василевский (введение,
раздел 6, заключение)

подпись, дата

Исполнители темы

д.ф.-м.н.,
профессор МГУ им. М.В.
Ломоносова

М.А. Ольшанский (разделы 1,2)

подпись, дата

чл.-корр. РАН,
директор ИВМ РАН

Е.Е. Тыртышников (раздел 2)

подпись, дата

к.ф.-м.н.,
с.н.с. ИВМ РАН

В.Н. Чугунов (раздел 3)

подпись, дата

к.ф.-м.н.,
с.н.с. ИВМ РАН

С.Г. Руднев (раздел 1)

подпись, дата

к.ф.-м.н.,
н.с. ИВМ РАН

И.В. Капырин (раздел 3)

подпись, дата

к.ф.-м.н.,
н.с. ИВМ РАН

С.Л. Ставцев (разделы 1,2)

подпись, дата

к.ф.-м.н.,
доцент МФТИ

С.С. Симаков (раздел 1)

подпись, дата

к.ф.-м.н.,
м.н.с. ИБРАЭ РАН

В.Ю. Саламатова (разделы 1,2,4,5)

подпись, дата

н.с. ИВМ РАН

А.А. Данилов (разделы 2,3,5)

подпись, дата

н.с. ИВМ РАН

К.Д. Никитин (разделы 2,3)

подпись, дата

аспирант ИВМ РАН	_____	А.Ю. Чернышенко (разделы 3,5)
	подпись, дата	
аспирант ИВМ РАН	_____	К.М. Терехов (разделы 3,5)
	подпись, дата	
аспирант НОУ ИЭСО	_____	Ю.А. Иванов (раздел 5)
	подпись, дата	
аспирантка МГУ им. М.В. Ломоносова	_____	Т.К. Добросердова (раздел 3,5)
	подпись, дата	
студентка МГУ им. М.В. Ломоносова	_____	А.В. Титова (раздел 5)
	подпись, дата	
студентка МГУ им. М.В. Ломоносова	_____	А.С. Юрова (раздел 5)
	подпись, дата	
студент МГУ им. М.В. Ломоносова	_____	А.М. Головкин (раздел 5)
	подпись, дата	
студент МГУ им. М.В. Ломоносова	_____	Г.Н. Лутидзе (раздел 3)
	подпись, дата	
студентка МФТИ	_____	Е.Ю. Саламатова (раздел 5)
	подпись, дата	
студент МФТИ	_____	С.В. Долгов (раздел 5)
	подпись, дата	
Нормоконтролер вед. специалист ИВМ РАН	_____	А.А. Загуменных
	подпись, дата	

Реферат

Отчет 64 с., 1 ч., 23 рис., 5 табл., 73 источн., 2 прил.

ИМПЕДАНС, ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ, ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ, ФУНКЦИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ТРЕХМЕРНЫЕ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫЕ СЕТКИ.

Исследование посвящено разработке конечно-элементной модели тела человека как проводящей гетерогенной структуры для задач электроимпедансной диагностики.

Целью данной работы является выбор оптимального направления исследования и разработка основных расчетных модулей.

Сделан аналитический обзор работ по основным компонентам разработанного алгоритма решения задач. Особое внимание уделено тетраэдральным сеткам, для которых существуют автоматические генераторы сеток.

На примере упрощенной модели было показано осуществление предложенного алгоритма решения задач по исследованию пассивных электрических свойств тела человека и получены результаты для функции чувствительности. Определены пути дальнейшего усовершенствования разработанных методов.

Проведены патентные исследования.

Полученные результаты найдут применение для повышения точности методов электроимпедансной диагностики.

Оглавление

Введение	7
1. Анализ современного состояния аналогичных работ в ведущих мировых центрах по теме проекта	9
2. Выбор общей структуры алгоритма, выделение основных расчетных модулей и методов решения задач. Оценка требуемых информационных ресурсов	15
3. Построение пространственной расчетной сетки для упрощенной (цилиндрической) модели туловища человека; оценка необходимых вычислительных ресурсов	24
4. Проведение патентных исследований	39
5. Численные эксперименты для упрощенной модели туловища человека по расчету полей потенциалов, плотностей тока и функций чувствительности	41
6. Анализ и описание ожидаемых результатов НИР	52
Заключение	53
Приложение А	54
Приложение Б	57
Литература	58

Определения, обозначения и сокращения

U – электростатический потенциал

Ω – исследуемая область

$\partial\Omega$ – граничная поверхность исследуемой области

Γ_{\pm} – область контакта провода токовых электродов

\mathbf{n} – внешняя нормаль к граничной поверхности тела

S_0 – площадь контакта электрода

C – тензор электрической проводимости

\mathbf{J} – плотность тока

I, I_{\pm} – величина зондирующего тока

C_R, C_I – вещественная и мнимая части тензора проводимости

U_R, U_I – вещественная и мнимая части тензора проводимости

S – функция чувствительности

ρ – удельное сопротивление

h – шаг сетки

C_{ij} – компоненты тензора проводимости относительно декартовой системы координат

$C_{kl}^{(nat)}$ – компоненты тензора проводимости относительно естественного трехгранника

A – матрица направляющих косинусов

Введение

Развитие возможностей медицинской измерительной техники и появление производительных вычислительных комплексов позволяют ставить и решать новые задачи в областях медицинской диагностики и мониторинга. Одним из современных диагностических методов является электроимпедансная диагностика, методы и возможности которой широко развиваются и расширяются, чему способствуют гибкость и высокая степень адаптируемости к конкретным задачам и объектам исследования.

Электроимпедансная диагностика (биоимпедансная спектроскопия, томография) основана на измерениях электрической проводимости тела человека и дает возможность оценки широкого спектра морфологических и физиологических параметров. Общую гидратацию организма определяют на основе электроимпедансной диагностики с использованием серийно выпускаемых биоимпедансных анализаторов состава тела. Для оценки центрального объема кровообращения применяется гемодинамический анализатор Nicomo фирмы CardioDynamics Medis (США, Германия). В России на базе биоимпедансного анализатора АВС-01 “Медасс” разработаны и внедрены методики и программы для оценки гидратации десны и головного мозга. Получены первые результаты оценки степени гидратации легких у российских космонавтов в условиях невесомости и при нагрузочных пробах в наземных экспериментах. Для мониторинга больных сердечно-сосудистыми и респираторными заболеваниями актуальна задача создания прикроватного монитора гидратации легких.

Для повышения точности электроимпедансной диагностики необходимо на основе математического моделирования решать задачи о локализации областей измерений, оптимизации частотного диапазона и конфигурации электродных систем. Таким образом, одной из решаемых задач в рамках настоящей научно-исследовательской работы является разработка информационно-вычислительной технологии электроимпедансной диагностики на основе конечно-элементной модели тела человека как проводящей гетерогенной структуры. Основными компонентами, необходимыми для создания подобного инструментария являются: методы автоматического построения пространственных расчетных сеток для реалистичной геометрии тела; генерация конечно-элементной модели на базе расчетных сеток; методы решения систем дифференциальных уравнений в частных производных с анизотропными тензорами коэффициентов. Обзор работ, посвященных решению данных проблем, и анализ состояния исследований в предметной области настоящей научно-исследовательской работы приведены в разделе 1 отчета.

В разделе 2 дана характеристика общей структуры алгоритма решения задачи и выделены основные расчетные модули. Разделы 3 и 5 посвящены описанию реализации расчетных модулей и методов исследования пассивных электрических свойств тела человека на примере упрощенной модели туловища человека.

В разделе 4 подведен итог патентных исследований, суммированных в отдельном приложении к научно-техническому отчету.

1. Анализ современного состояния аналогичных работ в ведущих мировых центрах по теме проекта

Актуальной проблемой клинической медицины в условиях интенсивной терапии и гемодиализа является проблема мониторинга общей и локальной (легкие, головной мозг, конечности) гидратации тела человека. Нарушения гидратации являются частыми следствиями развития сердечно-сосудистых и респираторных заболеваний. Доступное решение указанной проблемы обеспечивается на основе методов электроимпедансной диагностики, таких как биоимпедансная спектроскопия и томография.

Биоимпедансный анализ – это контактный метод измерения электрической проводимости биологических тканей, который дает возможность определить широкий спектр морфологических и физиологических параметров организма. Биоимпедансные методы позволяют оценить степень гидратации тканей и нарушений водного баланса, контролировать состояние липидного, белкового и водного обмена организма, также позволяют определять гемодинамические показатели в отдельных сегментах организма [1, 2] Метод основан на измерении импеданса (полного электрического сопротивления) всего тела или отдельных сегментов тела с использованием специальных приборов – биоимпедансных анализаторов.

Большая часть расчетных формул для определения биометрических параметров сегмента тела основана на предположениях об однородности электрического поля между потенциальными электродами и о цилиндрической геометрии исследуемого сегмента тела. Для дальнейшего развития биоимпедансного анализа анизотропных биологических объектов необходимо отказаться от требования однородности электрического поля между потенциальными электродами и перейти к исследованию объектов более сложной формы. Таким образом, важной задачей данного направления является построение и исследование математических моделей, характеризующих пространственную неоднородность электрического поля в трехмерном объекте (тело человека) с реалистичной геометрией и анизотропной проводимостью при заданном размещении токовых электродов.

Данная работа посвящена начальному этапу создания информационно-вычислительной технологии электроимпедансной диагностики на основе конечно-элементной модели тела человека как проводящей гетерогенной структуры для упрощенной (цилиндрической) модели туловища человека.

В рамках предметной области темы работы ведутся исследования в ряде ведущих мировых научных центров. Сформулированы и решаются научные и прикладные задачи

импедансной кардиографии и электрофизиологии. В работах Patterson и коллег (University of Minnesota, USA) [3, 4] на основе реалистичной геометрической модели грудной клетки исследуется вклад легких в величину общего измеренного импеданса при различных конфигурациях электродных систем, и оценивается влияние анизотропных свойств тканей на распределение функции чувствительности в рассматриваемой области. Изучены схемы измерений, используемые в методах биоимпедансной кардиографии с подробной детализацией топографической анатомии сердца [5], исследованы методы измерения электрических полей в трехмерном представлении тела человека [6], разработана конечно-элементная модель абдоминальной области туловища для оценки содержания жировой ткани методом биоимпедансометрии, получены первые результаты, иллюстрирующие возможность решения задачи указанным методом [7]. В России для анализа областей чувствительности биоимпедансных измерений использовались двумерные модели электрической проводимости тела [8].

1.1. Общая характеристика задачи

Исследование пассивных электрических свойств организма человека является комплексной междисциплинарной задачей. Для реализации методов локального анализа состояния органов и тканей требуется разработать соответствующую информационно-вычислительную платформу. В частности, решение практических задач состоит из следующих последовательных этапов: построение реалистичной геометрической модели тела человека, разработка технологии генерации расчетных сеток для изучаемых областей, решение уравнения Пуассона с комплекснозначным и неоднородным в исследуемых областях тензором проводимости. Остановимся на основных моментах математического моделирования подробнее.

Построение реалистичной геометрической модели тела человека

Национальной медицинской библиотекой США реализован проект Visible Human Project по созданию базы данных топографических анатомии тел мужчины и женщины [9]. Между ИВМ РАН и Национальной медицинской библиотекой США заключен договор на использование этих данных в научных целях (от 29 сентября 2010 г.). Пример среза, проходящего через сердце мужчины, представлен на Рисунок 1.

На основе данного проекта разрабатываются технологии обработки плоских изображений для реконструкции пространственной геометрии [10, 11, 12], которые могут использоваться для воссоздания трехмерных реалистичных моделей тела человека. На Рисунок 2 представлена среда ИТК-SNAP для обработки трехмерных массивов данных.



Рисунок 1 – Срез тела мужчины, проект Visible Human Project.

На данном ресурсе [13] содержатся уже обработанные и подготовленные данные в формате DICOM для некоторых частей тела с разрешением $1\text{мм} \times 1\text{мм} \times 1\text{мм}$. На Рисунок 3 изображена верхняя часть туловища мужчины в формате DICOM.

Генерация поверхностной и пространственной расчетных сеток для сложных областей с учетом их геометрических особенностей

Данный этап является основным для построения конечно-элементной модели на базе ее геометрического прототипа. Существуют различные методы генерации расчетных сеток. Некоторые из них с описанием конкретных приложений освещены в монографии [14]. Ряд работ посвящен разработке алгоритмов построения пространственных неструктурированных расчетных сеток для областей различной конфигурации [15-19]. При решении задач в рамках настоящего проекта использовались разработки сотрудников ИВМ РАН [20] по автоматическому построению тетраэдральных сеток.

Решение уравнения Пуассона с анизотропным и неоднородным тензором проводимости

Обзор методов численного решения уравнения Пуассона относительно электрического потенциала (конечно-разностный метод, конечно-элементный метод, метод граничных элементов) приводится в работе [21].

В нашем проекте предлагается использовать библиотеки пакета Ani3D, разработанные коллективом ИВМ РАН [22-34] и находящиеся в свободном доступе [20]. С помощью пакета

Аni3D строится конечно-элементная модель на основе ранее сгенерированной расчетной сетки и находится узловое решение уравнения Пуассона при заданных граничных условиях.

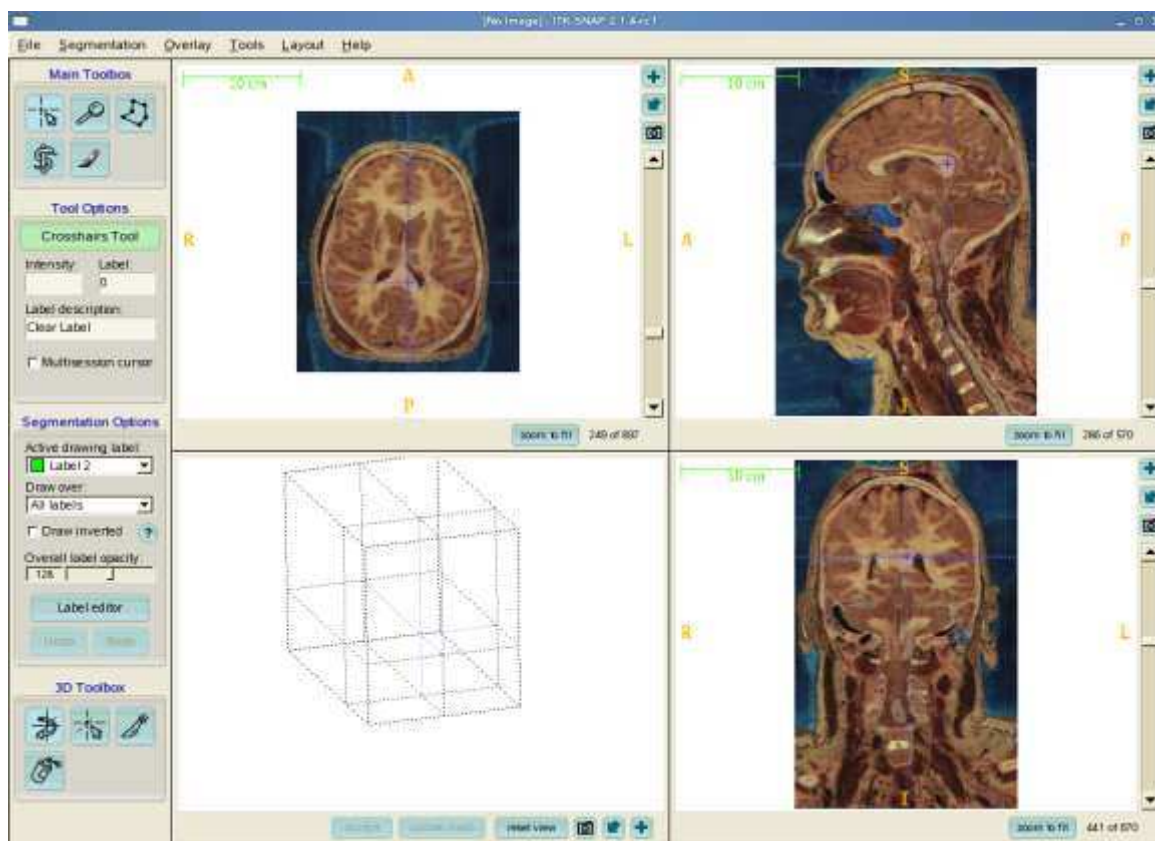


Рисунок 2 – Программная среда ITK-SNAP, трехмерный массив данных на основе срезов головы женщины.

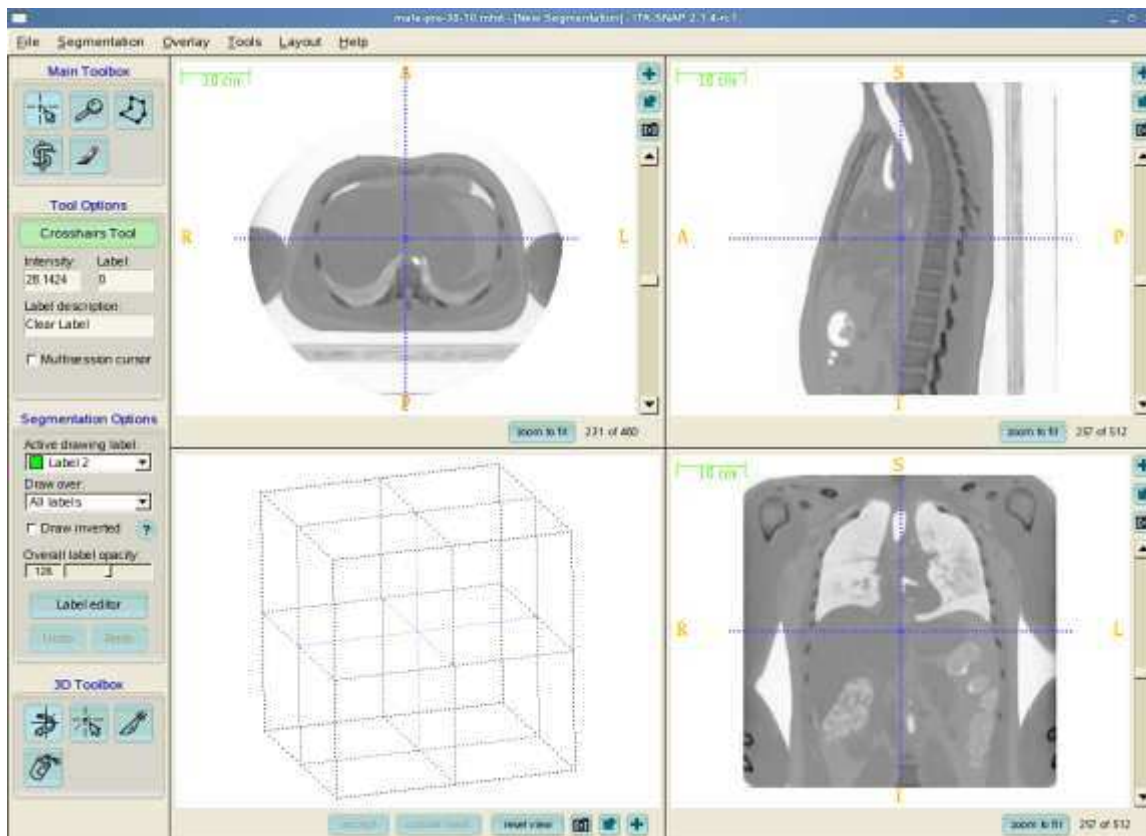


Рисунок 3 – Верхняя часть туловища мужчины в формате DICOM.

1.2. Инициализация математической модели

Исследованию проводимости различных тканей и органов тела человека посвящено множество работ на протяжении последних 100 лет. В работах [35-37] был проведен мета-анализ данных, итогом чего явилась публикация базы данных с описанием диэлектрических свойств (диэлектрическая проницаемость и проводимость) тканей и органов тела человека («1996 database»). Эта база данных широко используется, в частности, в области электромагнитной дозиметрии и находится в свободном доступе [38]. В приложении А приведена таблица значений диэлектрической проводимости некоторых тканей и органов тела человека, взятых из данного ресурса.

Особенностью указанной базы данных является использование измерений *in vitro*. Изучению диэлектрических свойств тканей *in vivo* на примере тканей животных посвящена более поздняя публикация Gabriel et al [39], там же представлен обзор существующих исследований по теме. В работе сотрудников НТЦ «Медасс» [40] анализируется частотная зависимость комплексного импеданса, описываемая моделью Коула, и источники погрешностей при измерениях биологических тканей *in-vivo*. Модель Коула также применялась в работах [36, 37] при описании диэлектрических свойств биологических

тканей *in vitro*. Работа [41] посвящена новому подходу для устранения так называемого Hook Effect (артефакта при биоимпедансной спектроскопии). В монографиях [2, 42] приводятся значения диэлектрических параметров некоторых органов и тканей тела человека и результаты по изучению проводимости скелетных мышц и нервных волокон.

При численных расчетах в настоящей работе использовались значения проводимостей, приведенные в Приложении А.

В настоящее время получили развитие методы электроимпедансной томографии (EIT), которая дает возможность реконструировать трехмерное распределение электропроводности в неоднородных (гетерогенных) областях и, в частности, в средах, доступных для зондирования только с участка ограничивающей поверхности [43].

2. Выбор общей структуры алгоритма, выделение основных расчетных модулей и методов решения задач. Оценка требуемых информационных ресурсов

В этом разделе мы сначала сформулируем математическую постановку задачи, затем рассмотрим возможные способы ее решения, разработаем и обоснуем общую структуру алгоритма.

2.1. Математическая модель

При моделировании биоэлектрических процессов в неоднородных средах используется уравнение Пуассона с неоднородными коэффициентами:

$$\operatorname{div}(\mathbf{C} \cdot \operatorname{grad} U) = 0 \text{ в } \Omega \quad (1)$$

с граничными условиями

$$(\mathbf{J}, \mathbf{n}) = I_{\pm} / S_0 \text{ на } \partial\Omega_{\pm} \quad (2)$$

$$(\mathbf{J}, \mathbf{n}) = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \Gamma_{\pm} \quad (3)$$

$$U(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{C} \cdot \operatorname{grad} U \quad (5)$$

где U – потенциал, Ω – исследуемая область, $\partial\Omega$ – граничная поверхность данной области, Γ_{\pm} – область контакта провода токовых электродов, \mathbf{n} – внешняя нормаль к граничной поверхности тела, \mathbf{C} – тензор электрической проводимости, \mathbf{J} – плотность тока, I_{\pm} – величина зондирующего тока, S_0 – площадь контакта электрода. Уравнение (1) описывает распределение электрического тока в среде с неоднородными коэффициентами проводимости \mathbf{C} . Уравнение (2) задает фиксированную плотность тока на контактных поверхностях электродов. Однородные условия Неймана (3) на границе заданы в предположении, что электрический ток не распространяется во внешней среде. Из уравнения (4) следует единственность решения задачи, в этом уравнении (x_0, y_0, z_0) – некоторая точка в области Ω .

Отметим основные особенности этой модели. Можно считать, что электрическая проводимость является кусочно-постоянной величиной и меняется при переходе от одного органа к другому. Проводимости тканей зависят от частоты электрического тока и имеют как активную, так и реактивную составляющую. Некоторые ткани, например, мышцы и нервные волокна обладают анизотропной проводимостью. Таким образом, в общем случае тензор проводимости \mathbf{C} является комплексным, кусочно-постоянным, полным, возможно анизотропным, симметричным, положительно-определенным. Потенциал U , и плотность тока \mathbf{J} также являются комплексными величинами.

Мы можем переписать уравнение (1) с комплексными коэффициентами в виде системы из двух дифференциальных уравнений в частных производных с вещественными коэффициентами. Для этого представим проводимость и потенциал в следующем виде: $C = C_R + iC_I$, $U = U_R + iU_I$. После эквивалентных преобразований уравнение (1) запишется в форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(C_R \cdot \operatorname{grad} U_R) - \operatorname{div}(C_I \cdot \operatorname{grad} U_I) &= 0 && \text{в } \Omega \\ \operatorname{div}(C_R \cdot \operatorname{grad} U_I) + \operatorname{div}(C_I \cdot \operatorname{grad} U_R) &= 0 && \text{в } \Omega \end{aligned} \quad (6)$$

Основываясь на работе [44], вводится функция чувствительности, которая характеризует влияние локальных сопротивлений на общий результат, то есть позволяет судить о вкладах конкретных областей в общий результат измерений. Функцию чувствительности S согласно [2] можно определить как скалярное произведение двух полей относительных плотностей тока

$$S = \mathbf{J}_{cc} \mathbf{J}_{rec}, \quad \Delta U = \int_V S(x, y, z) \cdot \Delta \rho(x, y, z) dv \quad (7)$$

где $\mathbf{J}_{cc} = \mathbf{J}/I$ – относительная плотность тока при данных токовых электродах, I – величина зондирующего тока; $\mathbf{J}_{rec} = \mathbf{J}_2/I$, где \mathbf{J}_2 плотность тока, полученная при решении задачи в случае, когда потенциальные электроды меняются на токовые, ΔU – изменение выходного напряжения; $\Delta \rho$ – изменение удельного сопротивления. Таким образом, из формулы (7) следует, что при прочих равных условиях области с относительно большими значениями функции чувствительности дают больший вклад в изменение выходного напряжения.

2.2. Построение расчетных сеток

При построении расчетных сеток нужно учитывать как границы между областями (органами) с различными биоэлектрическими свойствами, так и иметь возможность локально измельчать сетку вблизи заданных особых точек расчетной области (вблизи электродов).

Конформные тетраэдральные сетки широко известны как наиболее подходящие для дискретизации сложных областей. Конформной сеткой будем называть сетку, любые два элемента которой либо не имеют общих точек, либо имеют ровно одну общую вершину, либо одно общее ребро, либо одну общую грань. Тетраэдральные конформные сетки давно применяются в таких областях как вычислительная гидродинамика и вычислительная механика. Одним из преимуществ тетраэдральных сеток является возможность локального измельчения и построения сеток для очень сложных областей.

Можно выделить два недостатка тетраэдральных сеток при моделировании процессов в сложных областях.

Первый недостаток связан с вычислительной сложностью методов дискретизации дифференциальных уравнений на тетраэдральных сетках. Количество граней $N(F)$ и элементов $N(E)$ для конформной тетраэдральной сетки (см. Рисунок 4, справа) в среднем достигает $11 N(V)$ и $5.5 N(V)$ соответственно, где $N(V)$ – количество вершин. В то время как для конформных гексаэдральных сеток (см. Рисунок 4, слева) $N(F) \sim 3 N(V)$, $N(E) \sim N(V)$. Если сравнить тетраэдральную сетку и гексаэдральную сетку с одинаковым распределением вершин, то дискретизация дифференциального уравнения на тетраэдральной сетке породит систему линейных уравнений большего порядка и с большим количеством ненулевых элементов в матрице по сравнению с дискретизацией на гексаэдральных сетках.

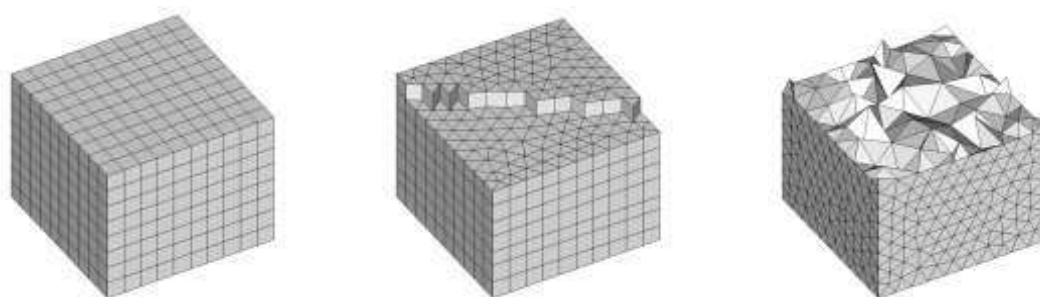


Рисунок 4 – Разные типы сеток: гексаэдральные, призматические и тетраэдральные.

Второй недостаток связан с естественной анизотропией некоторых частей расчетной области (например, слой кожи). Анизотропные тетраэдральные сетки могут иметь элементы с очень острыми двугранными углами, что в свою очередь может привести к ухудшению качества дискретизации уравнений на них. Таким образом, использование анизотропных тетраэдральных сеток должно быть согласовано с особенностями методов дискретизации или с геометрическими особенностями области.

Использование гексаэдральных сеток видится наиболее привлекательным при моделировании процессов в достаточно простых областях. Однако необходимость точного разрешения геометрических особенностей и сложная геометрия расчетной области значительно усложняют задачу построения гексаэдральной сетки. Существующие на сегодняшний день методы построения четырехугольных и гексаэдральных сеток (см. Рисунок 5), такие как метод отображений, метод продвигаемого фронта, методы заметания (sweeping) и замощения (paving) области, методы на основе восьмеричных деревьев (octree), применимы либо для достаточно узкого класса областей, либо требуют ручного вмешательства в процесс построения сетки.

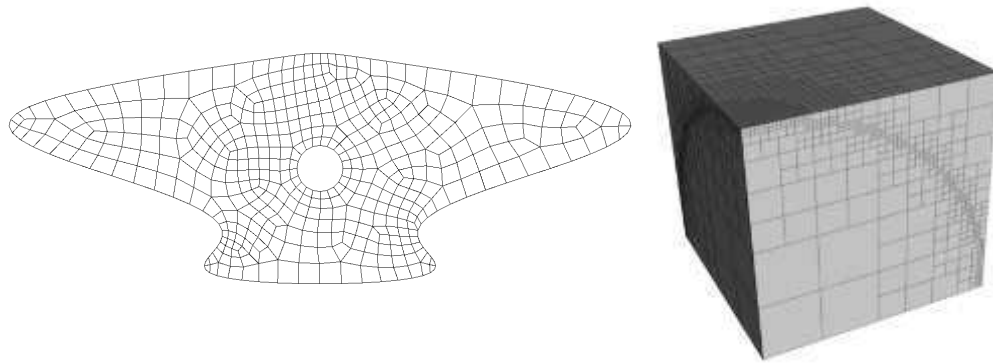


Рисунок 5 – Неструктурированная четырехугольная сетка и неконформная сетка типа восьмеричное дерево.

Компромиссом между тетраэдральными и гексаэдральными сетками могут служить призматические сетки (см. рисунок 4, центр). Вычислительная сложность при дискретизации на них не так высока: $N(F) \sim 5 N(V)$, $N(E) \sim 2 N(V)$. Призматические сетки могут быть анизотропными и при этом не иметь очень острых двугранных углов.

Призматические сетки широко применяются в геофизических приложениях в задачах со слоистыми областями. С их помощью можно разрешать как разные слои, так и геологические разломы. В таких областях призматическую сетку можно представить как тензорное произведение неструктурированной треугольной сетки в плоскости OXY и одномерной сетки вдоль OZ . Конформность сеток достигается за счет сохранения одинаковой топологии на каждом уровне. В Институте вычислительной математики РАН разработан генератор призматических сеток [45]. Для построения начальной треугольной сетки используется генератор треугольных сеток из библиотеки программ Ani2D. В будущем планируется включение этого призматического генератора в состав библиотеки программ Ani3D, позволяющем строить различные трехмерные сетки.

Проблемам построения сеток уделяется большое внимание, постоянно выходят научные публикации, книги [14,46-48], сборники [49-53], проводятся ежегодные конференции. Наиболее известные международные конференции, посвященные проблемам построения сеток, проходят в США – International Meshing Roundtable, и в России – «Численная геометрия, построение сеток и высокопроизводительные вычисления» (NUMGRID), результаты работ которой публикуются в специальных выпусках Журнала вычислительной математики и математической физики. В этом отчете мы сделаем краткий обзор основных методов и наиболее известных комплексов программ для построения треугольных и тетраэдральных сеток. Отметим, что методы построения треугольных сеток напрямую используются при построении треугольных призматических сеток.

Конформные симплициальные (т.е. треугольные или тетраэдральные) сетки можно разбить по геометрическим и топологическим признакам на три класса – иерархические локально сгущающиеся, неструктурированные с ячейками регулярной формы, и неструктурированные анизотропные. Методы и технологии построения сеток разных классов существенно отличаются [14,47,54,55].

Построение треугольных сеток на плоскости

Существует два основных метода построения треугольной сетки на плоскости:

- 1) метод продвигаемого фронта [56,57];
- 2) метод построения триангуляции Делоне [48,58].

Отметим, что оба метода могут быть использованы для построения конформной треугольной сетки внутри заданного многоугольника на заданном наборе вершин без добавления новых вершин. На практике сетки строятся с добавлением новых вершин внутри области, и качество и свойства сетки зависят от способа выбора положения этих новых вершин [57,58].

В Институте вычислительной математики РАН был разработан генератор треугольных сеток на основе метода продвигаемого фронта. Этот генератор включен в состав пакетов программ Ani2D и Ani3D. В ходе реализации и тестирования метода продвигаемого фронта был разработан набор эвристических алгоритмов для выбора положения новых вершин с целью увеличения надежности и качества полученных сеток при сохранении простоты самого алгоритма, был проведен анализ влияния вычислительных погрешностей, доказана конечность работы алгоритма, и сделаны оценки на время работы алгоритма.

Отметим основные особенности комплекса программ для построения сеток, включенного в Ani2D и Ani3D. Граница задается либо дискретно, либо аналитически с помощью параметризующих функций, предоставленных пользователем; есть возможность контролировать желаемый размер треугольников во всей области, размер треугольников может выбираться автоматически на основе заданной дискретизации границы и заданной скорости увеличения размера треугольников при продвижении внутрь области. При использовании одинарной точности для хранения координат в памяти ЭВМ для корректной работы генератора достаточна двойная точность вычислений внутри генератора. Программа собирается в виде библиотеки, приведены примеры ее использования. Исходный код открыт и свободно распространяется [20].

Построение тетраэдральных сеток в пространстве

Обычно процесс построения тетраэдральной сетки делится на два этапа:

- 1) построение поверхностной триангуляции на границе области;
- 2) построение тетраэдральной сетки внутри области.

В разных задачах геометрические формы моделей имеют разную сложность. Например, в случае моделирования физических процессов в однородной среде можно использовать область простой формы в виде шара или куба. В задачах обтекания используются более сложные модели, например, пересечение или объединение нескольких простых фигур. В инженерных задачах широко применяются системы автоматизации проектных работ (САПР) для создания геометрических моделей изделий. Не исключено и применение трехмерного сканирования для получения компьютерной модели реально существующего объекта, а также использование картографических данных для создания моделей реального рельефа, например, в геофизических задачах. Универсального подхода не существует: в разных задачах удобен тот или иной способ задания геометрии модели.

В пакете программ Ani3D предусмотрен богатый выбор способов построения треугольных поверхностных сеток [59], включающий библиотеку для улучшения качества имеющихся поверхностных триангуляций [60], библиотеку для задания области на основе подходов конструктивной блочной геометрии, библиотеку для построения треугольных поверхностных сеток для областей, заданных аналитически, или с помощью САПР [61].

При построении объемной тетраэдральной сетки важным свойством метода является возможность сохранения заданного следа сетки на границе. В отличие от двумерных треугольных сеток, в трехмерном случае существуют такие многогранные области, для которых невозможно построить конформную тетраэдральную сетку с заданным следом на границе без добавления новых вершин. Пример такой области приведен в [62]. Б. Джо в своей работе [63] показал, что для выпуклых многогранников добавление одной вершины позволяет построить конформную согласованную с границей сетку. П.Л. Джордж показал в [64] существование конформной согласованной сетки для произвольного многогранника при добавлении конечного числа вершин. Тем не менее, задача построения сетки, согласованной с заданной границей остается сложной практической задачей.

При построении тетраэдральных сеток могут использоваться методы, основанные на тех же идеях, что и в двумерном случае. Классический метод построения тетраэдрализации Делоне строит сетку для выпуклой оболочки точек и не гарантирует сохранение границы области. Предложено несколько методов для сохранения границы: локальные модификации сетки [65], измельчение сетки [66], построение тетраэдрализации Делоне с ограничениями

(CDT, Constrained Delaunay triangulations) [67]. Алгоритм продвигаемого фронта, с другой стороны, не испытывает проблем с сохранением заданной границы, так как с нее и начинается [68]. Однако этот алгоритм может столкнуться с такой конфигурацией фронта, продвинуть которую он не в состоянии. В литературе встречаются и гибридные методы, основанные на комбинировании идей методов продвигаемого фронта и тетраэдризации Делоне [69].

В пакете программ Ani3D предложена комбинация двух методов. Основной используемый метод – метод продвигаемого фронта, с его помощью строится большая часть сетки. В качестве дополнительного метода используется упрощенная версия метода, предложенного П.Л. Джорджем в [19].

Разработанный и внедренный в пакет Ani3D комплекс программ позволяет автоматически надежно конформно строить тетраэдральные сетки внутри заданных многогранных областей с заданным следом сетки на границе. Как и в двумерном случае, есть возможность контролировать желаемый размер ячеек сетки во всей области. В случае отсутствия у пользователя информации о желаемом размере, размер может определяться автоматически на основании заданной дискретной триангуляции границы области и заданной пользователем скорости увеличения размера элементов при продвижении внутрь области. На первом этапе при построении большей части сетки методом продвигаемого фронта гарантируется корректная конечная работа генератора при неточных вычислениях чисел с плавающей точкой. Использование неточной арифметики уменьшает часть построенной области по сравнению с точной арифметикой.

Тем не менее, на практике больше 99% области разбивается с помощью алгоритма продвигаемого фронта. Устойчивый метод на основе тетраэдризации Делоне второго этапа может построить тетраэдры, которые из-за накопления вычислительных погрешностей могут быть вырожденными или вывернутыми. На третьем этапе качество ячеек сетки улучшается за счет локальных операций модификации сетки. Для этого используется библиотека aniMBA из пакета Ani3D. Исходный код библиотек пакета Ani3D открыт и свободно распространяется [20].

Перейдем к краткому обзору нескольких наиболее известных комплексов программ для автоматического построения неструктурированных тетраэдральных сеток. Рассмотрим следующие генераторы: TetGen [57], TetMesh (GHS3D) [58], NETGEN [59], CUBIT [60].

Отметим, что в подавляющем большинстве наиболее известных комплексов программ для автоматического построения неструктурированных тетраэдральных сеток в качестве основного метода построения сетки используется метод построения тетраэдризации Делоне.

По сравнению с наиболее известными комплексами программ (TetGen [70], TetMesh (GHS3D) [71], NETGEN [72], CUBIT [73]) библиотека для построения сеток из пакета Ani3D обладает как недостатками, так и преимуществами. К недостаткам можно отнести относительно медленную скорость работы по сравнению с коммерческими пакетами, отсутствие полноценного графического интерфейса. К преимуществам можно отнести широкие возможности для задания границы области и построения треугольных поверхностных сеток, построение тетраэдральных сеток, согласованных с заданной граничной триангуляцией, возможность контроля желаемого шага сетки в пространстве и возможность автоматического выбора шага сетки.

Выводы

Проанализированы существующие методы построения трехмерных неструктурированных расчетных сеток. Сделан обзор существующих программных комплексов для построения сеток, проведен сравнительный анализ этих комплексов с пакетами Ani2D, Ani3D, разрабатываемыми участниками настоящего проекта.

Основные выводы по исследованию следующие:

1. Наибольшие перспективы для использования в расчетах задач биоимпедансного анализа имеют тетраэдральные неструктурированные сетки с возможным включением анизотропных структурированных областей на основе призматического разбиения.

2. На сегодняшний день при рассмотрении методов автоматического построения сеток лишь о методах генерации тетраэдральных сеток можно говорить как о надежных и применимых для произвольных геометрий. Также нужно отметить, что эти методы уже позволяют работать с трехмерными дискретными данными, получаемыми, например, с помощью томографов или других трехмерных сканеров.

2.3. Схемы дискретизации дифференциальных уравнений

Вышеизложенные свойства коэффициентов и расчетных сеток сужают класс возможных дискретизаций. Так, применение хорошо разработанных методов конечно-разностных дискретизаций для неструктурированных сеток затруднительно. Наиболее перспективными аппроксимациями для рассматриваемого класса задач являются, на наш взгляд, методы конечных элементов (МКЭ) и методы конечных объемов (МКО).

Классический МКО не гарантирует даже первый порядок аппроксимации плотности тока для полных анизотропных тензоров проводимостей. Существующие модификации, такие как МКО с многоточечной аппроксимацией потока (MPFA – Multipoint flux

approximation) значительно расширяют шаблон дискретизации потока и значительно увеличивают сложность решения порождаемой системы линейных уравнений.

Для решения задачи (1)-(5) в целом и уравнения (6) в частности выберем численный метод пространственной аппроксимации диффузионного оператора. Самым простым и популярным является МКЭ с пространством непрерывных кусочно-линейных функций, P_1 -МКЭ. Метод конечных элементов наиболее удобен для дискретизации уравнений с полными анизотропными коэффициентами на неструктурированных симплицеальных сетках. По этой причине нами выбрана связка неструктурированные тетраэдральные сетки и метод конечных элементов для дискретизации уравнений (1)-(5) и (6).

Покажем, как МКЭ может быть применен для решения системы уравнений (6). С помощью P_1 -МКЭ мы можем составить матричные аппроксимации отдельно для оператора $\text{div}(C_R \cdot \text{grad } U_R)$ и для $\text{div}(C_I \cdot \text{grad } U_I)$ в первом уравнении. Заметим, что аппроксимации операторов второго уравнения с точностью до замены будут совпадать с уже построенными. Таким образом, матричная форма системы линейных уравнений для системы дифференциальных уравнений (6) может быть получена сборкой четырех блоков, полученных из дискретизации уравнений диффузии с вещественными коэффициентами, аналогичных уравнению (1).

Пакет программ An3D содержит в своем составе библиотеку для конечно-элементной аппроксимации основных дифференциальных операторов. С помощью этой библиотеки также можно вычислить градиент от скалярного поля. С помощью этой библиотеки мы сможем вычислить дополнительную информацию, необходимую для обработки и анализа полученных данных, например функцию чувствительности (7).

3. Построение пространственной расчетной сетки для упрощенной (цилиндрической) модели туловища человека; оценка необходимых вычислительных ресурсов

В этом разделе описаны методы и алгоритмы построения треугольных и тетраэдральных сеток, необходимые для создания конечно-элементной модели тела человека.

Для построения тетраэдральной расчетной сетки сперва необходимо построить поверхностную треугольную сетку. Алгоритм построения и перестроения поверхностных сеток основан на алгоритме построения треугольных сеток на плоскости. Сначала мы опишем алгоритма построения сеток на плоскости, потом рассмотрим некоторые особенности при построении сеток на криволинейных поверхностях и перейдем к методам построения трехмерных тетраэдральных сеток.

3.1. Построение расчетных сеток в двумерных областях со сложной границей

В качестве основного алгоритма для построения триангуляции будем использовать алгоритм продвигаемого фронта [18]. Этот метод подразумевает наличие дискретной границы области, называемой начальным фронтом. Алгоритм является многошаговым, на каждом его шаге строится один треугольник на границе фронта, а сам фронт в этом месте сдвигается внутрь области. Таким образом, на каждом шаге вся область делится текущим фронтом на две части: уже обработанную часть и еще необработанную. У фронта имеется ориентация, которая определяет направление его дальнейшего продвижения.

Рассмотрим задачу построения конформной триангуляции для области, заданной дискретизацией своей границы. В этом случае фронт – это набор отрезков, образующий одну или несколько замкнутых ломанных. При этом для каждого отрезка задано направление, позволяющее определить, в какой части плоскости относительно этого отрезка находится текущая нетриангулированная область. Изначально фронт ограничивает всю рассматриваемую область. На каждом шаге алгоритма из фронта выбирается один отрезок, и на нем, как на основании, строится треугольник. Этот треугольник добавляется к триангуляции и вырезается из текущей области. Вместе с этим меняется и сам фронт - из текущего фронта удаляются ребра, принадлежащие только что построенному треугольнику, и добавляются новые, оставшиеся от треугольника, ребра (см. Рисунок 6). Этот процесс продолжается до тех пор, пока в фронте есть хотя бы одно ребро.

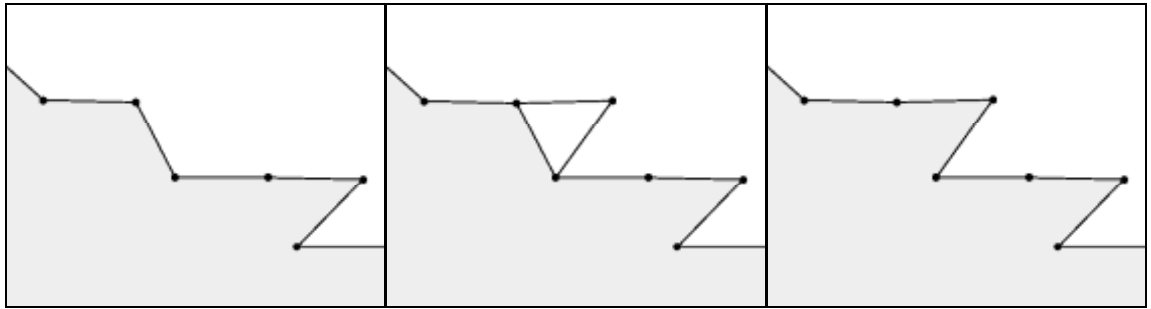


Рисунок 6 – Один шаг алгоритма продвигаемого фронта на плоскости.

На каждом шаге необходимо выбрать ребро из фронта и построить на нем, как на основании, треугольник. Треугольник должен удовлетворять требованиям пользователя, но при этом он должен целиком лежать внутри области, и не пересекаться с другими уже построенными треугольниками, то есть треугольник не должен пересекаться с текущим фронтом. Как только такой треугольник построен, происходит обновление фронта, и алгоритм переходит к следующему шагу. Для определенности и из некоторых эвристических предположений будем выбирать на каждом шаге ребро с наименьшей длиной. На этом ребре, как на основании, строится равнобедренный треугольник, высота которого определяется из желаемого размера треугольника в данной точке плоскости. Заметим теперь, что у нового треугольника две вершины зафиксированы, а третью вершину можно двигать, следя за тем, чтобы треугольник не пересекал фронт. Если в окрестности третьей вершины есть вершины из фронта, то мы передвигаем третью вершину треугольника в ближайшую такую точку, это позволит нам избежать создания лишних вершин в сетке (см. Рисунок 7). Далее мы проверяем, пересекается ли треугольник с текущим фронтом. В случае пересечения мы сдвигаем вершину треугольника в соседнюю вершину фронта и проверяем пересечение с фронтом снова. На плоскости всегда можно построить треугольник, не пересекающийся с фронтом.

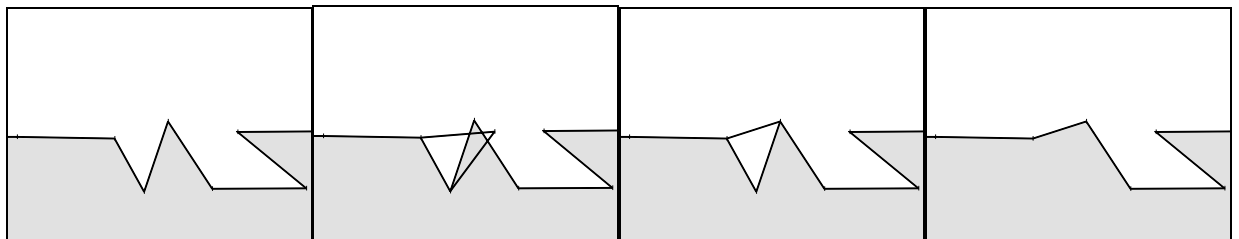


Рисунок 7 – Пересечение построенного треугольника с фронтом.

Теперь рассмотрим более детально выбор не пересекающего фронт треугольника. Сначала строится равнобедренный треугольник, после чего его третью вершину мы начинаем менять до тех пор, пока треугольник не будет пересекаться с фронтом. Общая идея поиска третьей вершины такова:

1. Если ребро выходит из одной из вершин треугольника, и при этом делит соответствующий угол, то выбираем другой конец этого ребра;

2. Если треугольник пересекает ребро из фронта, причем в двух точках, то делаем третьей вершиной треугольника тот конец ребра, который лежит в той же полуплоскости относительно основания треугольника. Если оба конца лежат в нужной полуплоскости, то выбирается ближайшее к текущей вершине треугольника;

3. Если треугольник пересекает ребро из фронта, причем ровно в одной точке, то один его конец лежит внутри треугольника, а второй - снаружи. Выбираем тот, что лежит внутри;

4. Если ребро лежит внутри треугольника, то выбирается ближайший конец этого ребра.

Очевидно, что при таком выборе третьей вершины треугольника, углы при основании треугольника не будут возрастать, более того, хотя бы один из них уменьшится, и, следовательно, этот процесс будет конечным. Однако у такого способа есть недостаток – после вырезания из области построенного треугольника может образоваться острый угол. Чтобы избежать подобных ситуаций, дополнительно рассматриваются ребра, выходящие из основания треугольника, и проходящие рядом со сторонами треугольника. Третья вершина в этом случае перемещается в другой конец такого ребра, при этом запоминается, что на этом шаге мы увеличили угол при основании. Если в дальнейшем мы снова окажемся в такой же ситуации, то передвигать третью вершину мы не будем, чтобы не заикнуться. Таким образом, почти всегда углы при основании будут уменьшаться, а увеличиваться будут лишь несколько раз, причем каждое увеличение будет происходить только один раз. Количество итераций можно грубо оценить количеством вершин, попавших в самый первый равнобедренный треугольник.

Алгоритм очень удобен для триангулирования областей, полученных программным путем, так как достаточно только указать желаемый след на границе, и при этом не надо указывать функцию, отвечающую за желаемый размер треугольников в каждой точке области. Заметим также, что алгоритм справляется с неравномерно разбитой границей области, формат входных данных просто организован, и доступен один параметр, влияющий на процесс триангуляции.

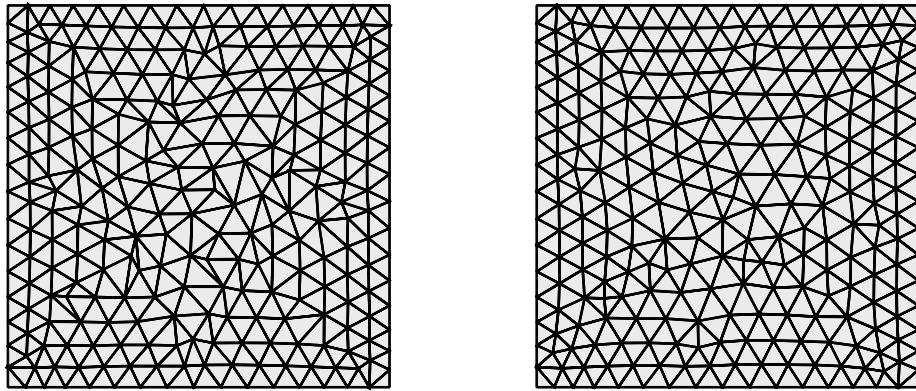


Рисунок 8 – Финальное разглаживание сетки.

На последнем этапе проводится разглаживание сетки, сохраняющее топологию связей (см. Рисунок 8). Для каждой внутренней вершины сетки вычисляется центр масс ее соседей, и внутренние вершины сдвигаются в новые посчитанные положения. При сдвиге проверяется, не нарушается ли конформность сетки. Операция повторяется еще раз, но при этом вершины сдвигаются лишь на половину вектора, затем на треть, четверть и т.д. Уменьшение множителей позволяет избавиться от проблем невозможности сдвинуть вершину из-за нарушения конформности сетки. С другой стороны, ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится и не ограничивает расстояние, на которое может сдвинуться вершина. Всего совершается около 10 итераций разглаживания сетки.

3.2. Построение сетки на криволинейной поверхности

Введем для удобства некоторые обозначения. Простой поверхностью назовем двумерное многообразие в трехмерном пространстве, которое является образом гомеоморфного отображения единичного квадрата. Кривой на поверхности или в пространстве назовем одномерное многообразие на поверхности или в пространстве, соответственно. Простой кривой назовем кривую, являющуюся образом гомеоморфизма единичного отрезка.

Сначала рассмотрим простую поверхность, которую можно представить, как двумерное многообразие – образ гомеоморфного отображения единичного квадрата. То есть должна быть определена такая параметризующая функция, которая переводит точку из квадрата в параметрическом пространстве в точку на поверхности. Разбиение границы Ω при гомеоморфизме порождает разбиение границы простой поверхности, которое можно рассматривать как дискретную границу поверхности. Используя эту границу как фронт, можно применить алгоритм продвигаемого фронта, локально рассматривая поверхность как плоскость.

Для построения поверхностных сеток на криволинейных гранях сначала строится дискретизация криволинейных ребер. Положение вершин на кривых выбирается с помощью метода бисекции в соответствии с желаемым расстоянием между точками. После построения дискретизации границы криволинейной грани, мы можем применить аналог алгоритма продвигаемого фронта для построения треугольной сетки. Так как соседние грани имеют одну и ту же дискретизацию их общего ребра, и построенные на них треугольные сетки согласованы с этой дискретизацией, то составленная из них общая сетка будет конформной.

Для определения пересечения треугольника и ребра на поверхности используется метод проверки пересечения, основанный на вычислении знаков определителей. На плоскости для этого использовались определители 2×2 [17]. В случае криволинейной поверхности мы можем построить нормаль к поверхности и, используя вершину, лежащую на этой нормали, свести проверки к вычислению знаков определителей 3×3 .

Пусть поверхность параметризована следующим образом: $(u, v) \mapsto (x, y, z)$, и в некоторой окрестности точки C существуют и непрерывны первые производные компонент x, y, z по параметрам u, v . Тогда направление нормали можно вычислить по следующей формуле:

$$\vec{n}_C = r \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right), \quad (8)$$

где $\frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \det \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}$, и $\frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ определяются аналогично, r – нормирующий множитель.

В формуле (8) все три компоненты могут одновременно обратиться в ноль. В этом случае для определения нормали можно выбрать производные вдоль других направлений в параметрическом пространстве. Условно запишем это так:

$$\vec{n}_C = r \left(\frac{D(y, z)}{D(u - v, u + v)}, \frac{D(z, x)}{D(u - v, u + v)}, \frac{D(x, y)}{D(u - v, u + v)} \right).$$

В случае если точка C является особой точкой параметризации, можно отступить на небольшое расстояние от точки C , и вычислить нормаль в соседней точке.

Еще одной важной операцией, которая легко выполняется на плоскости, является построение на заданном ребре AB равнобедренного треугольника с боковыми сторонами длины s . Для нахождения положения вершины C будем искать такую точку в параметрическом пространстве (u_C, v_C) , что $AC = BC = s$ в трехмерном пространстве.

Пусть вершина A параметризована точкой (u_A, v_A) . Будем искать параметрическую точку для C в виде $(u_C, v_C) = (u_A + r \cos \phi, v_A + r \sin \phi)$, где $r > 0$, $\phi \in [0, 2\pi]$. При фиксированном ϕ с помощью метода бисекции можно подобрать r так, что $AC = s$ с некоторой точностью. В зависимости от результата сравнения стороны BC с желаемой длиной s будем увеличивать или уменьшать s с помощью метода бисекции ϕ до тех пор, пока не добьемся $BC = s$ с некоторой точностью.

Модифицированный алгоритм продвигаемого фронта позволяет строить треугольные сетки на криволинейных поверхностях. Локальный шаг сетки может регулироваться пользователем. Самым простым примером может служить квазиравномерная сетка, когда локальный шаг $h = \text{const}$. Использование постоянного шага сетки во всей области не является экономичным, так как для детального разрешения области вблизи электродов с мелким шагом нам придется построить мелкую сетку для всего объекта. Необходимо использование адаптивного выбора локального шага сетки для минимизации общего количества узлов сетки при сохранении точности решения.

3.3. Построение тетраэдральной сетки методом продвигаемого фронта

Алгоритм продвигаемого фронта подразумевает наличие поверхностной триангуляции, называемой начальным фронтом. У треугольников фронта имеется ориентация, она определяет направление для дальнейшего продвижения фронта. Начальный фронт представляет собой ориентированную конформную триангуляцию. Он может быть многосвязным, однако каждая компонента связности должна быть замкнутым множеством без самопересечений.

Успешная работа алгоритма продвигаемого фронта зависит от геометрических характеристик соответствующей триангуляции. Основным требованием является регулярность формы треугольников фронта. Кроме того, малые двугранные углы, образуемые соседними треугольниками фронта, неизбежно порождают нерегулярные тетраэдральные ячейки.

Не всякий начальный фронт, удовлетворяющий вышеприведенным условиям, является приемлемым для алгоритма продвигаемого фронта. Существуют конфигурации фронта, которые алгоритм не может продвинуть. Простейший пример приведен на Рисунок 9.

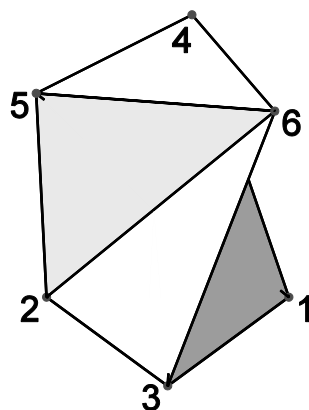


Рисунок 9 – Пример области, для которой не существует конформной тетраэдральной сетки без добавления дополнительных вершин внутри области (на рисунке спрятано ребро 3-4).

Алгоритм продвигаемого фронта является многошаговым. На каждом его шаге строится один тетраэдр на границе фронта, при этом фронт сдвигается внутрь области. После каждого шага текущий фронт отделяет построенную тетраэдральную сетку от оставшейся области. Рассмотрим более детально отдельный шаг.

Из фронта выбирается еще не рассмотренный ранее треугольник с самой маленькой площадью. Из его центра масс проводится нормаль внутрь области. На нормали выбирается четвертая точка будущего тетраэдра в соответствии с желаемым размером элементов сетки в данной точке или с учетом размеров исходного треугольника и параметра разгрубления k . При использовании второго подхода можно построить как квази-равномерную сетку при $k=1$, так и сетку, разгрубляющуюся со скоростью $k>1$ при удалении от границы области.

К только что построенной точке добавляются вершины текущего фронта, лежащие в некоторой окрестности. Для каждой из этих вершин можно построить тетраэдр, соединив вершину с выбранным треугольником. Среди этих тетраэдров ищется подходящий тетраэдр, удовлетворяющий определенным требованиям:

1. Четвертая вершина тетраэдра должна лежать в нужном полупространстве относительно плоскости треугольника.

2. Тетраэдр не должен пересекаться с треугольниками из фронта, но может иметь общую вершину, целое общее ребро, или одна из граней тетраэдра может целиком совпадать с треугольником фронта.

3. Качество тетраэдра должно быть приемлемым.

4. Новый тетраэдр не должен создавать новых острых двугранных углов, а также близко лежащих скрещивающихся отрезков.

Найденный тетраэдр добавляется в сетку. При этом фронт продвигается внутрь области.

Если после перебора всех возможных вариантов подходящий тетраэдр так и не будет найден, то выбранный в самом начале треугольник помечается как уже рассмотренный, и весь шаг повторяется заново для следующего треугольника. Если все треугольники в фронте оказались рассмотренными, то весь процесс повторяется с самого начала. При этом со всех треугольников сбрасывается метка о том, что они уже рассмотрены. Также может быть понижен порог минимального качества для новых тетраэдров. Подобных перезапусков может быть сделано несколько. Если после перезапуска и просмотра всех треугольников фронта не был построен ни один тетраэдр, то метод продвигаемого фронта останавливается.

Остановка алгоритма продвигаемого фронта возможна в двух случаях: либо фронт исчерпан, либо не может быть продвинут. В первом случае задача построения тетраэдральной сетки успешно решена. Во втором случае расчетная область разделена фронтом на две подобласти – тетраэдризованную подобласть и неразбитую подобласть. Первая подобласть занимает подавляющую часть области (более 99%), вторая часть представляет собой набор изолированных многогранных лакун, каждая из которых содержит от восьми до нескольких десятков граней. Количество лакун зависит от геометрии, начального фронта, размера сетки и может достигать нескольких десятков.

Таким образом, задача тетраэдризации всей области свелась к разработке алгоритма тетраэдризации многогранных лакун.

3.4. Доразбиение лакун методом тетраэдрального разбиения Делоне

В этом разделе рассматривается вариант алгоритма [19], предназначенного для гарантированного построения конформной тетраэдральной сетки внутри многогранника с заданным следом на границе. Алгоритм состоит из трех частей. Сначала на множестве начальных вершин строится тетраэдральное разбиение Делоне. Далее проводится поиск недостающих граней в построенной сетке, на границе области строятся точки пересечения так, что геометрия многогранника восстанавливается. На завершающем этапе построенные новые вершины сдвигаются внутрь области, восстанавливая требуемую граничную триангуляцию.

Основная цель первой части алгоритма состоит в построении вспомогательной тетраэдральной сетки на наборе вершин из заданной поверхностной триангуляции.

Тетраэдральная сетка Делоне для набора вершин в пространстве – разбиение, при котором никакая вершина не попадает внутрь ни одной из сфер, описанных вокруг тетраэдров.

Для построения триангуляции Делоне может быть применен простейший последовательный алгоритм. Вначале искусственно вводятся дополнительные 8 вершин прямоугольного параллелепипеда, полностью покрывающего исходный набор точек. Этот параллелепипед с 8 узлами разбивается на тетраэдры, удовлетворяющие условию Делоне. Далее на каждом шаге выбирается очередная вершина из исходного набора. Эта вершина добавляется в сетку, при этом для некоторых тетраэдров условие Делоне перестает выполняться. Эти тетраэдры удаляются из сетки, при этом вокруг добавленной вершины образуется пустая область. Она разбивается на тетраэдры, для этого новая вершина соединяется с треугольниками на границе пустой области.

В результате будет получено тетраэдральное разбиение с вершинами из исходного набора вершин. Из алгоритма построения следует, что полученная сетка будет конформной, и будет удовлетворять условию Делоне. Но алгоритм не гарантирует совпадение требуемой поверхностной триангуляции с полученной сеткой. Часть ребер и треугольников из исходной поверхностной триангуляции может отсутствовать в построенной тетраэдральной сетке Делоне. Эти недостающие элементы будут добавлены в следующей части алгоритма.

Предположим, что у нас есть две сетки на одном наборе вершин. Первая сетка – тетраэдральная, покрывающая выпуклую оболочку набора вершин. Вторая сетка – треугольная, задающая границу области. Пример этих двух сеток изображен на Рисунок 10. Для восстановления геометрии области, мы пересечем обе сетки, добавим точки пересечения, и разобьем тетраэдральную сетку так, чтобы можно было из выпуклой оболочки выбрать тетраэдры, лежащие внутри области.

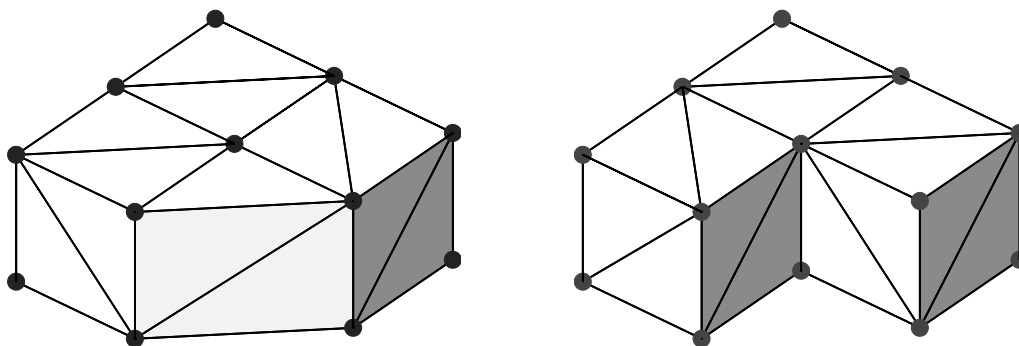


Рисунок 10 – Две сетки на одном наборе вершин: тетраэдральная сетка выпуклой оболочки (слева); треугольная граничная сетка (справа).

Для этого надо выполнить две операции. Сначала проверяются пересечения тетраэдральной сетки с ребрами треугольной сетки. Для каждого ребра граничной

треугольной сетки мы разбиваем пересекающие его тетраэдры объемной сетки. После этого каждое ребро треугольной сетки может быть представлено или одним ребром тетраэдральной сетки, или набором из нескольких ребер. Затем аналогичные действия проводятся для треугольников граничной сетки. Для каждого треугольника сетки мы разбиваем пересекающие его тетраэдры объемной сетки. После этого каждый треугольник граничной сетки будет представлен в объемной сетке или целиком, или в виде объединения нескольких маленьких треугольников.

После проведенного разбиения тетраэдров каждый из них теперь или целиком лежит внутри или целиком снаружи области, ограниченной заданной граничной треугольной сеткой. Из всех тетраэдров оставляем только те, которые лежат внутри, а лежащие снаружи удаляем. На Рисунок 11 показаны измельченная сетка, и часть сетки, лежащая в заданной области. Можно заметить, что след сетки на границе области не совпадает с заданным. В полученной сетке на границе присутствуют дополнительные вершины, эти вершины будут сдвинуты внутрь области в следующей части алгоритма.

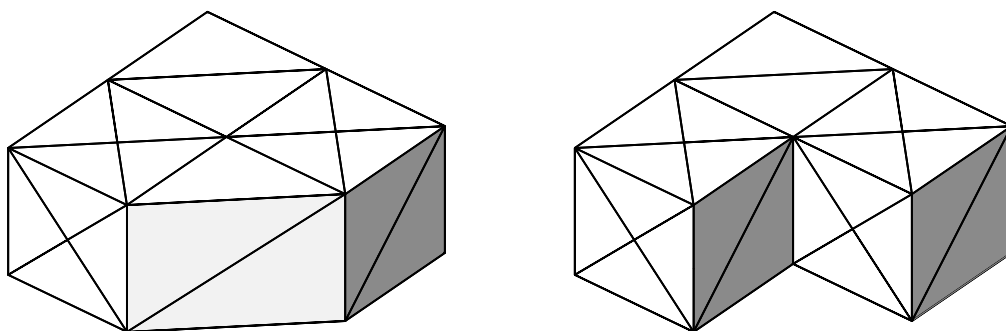


Рисунок 11 – Восстановление геометрии области: разбитая объемная сетка (слева); сетка для области (справа).

Все дополнительные точки на поверхности рассматриваемой лакуны можно разделить на два класса: лежащие на ребрах исходной треугольной сетки, и лежащие внутри треугольных граней. В обоих случаях используются схожие методы для сдвига дополнительных вершин внутрь лакуны. Рассмотрим первый случай более детально.

Пусть P – вершина на граничном ребре, которая должна быть сдвинута внутрь области. Рассмотрим набор тетраэдров T , окружающих вершину P . Граница этого набора H состоит из треугольников двух типов: лежащих на границе области, и лежащих внутри области. Если теперь просто сдвинуть точку P внутрь области, то на границе области останется «вмятина». Эта «вмятина» будет состоять из объединения двух многоугольных конусов. Основания этих двух конусов будут лежать в плоскостях треугольников, на общем ребре которых находилась

точка Р. На левом Рисунк 12 изображены «вмятины», у которых плоскости оснований конусов совпадают.

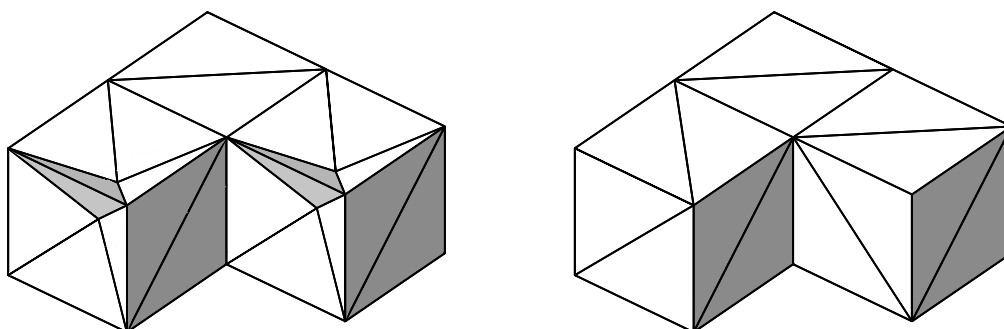


Рисунок 12 – Восстановление конформности сетки: «вмятины» на поверхности (слева); восстановленная сетка (справа).

Чтобы восстановить геометрию области, надо разбить многоугольные конусы на тетраэдры. Это может быть сделано, если разбить многоугольное основание конуса на треугольники без добавления новых вершин. Теперь, двигая точку Р вдоль нормали, мы находим такое положение, при котором все тетраэдры имеют ненулевой объем, и сами тетраэдры при этом не выворачиваются.

После того, как все дополнительные вершины, лежащие на граничных ребрах будут сдвинуты внутрь области, все граничные ребра сетки будут восстановлены. Второй случай, в котором точка лежит внутри треугольной грани, отличается только тем, что «вмятина» будет состоять лишь из одного многоугольного конуса, и рассматривается аналогично. После того, как все дополнительные вершины будут сдвинуты внутрь области, мы полностью восстановим граничную треугольную сетку, и при этом получим конформную тетраэдральную сетку внутри области.

Комбинация двух методов: алгоритма продвигаемого фронта и дополнительного метода на основе триангуляции Делоне, позволяет добиться надежности построения тетраэдральных сеток для областей со сложной границей.

3.5. Построение расчетной сетки для упрощенной модели туловища

Упрощенная трехмерная геометрическая модель туловища человека состоит из нескольких областей: поверхностный слой, сердце, правое легкое, левое легкое. В декартовой системе координат (x,y,z) данные области описываются следующим образом:

– поверхностный слой:

$$(x/230)^2+(y/100)^2=1, -300 \leq z \leq 300;$$

$$(x/230)^2+(y/100)^2+((z+300)/70)^2=1, -370 \leq z \leq -300;$$

$$(x/230)^2+(y/100)^2+((z-300)/70)^2=1, 300 \leq z \leq 370.$$

Таким образом, модель туловища представляет собой вертикальный цилиндр эллиптического сечения, ограниченный сверху и снизу поверхностями эллипсоидов (см. Рисунок 13).



Рисунок 13 – Поверхностный слой упрощенной модели туловища.

– сердце:

$$((x+20)/50)^2+(y/50)^2+((z-60)/60)^2=1.$$

– правое легкое:

$$((x-xrc(z))/ar(z))^2+(y/br(z))^2=1, 0 \leq z \leq 280;$$

$$xrc(z)=110-50*(z/280)^{(3/2)};$$

$$ar(z)=90*((290-z)/280)^{(1/4)};$$

$$br(z)=70*((290-z)/280)^{(1/4)}.$$

Правое легкое представлено расширяющимся книзу искривленным конусом эллиптического сечения. Аналогичным образом описывается левое легкое (см. Рисунок 14).

– левое легкое:

$$((x-xlc(z))/al(z))^2+(y/bl(z))^2=1, 0 \leq z \leq 280;$$

$$xlc(z)=- (110-50*(z/280)^{(3/2)});$$

$$al(z)=90*((290-z)/280)^{(1/4)};$$

$$bl(z)=70*((290-z)/280)^{(1/4)}.$$

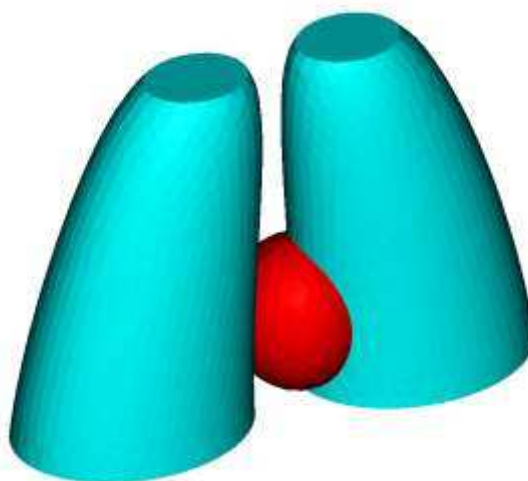


Рисунок 14 – Сердце, правое легкое и левое легкое в упрощенной модели туловища.

На Рисунок 15 представлены внешняя поверхность, поверхности сердца и легких геометрической модели туловища и сечение плоскостью OXZ .

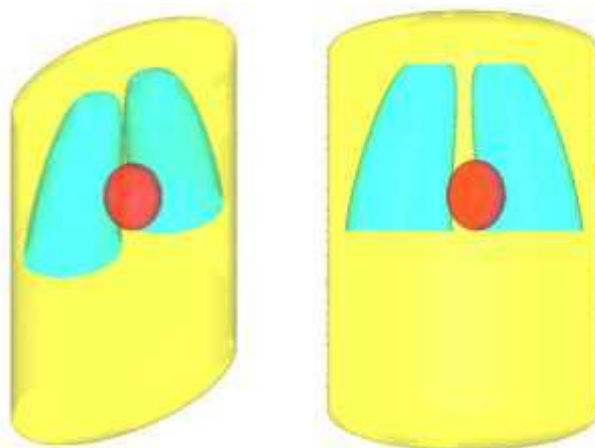


Рисунок 15 – Упрощенная модель туловища.

На поверхности туловища могут располагаться электроды различной формы, плотно прилегающие в области контакта и не искажающие форму поверхности тела. В приложении Б приведено описание электродов, используемых при измерениях и моделируемых в разработанном вычислительно-информационном комплексе. Электроды представляют собой многослойные объекты, причем значения толщины слоев согласовываются, исходя из возможностей построения сетки. Часть внешней поверхности верхнего слоя электрода является областью контакта провода, на которой задается граничное условие в виде постоянной плотности тока вдоль нормали к поверхности области контакта (граничное условие (2)).

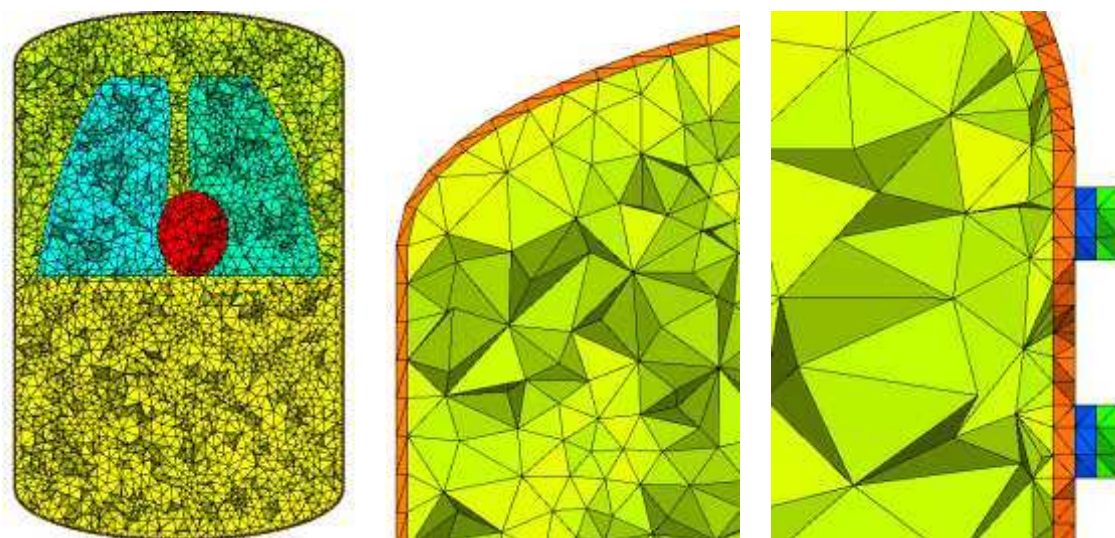


Рисунок 16 – Расчетная тетраэдральная сетка для упрощенной модели туловища. Анизотропные квази-структурированные тетраэдральные сетки для слоя кожи и для многослойных электродов.

С помощью методов, изложенных выше, был создан комплекс программ для автоматического построения тетраэдральных сеток для упрощенной геометрической модели туловища. На Рисунок 16 показано сечение построенной сетки плоскостью OXZ . Если использовать постоянный шаг сетки по пространству, то шаг будет ограничен сверху толщиной слоя кожи (1мм). По этой причине мы будем использовать квази-структурированные тетраэдральные сетки в анизотропном слое кожи. Сначала построим призматическую сетку как тензорное произведение поверхностной треугольной сетки на нормаль к поверхности. Затем каждую призму разобьем на три тетраэдра, сохраняя конформность общей сетки. Таким образом все двугранные углы построенных тетраэдров будут не больше 90° .

Мы можем увеличить толщину слоя кожи в геометрической модели и одновременно с этим подправить тензор проводимости в этом слое так, чтобы с одной стороны ячейки сетки не были слишком анизотропными, и с другой стороны тензор проводимости не был слишком анизотропным. Например, увеличивая толщину слоя кожи в 3 раза, мы получим характерные размеры тетраэдров $10\text{мм} \times 10\text{мм} \times 3\text{мм}$, и тензор проводимости «растянется» в три раза вдоль нормали к поверхности (см. Рисунок 16).

Аналогичным образом мы поступаем с многослойными электродами (см. Рисунок 16). При предварительном численном исследовании распределения электрического потенциала нами было замечено, что наибольший градиент потенциального поля наблюдается вблизи токовых электродов (см. Рисунок 17). Поэтому в этих областях желательно измельчить расчетную сетку для повышения точности. Контролируя локальный шаг сетки, как на

поверхности, так и внутри области, мы автоматически сгущаем расчетную сетку в окрестностях электродов (см. Рисунок 17).

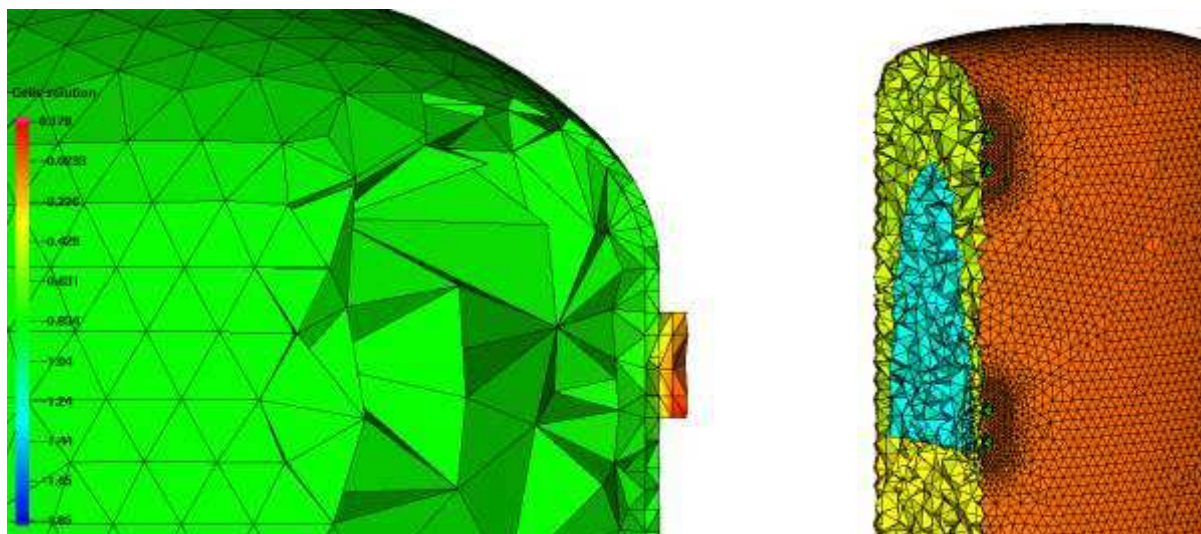


Рисунок 17 – Область больших градиентов поля потенциала вблизи токовых электродов. Автоматическое сгущение расчетной сетки на поверхности к особенностям решения.

Разработан комплекс программ для задания положения 12 электродов на поверхности туловища и построения расчетной сетки с заданным шагом по пространству.

4. Проведение патентных исследований

Подробному изложению результатов патентных исследований посвящен отдельный отчет о патентных исследованиях.

Основная цель патентных исследований – определить, является ли разработанный интеллектуальный продукт – информационно-вычислительная технология электроимпедансной диагностики на основе конечно-элементной модели тела человека как проводящей гетерогенной структуры, далее именуемый «продукт», новым и практически значимым, были ли использованы аналогичные продукты в изобретениях, запатентованных в исследуемой области.

Большинство из отобранных в ходе исследования изобретений представляют собой развитие уже запатентованных ранее технологий. Значительная часть приборов и методик направлена на развитие методов электроимпедансной диагностики с различными клиническими приложениями. Для повышения точности и развития новых методов электроимпедансной диагностики необходимо решать задачи оптимального выбора расположения электродов и наборов частот зондирующего тока для различных участков измерения, разрабатывать алгоритмы оценки локальной гидратации. Данные задачи целесообразно решать с помощью математического моделирования.

В качестве наиболее перспективной области применения продукта были выбраны приборы и инструменты для медицинского обследования, а именно использовались следующие классы по международной патентной классификации:

A61B 5/05 – измерение с помощью электрического тока или магнитных полей для диагностических целей;

A61B 5/053 – измерение электрической проводимости или сопротивления части тела.

Методы электроимпедансной диагностики разрабатываются на протяжении более чем 50 лет, при этом темпы патентования не снижаются. Это свидетельствует об актуальности данного направления исследований и постоянном совершенствовании способов биоимпедансного анализа в диагностических целях.

Анализ отобранных изобретений показал, что многие из них представляют собой развитие уже известных ранее технологий. Вместе с тем, в большинстве из них отсутствует доказательная база по решению задач оптимального выбора электродных конфигураций при разработке алгоритмов оценки локальной гидратации. Поэтому создаваемый в ходе выполнения настоящего контракта продукт (информационно-вычислительная технология

электроимпедансной диагностики на основе конечно-элементной модели тела человека как проводящей гетерогенной структуры) позволит решать указанные задачи и представляет большую практическую ценность.

5. Численные эксперименты для упрощенной модели туловища человека по расчету полей потенциалов, плотностей тока и функций чувствительности

Для проведения численных экспериментов и исследования распределения электрического тока в тканях организма был создан программный комплекс, включающий средства построения расчетных сеток и средства решения дифференциальных уравнений в частных производных на этих сетках. Для визуализации полученных данных используются свободно распространяемые программные средства сторонних разработчиков.

На поверхности туловища могут располагаться электроды различной формы, плотно прилегающие в области контакта и не искажающие форму поверхности тела. В приложении Б приведено описание электродов, используемых при измерениях и моделируемых в данной программе. Электроды представляют собой многослойные объекты, причем значения толщины слоев согласовываются, исходя из возможностей построения сетки. Часть внешней поверхности верхнего слоя электрода является областью контакта провода, на которой задается граничное условие в виде постоянной плотности тока вдоль нормали к поверхности области контакта (граничное условие (2)).

Материалы слоев считаются анизотропными, и их проводимость определяется двумя значениями. Одно значение задает проводимость параллельно поверхности тела, второе – проводимость по нормали к поверхности тела.

Задача решается в декартовой система координат, и при использовании библиотек пакета Ani3D тензор электрической проводимости C также должен быть определен относительно декартовой системы координат. Таким образом, каждый раз при задании тензора электрической проводимости относительно осей естественного трехгранника используется тензорный закон для перехода к декартовой системе координат:

$$C_{ij} = A_{ki} A_{lj} C_{kl}^{(nat)},$$

где C_{ij} – компоненты тензора проводимости относительно декартовой системы координат, $C_{kl}^{(nat)}$ – компоненты тензора проводимости относительно естественного трехгранника, A_{ki} – определяет косинус угла между k -ой осью естественного трехгранника и i -ой осью декартовой системы координат.

Каждому материалу, составляющему модель, ставится в соответствие с приложением А электрическая проводимость, и считается, что верхняя и нижняя половины туловища заполняются материалом, проводимость которого равна проводимости мышц.

5.1 Техническое описание разработанного программного комплекса

Решение задачи состоит из двух этапов. На первом этапе строится расчетная сетка с заданным расположением электродов на поверхности тела. На втором этапе с использованием построенной расчетной сетки численно решается дифференциальная задача.

Для построения сетки с круглыми электродами используется программа MeshC.exe, она считывает входные параметры из файла mesh.txt, и сохраняет построенную сетку в файл mesh.ani. Для построения расчетной сетки с квадратными электродами используется аналогичная программа MeshS.exe. Для решения задачи используется программа Diff.exe, считывающая сетку из файла mesh.ani и входные параметры из файла param.txt. Результаты расчетов записываются в текстовые файлы, в GMV и VTK файлы для визуализации с помощью программ GMV и ParaView, соответственно.

Файл с сеткой mesh.ani может использоваться несколько раз для решения задач с одинаковым расположением электродов.

Программа для построения расчетной сетки: MeshC.exe

Для построения расчетной сетки используется библиотека из пакета Ani3D. Процесс построения состоит из следующих этапов:

1. Считывание параметров из файла mesh.txt
2. Построение треугольной сетки на поверхности тела и на границе между разными внутренними областями
3. Построение тетраэдральной сетки для слоя кожи и двухслойных электродов
4. Построение объемной сетки внутри тела
5. Улучшение качества сетки

При построении сетки используется автоматическое сгущение шага сетки вблизи электродов.

Входные данные

Входные параметры – количество и положение электродов на теле, максимальный размер элементов в сетке и толщина слоя кожи задаются в текстовом файле mesh.txt. Он имеет следующую структуру:

nE h w

x_1 y_1 z_1 d_1

...

x_{nE} y_{nE} z_{nE} d_{nE}

В первой строке записаны три числа, nE – общее количество электродов (не более 12), h – максимальный размер элементов в сетке (мм), w – толщина слоя кожи и слоев электродов (мм).

В следующих nE строчках задается положение электродов для $k=1,2,\dots,nE$. Числа x_k , y_k и z_k определяют координаты центра электрода в мм относительно декартовой системы координат. Одно из значений x_k , y_k или z_k может быть вычислено автоматически с учетом того, что электрод лежит на поверхности кожи. В этом случае пользователь должен определить в каком из двух полупространств находится электрод (например, $y_k > 0$ или $y_k < 0$). Для этого вместо соответствующего числа используется символ ‘+’ или ‘-’, определяющий в каком из полупространств находится электрод. Число d_k используется для задания размеров электрода. В текущей версии программы допускаются круглые однослойные электроды.

В силу алгоритмических особенностей задания и построения электродов, не допускается взаимное пересечение электродов на поверхности тела.

Пример входных параметров для четырех электродов:

```
4 10 3
110 0 + 10
110 + 300 10
110 - 0 10
110 - -110 10
```

Выходные данные

Построенная сетка сохраняется в файле `mesh.ani`, который может быть использован с помощью программы `Diff.exe`. Так как процесс построения сетки может занимать значительное время, рекомендуется сохранять копии построенных сеток с необходимым расположением электродов для дальнейшего использования.

Программа для построения расчетной сетки: MeshS.exe

Свойства программы и формат входных/выходных данных аналогичен программе `MeshS.exe`. Для каждого электрода в файле `mesh.txt` вместо диаметра круглого электрода указывается длина стороны квадратного электрода, а также угол, на который надо повернуть электрод на поверхности относительно нормали к поверхности.

Пример входных данных:

6 10 3
190 + 270 22 0
-190 - -270 22 0
-190 + 270 22 0
190 + -270 22 0
100 + 90 22 0
100 + -90 22 0

Программа MeshS.exe создает двухслойные электроды

Программа для решения дифференциальной задачи: Diff.exe

С помощью метода конечных элементов и пакета AniFEM3D решается задача о нахождении потенциала U при биоимпедансных измерениях упрощенной модели человеческого туловища. Считается, что исследуемое тело состоит из шести частей:

1. Поверхностный слой (материал № 1)
2. Сердце (материал № 2)
3. Правое легкое (материал № 3)
4. Левое легкое (материал № 4)
5. Заполнение нижней половины (материал № 5)
6. Заполнение верхней половины (материал № 6)

На поверхности тела размещаются электроды, количество которых может варьироваться от 2 до 12. Допустимые типы электродов: тип 1 (двухслойный) и тип 3 (однослойный). В случае двухслойного электрода: нижний слой – материал № 7; верхний слой – материал № 8. В случае однослойного электрода используется только материал № 7.

Каждый из материалов может быть либо анизотропным, либо изотропным и определяется своими константами тензора электрической проводимости. Считается, что поверхностный слой и два слоя электрода (материалы № 1, № 7, № 8) являются анизотропными, и их свойства электрической проводимости определяются двумя параметрами, один из которых характеризует проводимость по нормали, второй – в касательной плоскости.

Размещенные на теле электроды нумеруются от 1 до 12, в зависимости от числа датчиков, то есть: первому электроду ставится в соответствие номер 1, второму электроду –

номер 2, третьему – номер 3 и т.д. Выбор токовых электродов задается во входных параметрах.

Входные данные

Входные параметры – комплексные электрические проводимости материалов, номера токовых электродов, величина зондирующего тока – задаются в текстовом файле param.txt. Он имеет следующую структуру:

```
num nj1 nj2 np1 np2
c1_nR c1_tR c2_R c3_R c4_R c5_R c6_R c7_nR c7_tR c8_nR c8_tR
c1_nI c1_tI c2_I c3_I c4_I c5_I c6_I c7_nI c7_tI c8_nI c8_tI
J_r J_i
W_E W_J W_G W_V
```

где

num – определяет общее количество датчиков

nj1, nj2 – определяют номера токовых электродов. На первый из них подается положительный ток, на второй – отрицательный

np1, np2 – определяют номера потоковых электродов

ck_R (k=2,3,4,5,6) – вещественная часть константы проводимости материала с номером

ck_I (k=2,3,4,5,6) – мнимая часть константы проводимости материала с номером k

ck_nR (k=1,7,8) – вещественная часть константы проводимости материала с номером k вдоль нормали

ck_nI (k=1,7,8) – мнимая часть константы проводимости материала с номером k вдоль нормали

ck_tR (k=1,7,8) – вещественная часть константы проводимости материала с номером k вдоль касательной плоскости

ck_tI (k=1,7,8) – мнимая часть константы проводимости материала с номером k вдоль касательной плоскости.

J_r J_i – вещественная и комплексная величины зондирующего тока соответственно

Все комплексные проводимости задаются в См/мм, величина зондирующего тока в А.

В последней строке записываются четыре числа 1 или 0, отвечающие за запись выходных файлов (1 – сохранять файл, 0 – не сохранять файл):

W_E – запись файла E.txt;

W_J – запись файла J.txt;

W_G – запись файлов *.gmv;

W_V – запись файла mesh.vtk.

Ниже приведен пример задания входных параметров для шести датчиков, токовыми из которых являются датчики с номерами 1 и 2; величина зондирующего тока 1мА.

```
6 1 2
0.09e-3 0.003e-3 0.19e-3 0.27e-3 0.27e-3 0.36e-3 0.36e-3 0.27e-3 0.001e-3 1.e-3 0.1e-3
0.18e-3 0 0.045e-3 0.025e-3 0.025e-3 0.035e-3 0.035e-3 0.0216e-3 0 0 0
1e-3 0
0 0 0 1
```

Выходные данные

С помощью построенной ранее сетки и библиотек пакета AniFEM3D реализовывается метод конечных элементов для решения задачи (1)-(5). Результатом являются значения потенциала U в узлах сетки. По данному узловому решению находятся:

– величины комплексных напряжений между всеми парами электродов как разница средних потенциалов под соответствующими электродами. Результаты вычислений записываются в файл `parguajeniya.txt`, каждая строка которого имеет вид

```
n1 n2 par_R par_I
```

где $n1, n2$ – определяют номера пары электродов; par_R, par_I – вещественная и мнимая величины напряжения соответственно.

– величины комплексных импедансов между всеми парами электродов как отношение разницы средних потенциалов под этими электродами на величину зондирующего тока. Результаты вычислений записываются в файл `impedance.txt`, каждая строка которого имеет вид

```
n1 n2 Imp_R Imp_I
```

где $n1, n2$ – определяют номера пары электродов; Imp_R, Imp_I - вещественная и мнимая величины импеданса соответственно.

– в центрах масс элементов сетки находятся вектор напряженности электрического поля как $E = \text{grad}U$ и вектор плотности тока как $J = C\text{grad}U$. Также в центрах массах для каждого элемента находится величина $Escl$ и $Jsc1$ как модуль комплексных векторов напряженности и плотности тока соответственно. Результаты вычислений записываются в файл `E.txt` и `J.txt`, каждый блок которого имеет вид

```
n
x_c y_c z_c
A_R
A_I
```

Ascl

где n – определяет номер элемента; x_c, y_c, z_c – центр масс элемента; A_R, A_I – вещественная и мнимая составляющие вектора напряженности (файл E.txt) или плотности тока (файл J.txt) для данного элемента соответственно; Ascl – соответствующая скалярная величина: Escl (файл E.txt) или Jscl (файл J.txt).

– в центрах масс элементов сетки вычисляются значения функции чувствительности по формуле (7). В файлах sens-xz.vtk и sens-yz.vtk сохраняются интегральные проекции функции чувствительности на плоскости OXZ и OYZ соответственно.

В файле mesh.gmv сохраняется распределение вещественной составляющей потенциала U_R . Также определяются файлы er.gmv, ei.gmv, jr.gmv, ji.gmv, escl.gmv, jscl.gmv, с помощью которых можно посмотреть распределение величин $E_R, E_I, J_R, J_I, Escl, Jscl$. Для просмотра результатов используется программа GMV.

В файле mesh.vtk сохраняются распределения следующих величин $U, U_R, U_I, E_R, E_I, J_R, J_I, S_R, S_I$. Для просмотра результатов используется программа ParaView.

Результаты численных экспериментов

Используемые при расчетах значения проводимостей представлены в таблице 1.

	5 kHz		50 kHz	
	σ' , см/м	σ'' , см/м	σ' , см/м	σ'' , см/м
Кожа	0,0015	0,002	0,03	0,05
Сердце	0,13665	0,0356	0,19543	0,047215
Легкое	0,23484	0,0183	0,26197	0,02372
Остальная часть	0,11	0,005	0,115	0,008
Контактный слой электрода	0,9	0,01	0,9	0,01
Внешний слой электрода	10	0	10	0

Таблица 1. Значения комплексной проводимости $\sigma = \sigma' + i \cdot \sigma''$ тканей в упрощенной модели туловища на разных частотах.

Для каждой задачи проводилась серия из четырех экспериментов: два эксперимента на частоте 5 кГц и два на частоте 50 кГц. Один эксперимент проводился с активной составляющей проводимости σ' , и один эксперимент с полной проводимостью $\sigma = \sigma' + i \cdot \sigma''$. Для каждого эксперимента измерялось количество итераций в методе бисопряженных градиентов с переобуславливателем ILU0, необходимых для решения системы линейных уравнений. Во всех экспериментах, если не оговорено отдельно, шаг сетки по пространству был 10 мм.

Распределение электрического тока в упрощенной модели с квадратными электродами

Расположение шести электродов показано на Рисунок 18. пять электродов расположены на передней части туловища, и один на задней. Четыре электрода размещены по углам туловища и два в центральной части. Синим цветом отмечены диаметрально противоположные токовые электроды.

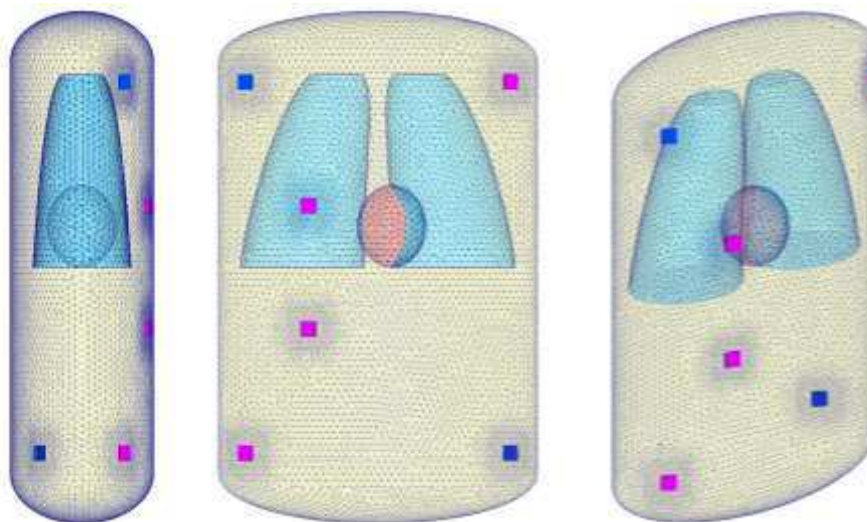


Рисунок 18 – Расположение квадратных электродов на упрощенной геометрической модели туловища.

Значения потенциального поля и эквипотенциальные линии в плоскостях OXZ и OYZ для активной составляющей проводимости при 50 кГц изображены на Рисунок 19.

В Таблице 2 приведены вычисленные значения импеданса между разными парами электродов. Полученные значения согласовываются с ожидаемыми результатами.

	1	2	3	4	5	6
1	0	538.18	252.92	281.22	254.08	270.71
2	538.18	0	285.26	256.96	284.10	267.47
3	252.92	285.26	0	28.30	1.16	17.79
4	281.22	256.96	28.30	0	27.13	10.50
5	254.08	284.10	1.16	27.13	0	16.63
6	270.71	267.47	17.79	10.50	16.63	0

Таблица 2. Значения импеданса между парами электродов. Токовые электроды имеет номера 1 и 2.

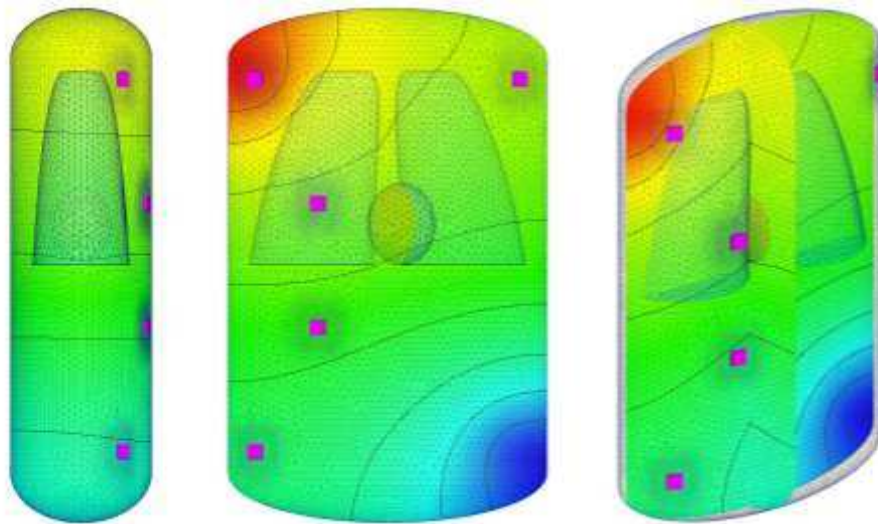


Рисунок 19 – Потенциальное поле для задачи с квадратными электродами на упрощенной модели туловища.

Задача о гидратации правого легкого

Проведем численное исследование распределения функции чувствительности в модельном примере при оценке гидратации правого легкого. К упрощенной модели туловища присоединены два токовых и два потенциальных электрода. Расположение электродов приведено на Рисунок 20. Одна пара электродов крепится к верхней части туловища, вторая пара – на спине на уровне пояса.

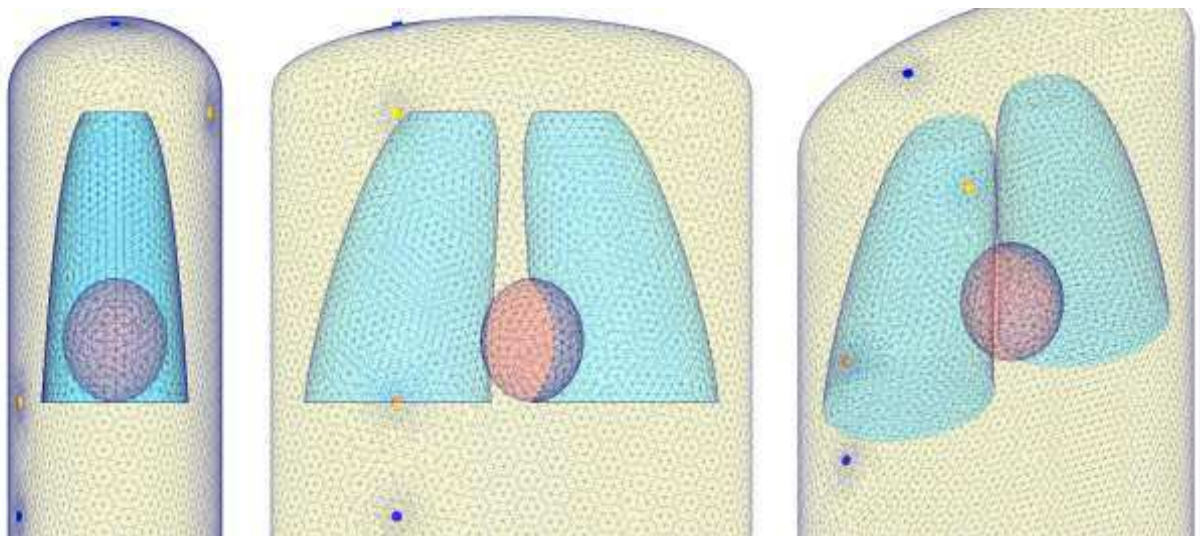


Рисунок 20 – Расположение электродов в задаче о гидратации правого легкого. Синим цветом отмечены токовые электроды, желтым цветом – потенциальные.

Значения потенциального поля и эквипотенциальные линии в плоскостях OXZ и OYZ для активной составляющей проводимости при 50 кГц изображены на Рисунок 21. Значения функции чувствительности в плоскостях OXZ и OYZ изображены на Рисунок 22. На Рисунок 23 изображены интегральные проекции чувствительности на плоскости OXZ и OYZ .

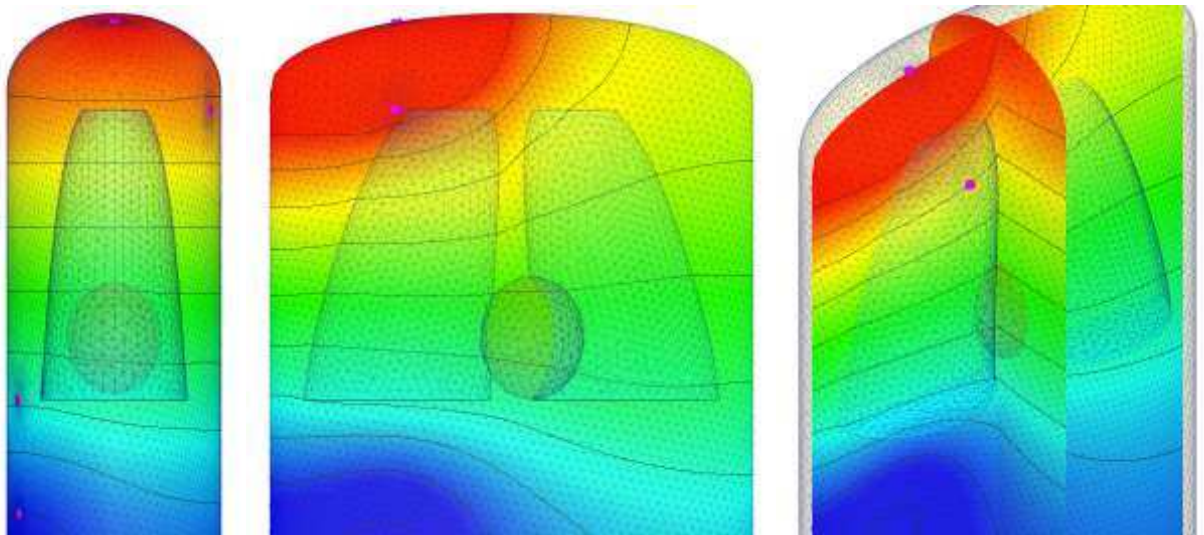


Рисунок 21 – Потенциальное поле для задачи о гидратации правого легкого.

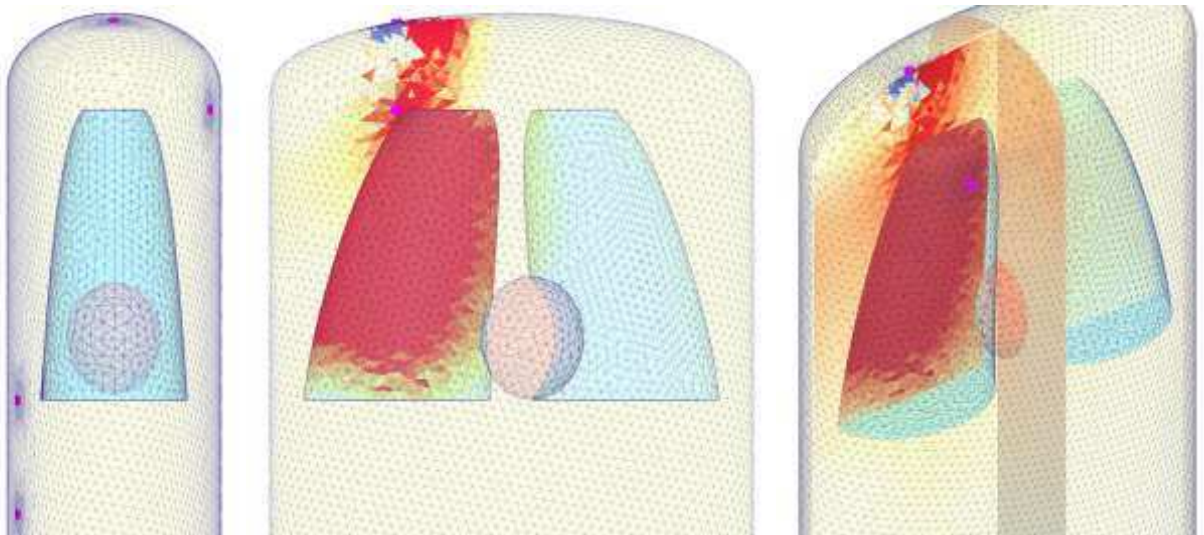


Рисунок 22 – Функция чувствительности, сечения плоскостями OXZ и OYZ .

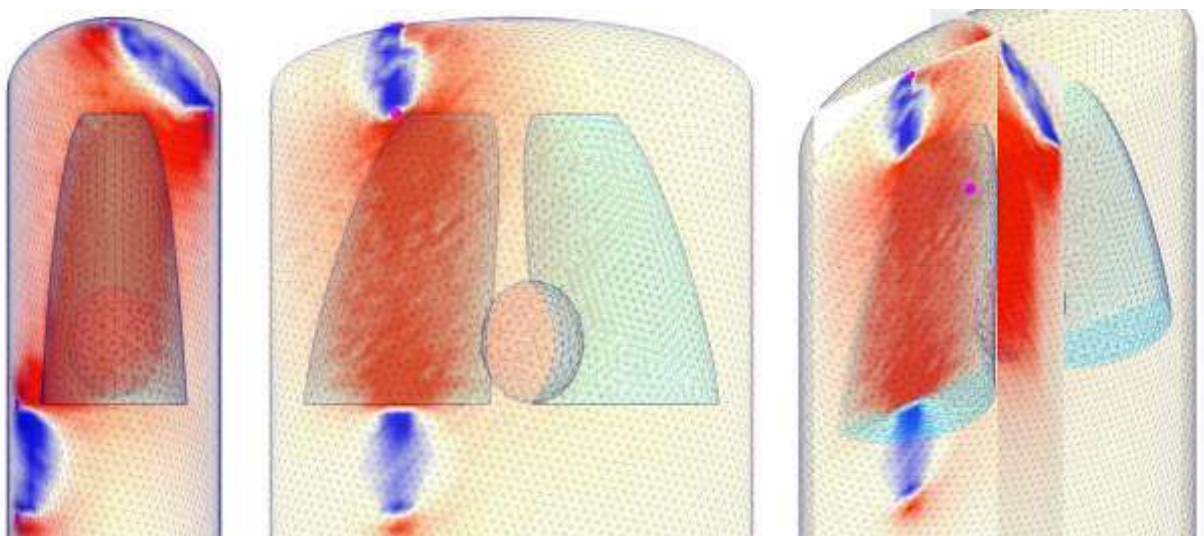


Рисунок 23 – Интегральная проекция функции чувствительности на плоскости OXZ и OYZ .

На основе полученных данных можно сделать вывод о том, что значительная часть области с высокими значениями функции чувствительности сосредоточена в области правого легкого.

Исследование скорости сходимости метода бисопряженных градиентов

В Таблице 3 собрана информация о количестве итераций в методе бисопряженных градиентов и общее время решения задачи для проведенных двух экспериментов при различных значениях проводимости тканей. Из таблицы видно, что в случае полной комплексной проводимости количество итераций и общее время расчета увеличивается.

	Размер системы	5 кГц		50 кГц	
		активная	полная	активная	полная
квадратные электроды	102484×102484	138 48 сек	595 136 сек	142 52 сек	403 97 сек
Круглые электроды	85412×85412	76 31 сек	169 61 сек	82 32 сек	249 64 сек

Таблица 3. Количество итераций при решении системы линейных уравнений и общее время вычисления при разных значениях проводимости.

В Таблице 4 приведены результаты исследования зависимости числа итераций и общего времени от шага сетки по пространству.

Шаг сетки, мм	Размер системы	Количество итераций	Общее время, сек
7	217342×217342	110	102
8	153302×153302	97	68
9	111584×111584	87	51
10	85412×85412	82	32
12	53738×53738	72	20

Таблица 4. Зависимость количества итераций при решении системы линейных уравнений и общего времени вычисления от шага сетки. Задача о гидратации правого легкого, активная проводимость при частоте 50 кГц.

Полученные результаты говорят о хорошей скорости сходимости и решения задачи в случае активной составляющей проводимости. При добавлении реактивной составляющей проводимости сложность получающихся систем возрастает, увеличивается количество итераций и общее время решения задачи.

При переходе к более детальным сеткам и более сложным конфигурациям на следующих этапах может понадобиться внедрение более сложных алгоритмов решения системы линейных уравнений с несимметричными матрицами.

6. Анализ и описание ожидаемых результатов НИР

На примере упрощенной (цилиндрической) модели туловища человека реализованы основные расчетные модули и алгоритмы исследования пассивных электрических свойств модели тела человека (полей потенциала, плотности тока и функции чувствительности) при различных значениях входных параметров (проводимости тканей, величины зондирующего тока, различного расположения электродов). Используемые технологии автоматического построения неструктурированных тетраэдральных сеток, построения конечно-элементной модели и методы решения дифференциальных уравнений в частных производных не зависят от конфигурации рассматриваемой геометрической области, что обеспечивает возможность их использования для расчетов с использованием реалистичной трехмерной геометрической модели тела человека, включающей описание основных органов и тканей. Перечисленные этапы являются ключевыми для разработки информационно-вычислительной технологии электроимпедансной диагностики (биоимпедансная спектроскопия, томография) на основе конечно-элементной модели тела человека как проводящей структуры.

Таким образом, создание эффективного инструментария для решения задач биоимпедансного анализа в трехмерных областях с неоднородной проводимостью позволит реализовать большой объем экспериментальных исследований с развитием методов локального анализа параметров тела и состояния тканей и органов на основе электроимпедансной диагностики. Результаты математического моделирования при исследовании пассивных электрических свойств тела человека позволяют решать задачи о локализации областей измерений, оптимизации частотного диапазона и конфигурации электродных систем. Это позволит повысить точность методов биоимпедансного анализа, в частности, при оценке степени гидратации тканей и нарушений водного обмена.

В ходе выполнения проекта на базе серийно выпускаемого отечественного биоимпедансного оборудования будет создан вычислительный и информационный инструментарий нового поколения с применением его для расчета пассивных электрических свойств реалистичных моделей тела человека. На этой основе станет возможной разработка методик электроимпедансной спектрометрии и томографии различных регионов тела человека. В результате выполнения проекта будет создан отечественный прикроватный монитор гидратации легких для отделений интенсивной терапии и реанимации с хорошими перспективами экспорта и импортозамещения.

Заключение

Содержание настоящего отчета исчерпывает задания Этапа № 1 Календарного плана Государственного контракта № 14.740.11.0844 от ___ декабря 2010г. Поставленные задачи выполнены полностью.

На данном этапе разработаны основные расчетные модули и методы математического моделирования пассивных электрических свойств тела человека в применении к электроимпедансной диагностике. Расчетные модули реализованы на примере упрощенной модели туловища человека, а именно:

– реализована технология автоматического построения неструктурированных тетраэдральных сеток, учитывающая геометрические особенности расчетных областей, на основе метода продвигаемого фронта;

– проведены конечно-элементные расчеты пассивных электрических свойств моделируемого объекта (полей потенциалов, плотности тока и функции чувствительности) при различных значениях входных параметров (проводимости тканей, величины зондирующего тока, расположение электродов);

– приводятся визуализация и анализ результатов расчетов.

Для упрощенной модели туловища человека при определенной конфигурации круглых электродов (см. Приложение Б) были проведены расчеты функции чувствительности, которая позволяет судить о вкладах конкретных областей в общий результат измерения. Полученные результаты будут применены в задаче мониторинга гидратации легких.

В процессе работы над проектом аспирантом К.Д. Никитиным представлена в диссертационный совет кандидатская диссертация на тему решения задач диффузии с полными анизотропными тензорами коэффициентов.

К исследованию на настоящем этапе привлечено большое количество молодежи: 4 молодых кандидата наук, 4 аспиранта и 6 студентов. В 2010 году два участника настоящего исследования поступили в очную аспирантуру ИВМ РАН, два молодых участника приняты на работу в ИВМ РАН. Работы четырех исследователей опубликованы в высокорейтинговых российских и зарубежных журналах.

Все заданные целевые индикаторы и показатели достигнуты.

ПРИЛОЖЕНИЕ А.

Таблица 1. Комплексная проводимость $\sigma = \sigma' + i \cdot \sigma''$ некоторых тканей и органов тела человека при различных частотах.

	5kHz		50kHz		500kHz	
	σ' , см/м	σ'' , см/м	σ' , см/м	σ'' , см/м	σ' , см/м	σ'' , см/м
Воздух	0,000000	0,000000	0,000000	0,000003	0,000000	0,000028
Аорта	0,311450	0,004740	0,316860	0,004541	0,323890	0,008683
Мочевой пузырь	0,211420	0,003730	0,216880	0,005317	0,227870	0,014862
Кровь	0,700010	0,001460	0,700800	0,014451	0,748160	0,116456
Кровеносный сосуд	0,311450	0,004740	0,316860	0,004541	0,323890	0,008683
Губчатая кость	0,082299	0,000831	0,083422	0,001705	0,086731	0,008568
Трубчатая кость	0,020349	0,000233	0,020642	0,000735	0,022165	0,004852
Костный мозг	0,002584	0,000347	0,003127	0,000502	0,003852	0,001361
Серое вещество мозга	0,109540	0,011800	0,127520	0,015184	0,151870	0,033002
Белое вещество мозга	0,066717	0,005820	0,077584	0,009865	0,094658	0,019802
Хрящ	0,175540	0,001690	0,177060	0,007679	0,200780	0,053899
Мозжечок	0,129540	0,011800	0,147530	0,016002	0,172480	0,041010
Спинномозговая жидкость	2,000000	0,000030	2,000000	0,000303	2,000000	0,003031
Шейка матки	0,533460	0,012000	0,544310	0,008760	0,556860	0,017072
Толстая кишка	0,238240	0,008890	0,244380	0,012819	0,277770	0,065902
Роговая оболочка глаза	0,431280	0,020600	0,481450	0,047182	0,577250	0,128912
Двенадцатиперстная кишка	0,528110	0,004220	0,533690	0,009873	0,553970	0,057405
Твердая мозговая оболочка	0,501140	0,000429	0,501680	0,001095	0,502580	0,007352
Склера	0,508650	0,004730	0,514750	0,015277	0,561520	0,090416
Жир	0,023589	0,000783	0,024246	0,000479	0,024833	0,000961

Желчный пузырь	0,900060	0,000064	0,900120	0,000317	0,900190	0,002813
Гланды	0,528110	0,004350	0,533950	0,011185	0,565810	0,059485
Сердце	0,136650	0,035600	0,195430	0,047215	0,280720	0,090763
Почки	0,128810	0,019300	0,159430	0,031776	0,228340	0,095734
Хрусталик	0,333690	0,005000	0,338490	0,007302	0,352780	0,041763
Печень	0,047666	0,011900	0,072042	0,029722	0,148100	0,077009
Легкое	0,234840	0,018300	0,261970	0,023720	0,306970	0,052389
Лимфа	0,528110	0,004350	0,533950	0,011185	0,565810	0,059485
Мышцы	0,336690	0,014600	0,351820	0,028064	0,445900	0,101406
Ноготь	0,020349	0,000233	0,020642	0,000735	0,022165	0,004852
Нерв	0,034567	0,013800	0,069315	0,026656	0,110940	0,041360
Пищевод	0,528110	0,004220	0,533690	0,009873	0,553970	0,057405
Яичник	0,328060	0,004750	0,336150	0,008369	0,350160	0,024279
Поджелудочная железа	0,528110	0,004350	0,533950	0,011185	0,565810	0,059485
Предстательная железа	0,428120	0,005050	0,434400	0,018034	0,491110	0,111268
Сетчатка глаза	0,508650	0,004730	0,514750	0,015277	0,561520	0,090416
Сухая кожа	0,000201	0,000315	0,000273	0,003133	0,004365	0,029527
Влажная кожа	0,001361	0,008340	0,029369	0,060822	0,177980	0,100369
Тонкая кишка	0,551550	0,020800	0,580280	0,048391	0,714740	0,238943
Спинальный мозг	0,034567	0,013800	0,069315	0,026656	0,110940	0,041360
Селезенка	0,108290	0,006610	0,117890	0,015272	0,147060	0,077543
Желудок	0,528110	0,004220	0,533690	0,009873	0,553970	0,057405
Сухожилие	0,385750	0,004460	0,387790	0,002266	0,390750	0,005580
Яичко	0,428120	0,005050	0,434400	0,018034	0,491110	0,111268
Щитовидная железа	0,528110	0,004350	0,533950	0,011185	0,565810	0,059485

Язык	0,278120	0,004770	0,284220	0,015281	0,330990	0,090416
Зуб	0,020349	0,000233	0,020642	0,000735	0,022165	0,004852
Трахея	0,305070	0,009840	0,329870	0,019219	0,359070	0,032185
Матка	0,509380	0,019800	0,525840	0,015764	0,549470	0,041410
Вакуум	0,000000	0,000000	0,000000	0,000003	0,000000	0,000028
Стекловидное тело	1,500000	0,000028	1,500000	0,000274	1,500300	0,002540

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Типы электродов

Тип 1. Квадрат 22x22 мм. Контактom провода является одна из боковых граней верхнего слоя электрода.

Тип 2. Прямоугольник 30x20 мм. Контакт провода на верхней поверхности показан на рисунке ниже

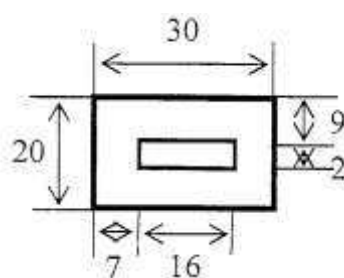


Рисунок Б.1

Тип 3. Круглый электрод диаметром 11 мм, контакт провода по центру верхней поверхности (круг диаметра 1,5 мм)

Литература

1. Николаев Д.В., Смирнов А.В., Бобринская И.Г., Руднев С.Г. Биоимпедансный анализ состава тела человека. – М.: Наука, 2009. – 392 с.
2. Grimmes S. and Martinsen O.G. Bioimpedance and Bioelectricity Basics. – Amsterdam: Elsevier, 2008. – 471 p.
3. F. Yang, R.P. Patterson The contribution of the lungs to thoracic impedance measurements: a simulation study based on a high resolution finite difference model.// *Physiol. Meas.* – 2007. – Vol. 28, no. 7. – Pp. 153-161.
4. F. Yang, R.P. Patterson A Simulation Study on the Effect of Thoracic Conductivity Inhomogeneities on Sensitivity Distributions.// *Ann. Biomed. Eng.* – 2008. – Vol. 36, no. 5. – Pp. 762-768.
5. Kauppinen P.K., Hyttinen J.A., Malmivuo J.A. Sensitivity distributions of impedance cardiography using band and spot electrodes analyzed by a three-dimensional computer model.// *Ann. Biomed. Eng.* – 1998. – Vol. 26, no. 4. – Pp. 694-702.
6. Sachse F.B., Werner C.D., Meyer-Waarden K., Dossel O. Development of a human body model for numerical calculation of electrical fields. Institute of Biomedical Engineering.// *Comput. Med. Imaging Graph.* – 2000. – Vol. 24, no. 3. – Pp. 165-171.
7. Scharfetter H., Brunner P., Mayer M. et al. Fat and Hydration Monitoring by Abdominal Bioimpedance Analysis: Data Interpretation by Hierarchical Electrical Modeling. // *IEEE Transactions on biomedical engineering.* – 2005. – Vol. 52, no. 6. – Pp. 975-982.
8. Mozhaev V.A. Sensitivity Analysis of Polysegmental BIA Parameters for Estimation of Body Composition and Systemic Hydrohemodynamics. // 13th International Conference on Electrical Bioimpedance and the 8th Conference on Electrical Impedance Tomography IFMBE Proceedings. – 2007. – Vol.17, no. 3. – Pp. 44-47.
9. The National Library of Medicine's Visible Human Project [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.nlm.nih.gov/research/visible/visible_human.html, свободный. Язык английский
10. ИТК-SNAP [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.itksnap.org/>, свободный. Язык английский.

11. Computational Geometry Algorithms Library [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.cgal.org/>, свободный. Язык английский.
12. ITK – Segmentation & Registration Toolkit [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.itk.org/>, свободный. Язык английский.
13. Visible Human CT Datasets [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://mri.radiology.uiowa.edu/VHDicom/>, свободный. Язык английский.
14. George P.-L., Borouchaki H. Delaunay triangulation and meshing: application to finite elements. – Hermes Science Publication, 1998. – 413 p.
15. Dobrina Boltcheva, Mariette Yvinec, and Jean-Daniel Boissonnat. Feature preserving Delaunay mesh generation from 3D multi- material images. // Computer Graphics Forum. – 2009. – Vol. 28, no. 5. – Pp. 1455-1464.
16. Garanzha V.A., Kudriavtseva L.N. Construction of 3d Delaunay meshes using incomplete and contradictory data. // Proceedings of international conference "Optimization and applications" (OPTIMA-2009) held at Petrovac, Montenegro, in September 21-25, 2009. M.: Institution of RAS Dorodnicyn Computing Centre of RAS. – 2009. – Pp. 65-66.
17. Danilov A. Unstructured tetrahedral mesh generation technology // ЖВМиМФ. – 2010. – Т. 50, № 1. – С. 146–163.
18. George P.L. Automatic mesh generation and finite element computation. // Handbook of Num.Anal. – 1996. – Vol. 4. – Pp. 127–148.
19. George P.-L., Borouchaki H., Saltel E. 'Ultimate' robustness in meshing an arbitrary polyhedron // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2003. – Vol. 58. – Pp. 1061–1089.
20. 3D Generator of Anisotropic Meshes [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://sourceforge.net/projects/ani3d/>, свободный. Язык английский.
21. Johnson C.R. Numerical methods for bioelectrical field problems // Critical Reviews in BioMedical Engineering – 1994 – Vol. 5. – Pp. 162-180.
22. Василевский Ю.В., Липников К.Н. Оптимальные триангуляции: существование, аппроксимация и двойное дифференцирование P_1 конечно-элементных функций// ЖВМиМФ. – 2003. – Т. 43, № 6. – С. 866-874.

23. Василевский Ю.В., Липников К.Н. Адаптивный алгоритм построения квазиоптимальных сеток // ЖВМиМФ. – 1999. – Т. 39, № 9. – С. 1532-1551.
24. Капырин И.В. Семейство монотонных методов численного решения трехмерных задач диффузии на неструктурированных тетраэдральных сетках// Доклады Академии Наук. – 2007. – Т. 614, № 5. – С. 588-593
25. Agouzal A., Lipnikov K., Vassilevski Yu. Error estimates for a finite element solution of the diffusion equation based on composite norms// J.Numer.Math. – 2009. – Vol. 17, no. 2. – Pp. 77-95.
26. Agouzal A., Lipnikov K., Vassilevski Yu. Adaptive generation of quasi-optimal tetrahedral meshes// East-West J. Numer. Math. – 1999. – No.7. – Pp. 223-244.
27. Chugunov V., Vassilevski Yu. Parallel multilevel data structures for a non-conforming finite element problem on unstructured meshes// Russ.J.Numer.Anal.Math.Modelling. – 2003. – Vol. 18, no. 1. – Pp. 1-11.
28. Chugunov V., Svyatski D., Tyrtysnikov E. Vassilevski Yu. Parallel iterative multilevel solution of mixed finite element systems for scalar equations// Concurrency and Computation: Practice and Experience. – 2006. – Vol. 18, no. 5. – Pp. 501-518.
29. Danilov A.A., Vassilevski Yu.V. A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations on conformal polyhedral meshes// Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2009. – Vol. 24, no. 3. – Pp. 207-227.
30. Kuznetsov Yu.A. , Boiarkine O.V., Kapyrin I.V., Yavich N.B. Numerical analysis of a two-level preconditioner for the diffusion equation with an anisotropic diffusion tensor// Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. – 2007. – Vol. 22, no. 4. – Pp. 377-391.
31. Lipnikov K., Svyatskiy D., Vassilevski Yu. A monotone finite volume method for advection-diffusion equations on unstructured polygonal meshes// J.Comp.Phys. – 2010.– Vol. 229, no. 11. – Pp. 4017-4032
32. Lipnikov K., Shashkov M., Svyatskiy D., Vassilevski Yu. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes// J.Comp.Phys. – 2007. – Vol. 227. – Pp. 492-512.

33. Lipnikov K., Svyatskiy D., Vassilevski Yu. Interpolation-free monotone finite volume method for diffusion equations on polygonal meshes// J.Comp.Phys. – 2009. – Vol. 228, no. 3. – Pp. 703-716.
34. Lipnikov K., Vassilevski Yu. On control of adaptation in parallel mesh generation// Engrg. with Comput. – 2004. – Vol. 20, no. 3. – Pp. 193-201.
35. Gabriel C., Gabriel S., Corthout E. The dielectric properties of biological tissues: I. Literature survey // Phys. Med. Biol. – 1996. – Vol. 41, no. 11. – Pp. 2231-2249.
36. Gabriel S., Lau R.W., Gabriel C. The dielectric properties of biological tissues: II. Measurements in the frequency range 10 Hz to 20 GHz// Phys. Med. Biol. – 1996. – Vol. 41, no. 11. – Pp. 2251-2269.
37. Gabriel S., Lau R.W., Gabriel C. The dielectric properties of biological tissues: III. Parametric models for the dielectric spectrum of tissues// Phys. Med. Biol. – 1996. – Vol. 41, no. 11. – Pp. 2271-2293.
38. Dielectric Properties of Body Tissues [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://niremf.ifac.cnr.it/tissprop/>, свободный. Язык английский.
39. Gabriel C., Peyman A., Grant E.H. Electrical conductivity of tissue at frequencies below 1 MHz// Phys. Med. Biol. – 2009. – Vol. 54, no. 16. – Pp. 4863-4878
40. Smirnov A., Nikolaev D., Kolesnikov V. On measurement errors of the impedance spectrum of human body in vivo// Journal of Physics: Conference Series. – 2010. – Vol. 224, no. 1. – P. 012110
41. Buendia R., Seoane F., Gil-Pita R. A Novel Approach for Removing the Hook Effect Artefact from Electrical Bioimpedance Spectroscopy Measurements// Journal of Physics: Conference Series. – 2010. – Vol. 224. – P. 012126.
42. Bronzino J.D. Biomedical Engineering Handbook. – CRC Press, 2000. – 1892 p.
43. Korjenevsky A.V., Tuykin T.S., Cherepenin V.A. Imaging of Conducting Media by the Electric Field Tomography Method. // Wave Physics. – 2010. – Vol.18, no.1. – Pp. 57-63.
44. Geselowitz D.B. On the theory of the electrocardiogram.// Proc IEEE. – 1989. Vol. 77. – Pp. 857-876.

45. Чугунов В.Н. Алгоритм построения конформной квази-иерархической треугольной сетки, слабо δ -аппроксимирующей заданные ломаные // Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ. – 2009. – Т. 49, № 5. – С. 874–878.
46. Lisejkin V. Grid generation methods. – Berlin: Springer, 1999 – 389 p.
47. Carey G.F. Computational grids: generation, adaptation, and solution strategies. – Washington: Taylor & Francis, 1997. – 496 p.
48. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и её применение. – Томск, 2002. – 128 с.
49. Tompson J., Soni B., Weatherill N. (eds.). Handbook of grid generation. – Boca Raton, FL: CRC Press, 1999 – 355 p.
50. Ivanenko S. and Garanzha V. (eds.). Grid generation: new trends and applications in real-world simulations. – Moscow: Computing Center RAS, 2001 – 243 p.
51. Иваненко С.А., Гаранжа В.А. (ред.). Построение расчетных сеток: теория и приложения. 2002. – М.: ВЦ РАН – 326 с.
52. Евтушенко Ю.Г., Керимов М.К., Гаранжа В.А. (ред.). Прикладная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления. – М.: ВЦ РАН, 2004 – 308 с.
53. Garanzha V., Evtushenko Yu., Soni B., Weatherill N. (eds.). Numerical geometry, grid generation and high performance computing. – Moscow: Computing Center RAS, 2008 – 411 p.
54. Timothy J.Barth. Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier-Stokes equations. // AGARD Report 787. – 1992. – Pp.6.1-6.11,6.23-6.27.
55. Скворцов А.В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне // Вычислительные методы и программирование. – 2002. – №3, с. 14-39.
56. Peraire J., Peiro J., Formaggia L. et al. Finite Element Euler Calculations in Three Dimensions // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1988 - Vol. 26. - Pp. 2135–2159.
57. Lohner R., Parikh P. Generation of Three-Dimensional Unstructured Grids by the Advancing Front Method // Int. J. Numer. Meth. Fluids – 1988 - Vol. 8. - Pp. 1135–1149.
58. Baker T.J. Shape Reconstruction and Volume Meshing for Complex Solids // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1991 - Vol. 32. - Pp. 665–675.

59. Данилов А.А. Способы построения трёхмерных поверхностных триангуляций и тетраэдральных сеток // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – Т. 65, № 1. – С. 87–92.
60. Василевский Ю., Вершинин А., Данилов А., Пленкин А. Технология построения тетраэдральных сеток для областей, заданных в САПР // Матричные методы и технологии решения больших задач / Под ред. Е. Тыртышников. – М.: ИВМ РАН, 2005. – С. 21–32.
61. Василевский Ю.В., Данилов А.А. Взаимодействие с САПР для построения расчётных сеток в сложных областях // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. - 2009. – Т. 39. – С. 5–12.
62. Schonhardt E. Uber die Zerlegung von Dreieckspolyedern in Tetraeder // Mathematische Annalen. – 1928. – Vol. 98. – Pp. 309–312.
63. Joe B. Three-dimensional boundary-constrained triangulations // Proc. of 13th IMACS World Congress. – 1992. – Pp. 215–222.
64. George P.-L., Borouchaki H. Maillage simplicial d'un polyedre arbitraire // C. R. Acad. Sci. Paris – 2004 – Vol. 338. – Pp. 735–740.
65. Borouchaki H., Hecht F., Saltel E., George P.-L. Reasonably efficient Delaunay based mesh generator in 3 dimensions // Proc. of 4th Int. Meshing Roundtable. – 1995. – Pp. 3–14.
66. Du Q., Wang D. Recent progress in robust and quality Delaunay mesh generation // J. of Comp. and App. Math. – 2006. – Vol. 195. – Pp. 8–23.
67. Shewchuk J.R. Constrained Delaunay tetrahedralizations and provably good boundary recovery // Proc. of 11th Int. Meshing Roundtable. – 2002. – Pp. 193–204.
68. Ito Y., Shih A., Soni B. Reliable isotropic tetrahedral mesh generation based on an advancing front method // Proc. of 13th Int. Meshing Roundtable. – 2004. – Pp. 95–106.
69. Yang Y., Yong J., Sun J. An algorithm for tetrahedral mesh generation based on conforming constrained Delaunay tetrahedralization // Computers & Graphics. – 2005. – Vol. 29. – Pp. 606–615.
70. TetGen: A Quality Tetrahedral Mesh Generator [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://tetgen.berlios.de/>, свободный. Язык английский.

71. Distene – Meshing Components [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.distene.com/build/meshing.html>, свободный. Язык английский.
72. Netgen Mesh Generator [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://sourceforge.net/projects/netgen-mesher/>, свободный. Язык английский.
73. CUBIT – Geometry and Mesh Generation Toolkit [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://cubit.sandia.gov/>, свободный. Язык английский.