

Пространственно-распределенная SIR-модель распространения эпидемии

Вольнов Егор Владимирович

*Приволжский исследовательский медицинский университет
(ст. преподаватель кафедры информационных технологий)*

Университет ИТМО (аспирант 1-го курса)

Задача: моделирование эпидемии на карте реального города

- **Агентные модели** – динамика эпидемии **с точностью до индивидуума**, **могут быть достаточно ресурсоемкими** в вычислительном плане
- Экспериментальный подбор параметров таких моделей – зачастую на макроуровне, во взаимодействии отдельно взятых агентов **могут присутствовать условности**
- **SIR-модель** – **простая**, но в своем классическом варианте отражает **лишь суммарную динамику эпидемии**, не учитывая пространственное расположение людей
- **Предлагаемое решение** – **пространственно-распределенная SIR-модель** на уровне отдельно взятых жилых домов заданного города

Классическая SEIR-модель

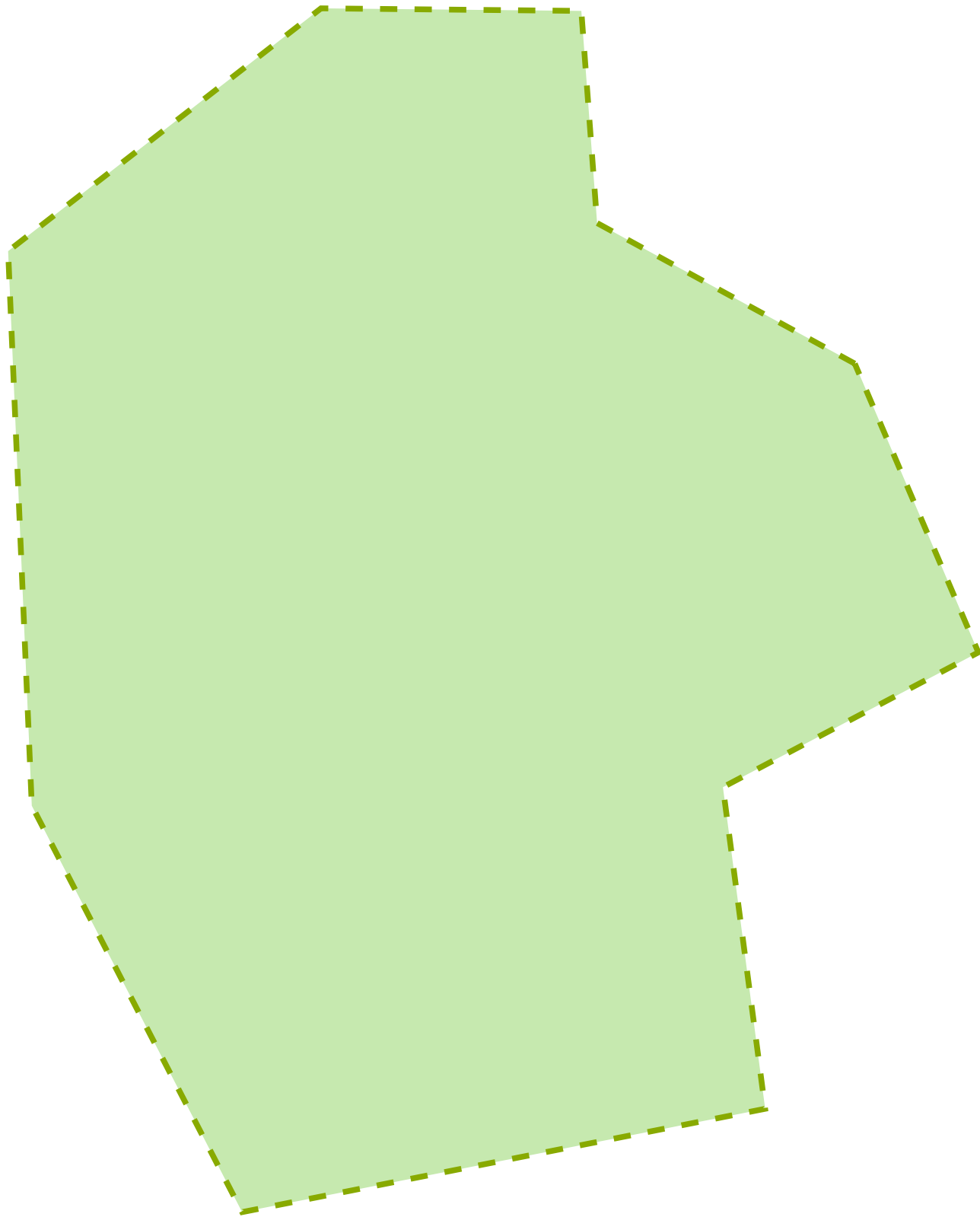
Только суммарная динамика эпидемии:

- ✗ без учета пространственного расположения
- ✗ без учета радиуса заражения
- ✗ без учета плотности населения

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta SI/N, \\ \dot{E} = \beta SI/N - \sigma E, \\ \dot{I} = \sigma E - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I \end{cases}$$

$$N = S + E + I + R$$

Как отобразить динамику на карте реального города?



Пространственно-распределенная SEIR-модель

Та же система ОДУ может решаться для **каждого жилого дома города в отдельности:**

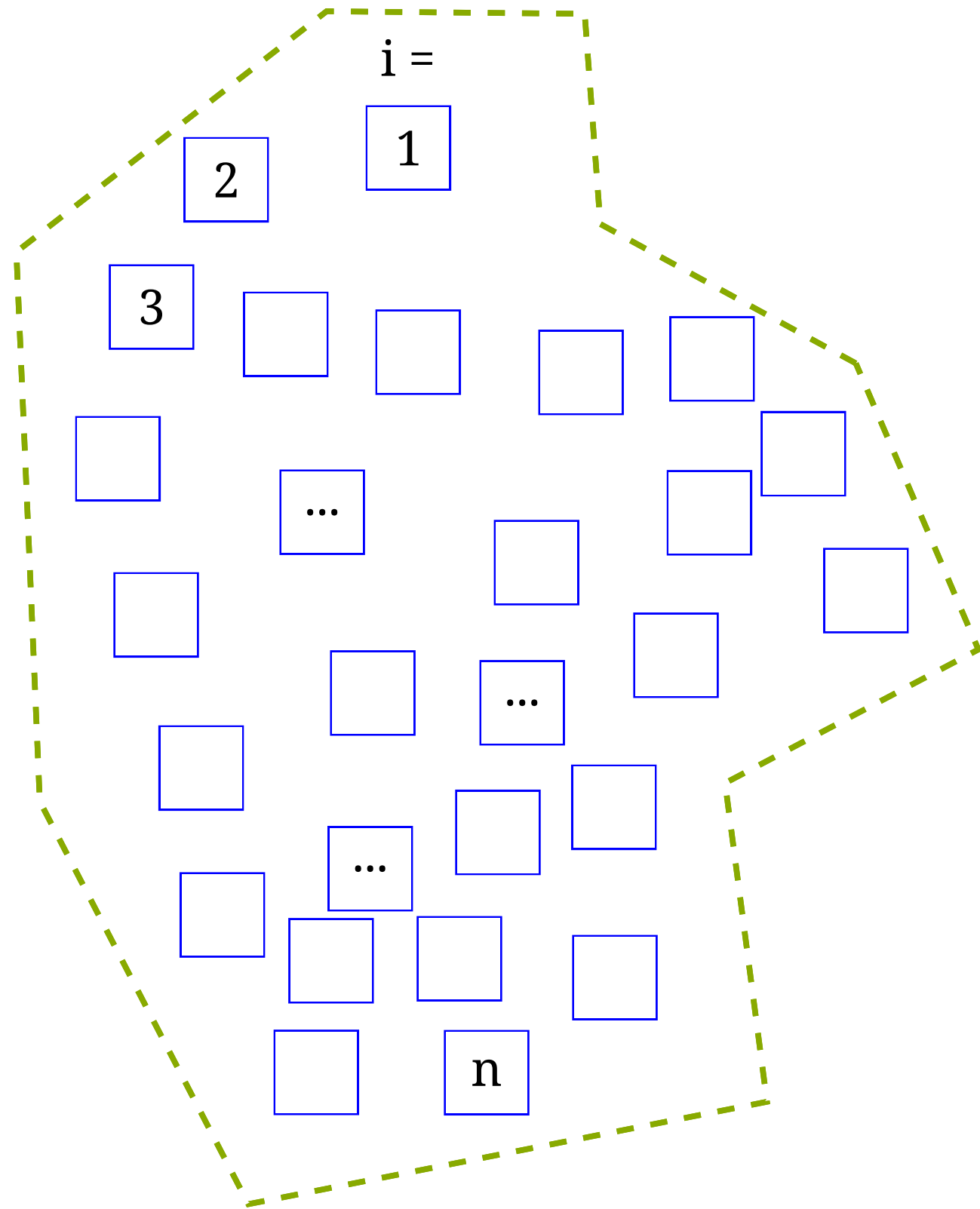
- ✓ с учетом пространственного расположения
- ✗ без учета радиуса заражения
- ✗ без учета плотности населения

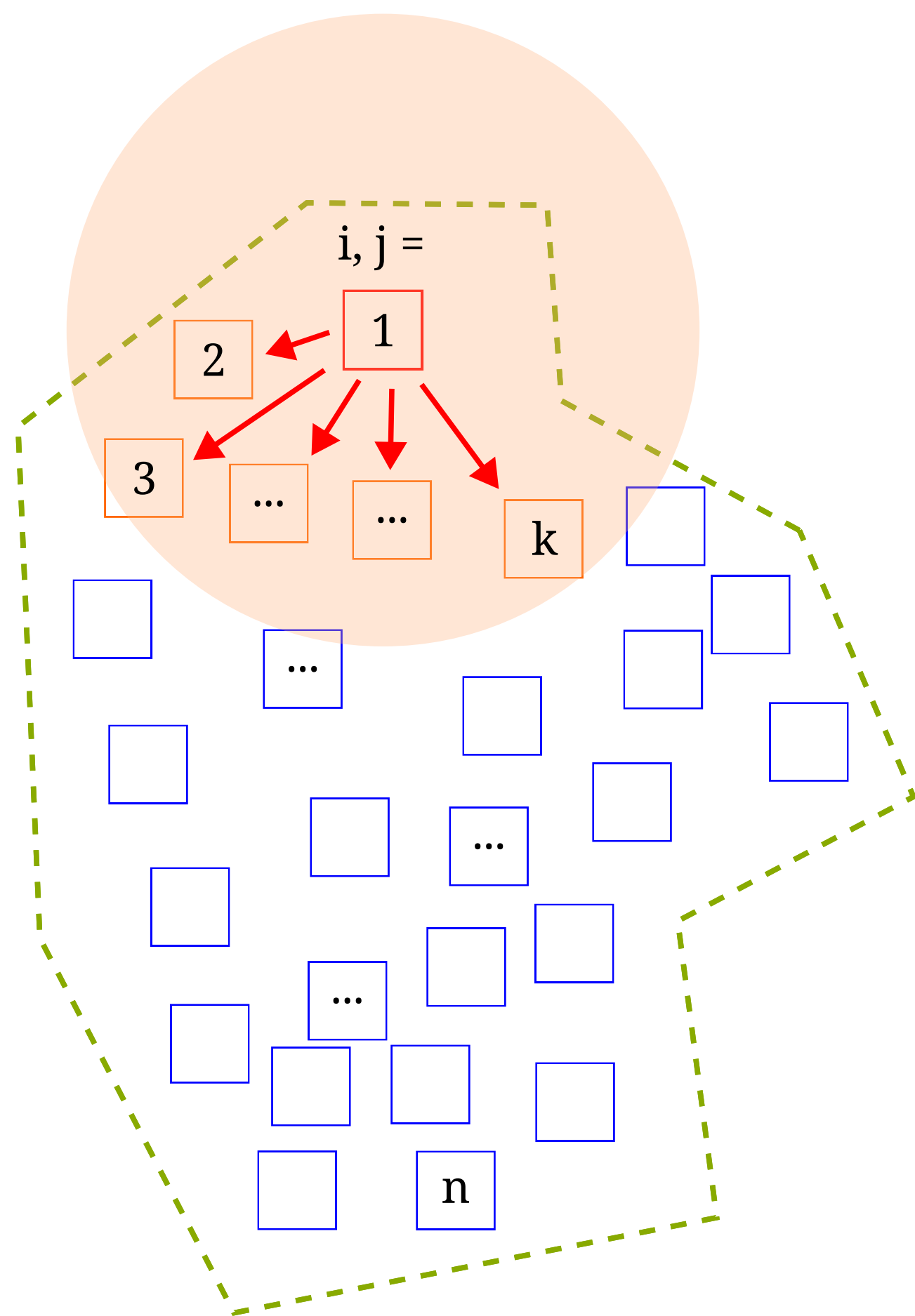
$$\begin{cases} \dot{S}_i = -\beta S_i I_i / N_i, \\ \dot{E}_i = \beta S_i I_i / N_i - \sigma E_i, \\ \dot{I}_i = \sigma E_i - \gamma I_i, \\ \dot{R}_i = \gamma I_i \end{cases}$$

Численности населения домов N_i задаются одинаковыми:

$$\forall i : N_i = N/n$$

Как смоделировать передачу инфекции между домами?





✓ ... с учетом радиуса заражения

Расстояние между домами – по формуле гаверсинуса:

$$\text{hav } \theta = \sin^2(\Delta lat/2) + \cos(lat_i) \cdot \cos(lat_j) \cdot \sin^2(\Delta lon/2)$$

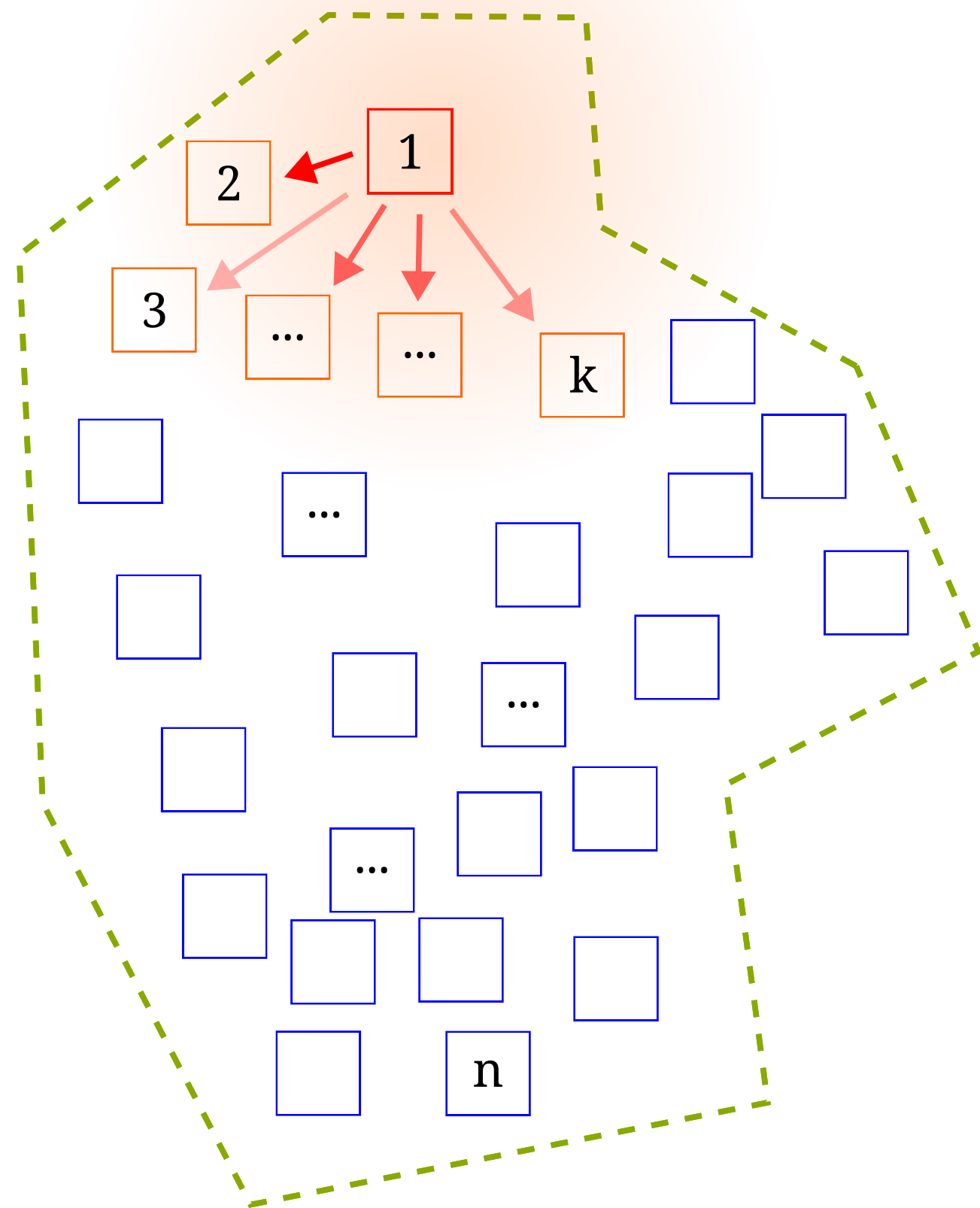
$$d_{ij} = 2R_{Earth} \arcsin(\sqrt{\text{hav } \theta})$$

Дома **объединяются в группы соседей** по заданному фиксированному радиусу заражения r :

$$\forall i : G = \{j \mid d_{ij} < r\}, \quad N_G = \sum_{j \in G} N_j$$

$$\begin{cases} \dot{S}_i = -\frac{1}{|G|} \cdot \frac{\beta}{N_G} \sum_{j \in G} S_j \sum_{j \in G} I_j, \\ \dot{E}_i = \frac{1}{|G|} \cdot \frac{\beta}{N_G} \sum_{j \in G} S_j \sum_{j \in G} I_j - \sigma E_i, \\ \dot{I}_i = \sigma E_i - \gamma I_i, \\ \dot{R}_i = \gamma I_i \end{cases}$$

Как учесть зависимость передачи инфекции от расстояния?

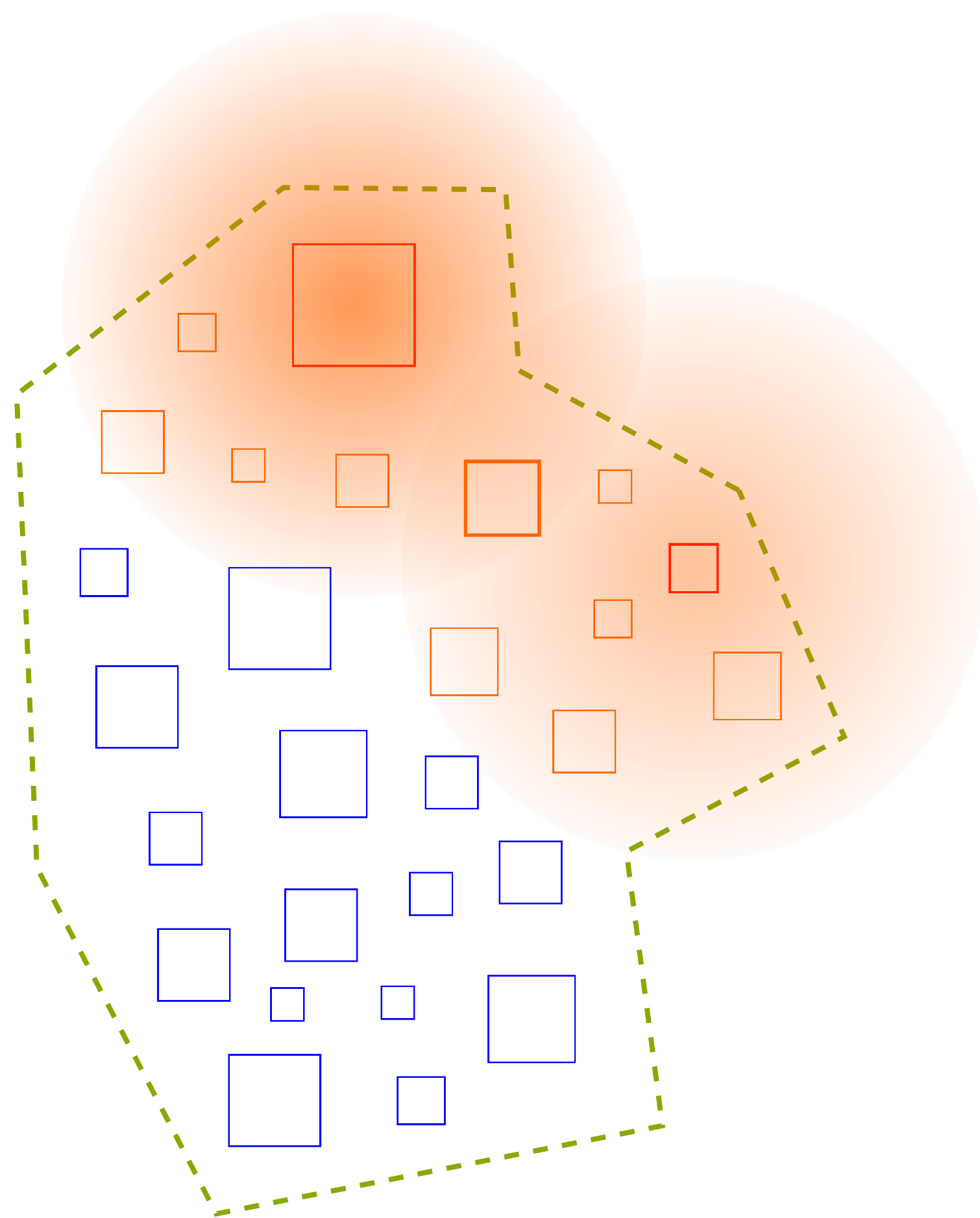


✓ ... с учетом расстояния между домами

Зависимость **интенсивности заражения** от расстояния берется либо линейная, либо соответствующая распределению Гаусса

$$\begin{cases} \dot{S}_i = -\frac{1}{|G|} \cdot \frac{\beta}{N_G} \sum_{j \in G} S_j \sum_{j \in G} \frac{(1 - d_{ij}) \cdot I_j}{r}, \\ \dot{E}_i = \frac{1}{|G|} \cdot \frac{\beta}{N_G} \sum_{j \in G} S_j \sum_{j \in G} \frac{(1 - d_{ij}) \cdot I_j}{r} - \sigma E_i, \\ \dot{I}_i = \sigma E_i - \gamma I_i, \\ \dot{R}_i = \gamma I_i \end{cases}$$

Как учесть численность населения каждого из домов?

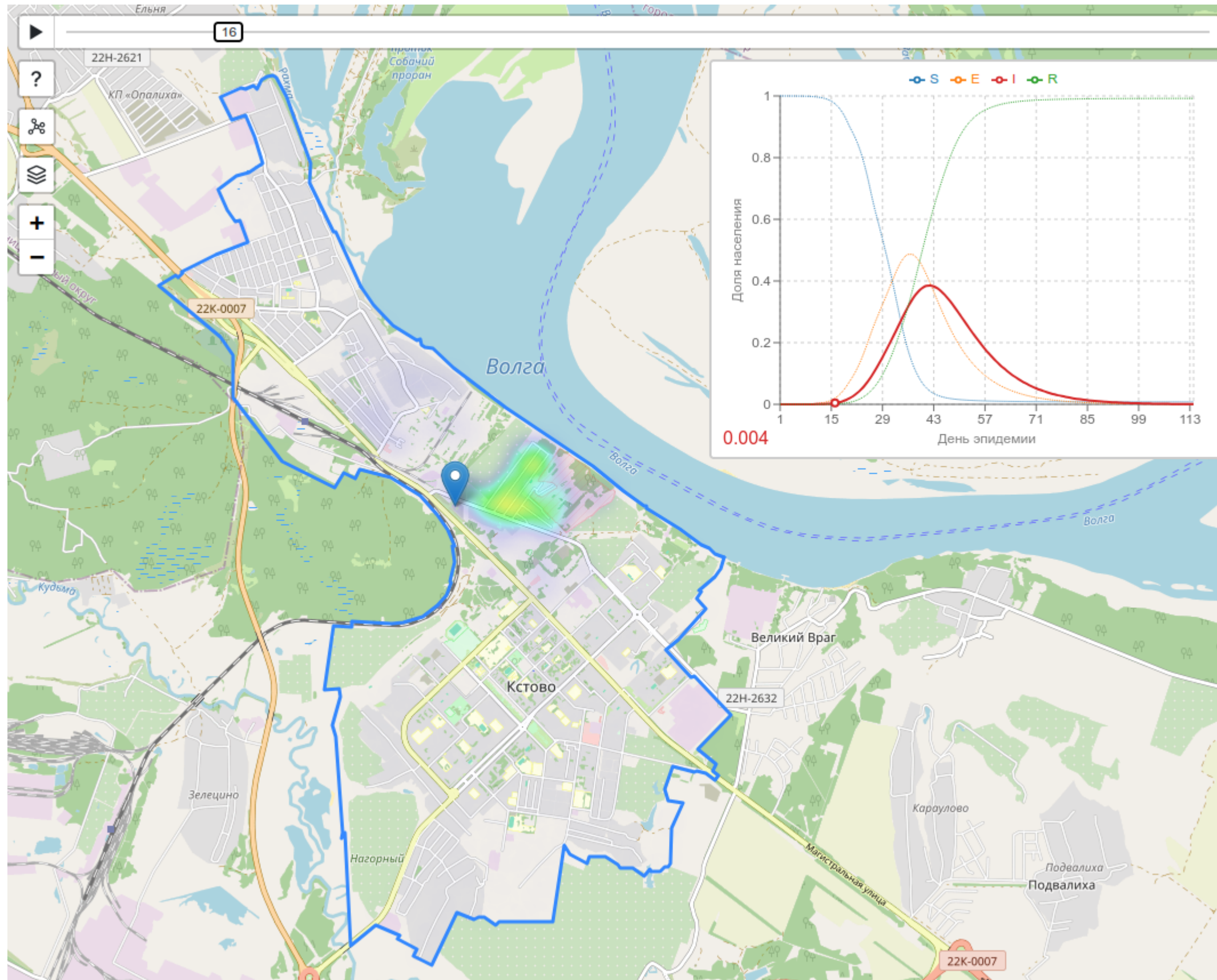


✓ ... с учетом плотности населения

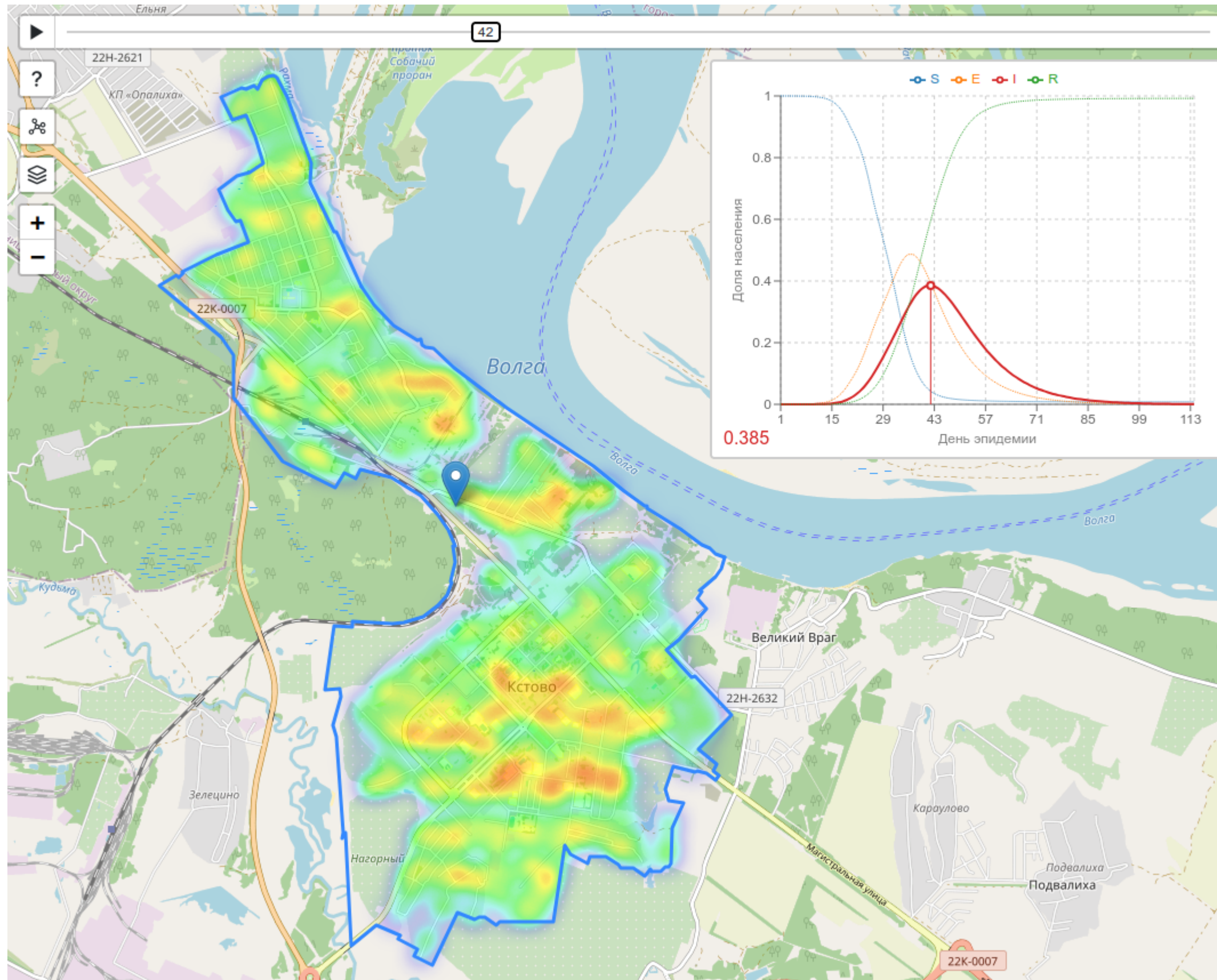
Население каждого дома N_i вычисляется по линейной или логарифмической регрессии пропорционально площади s_i и этажности f_i

$$N_i = a \cdot f_i s_i + b, \quad N = \sum_1^n N_i$$

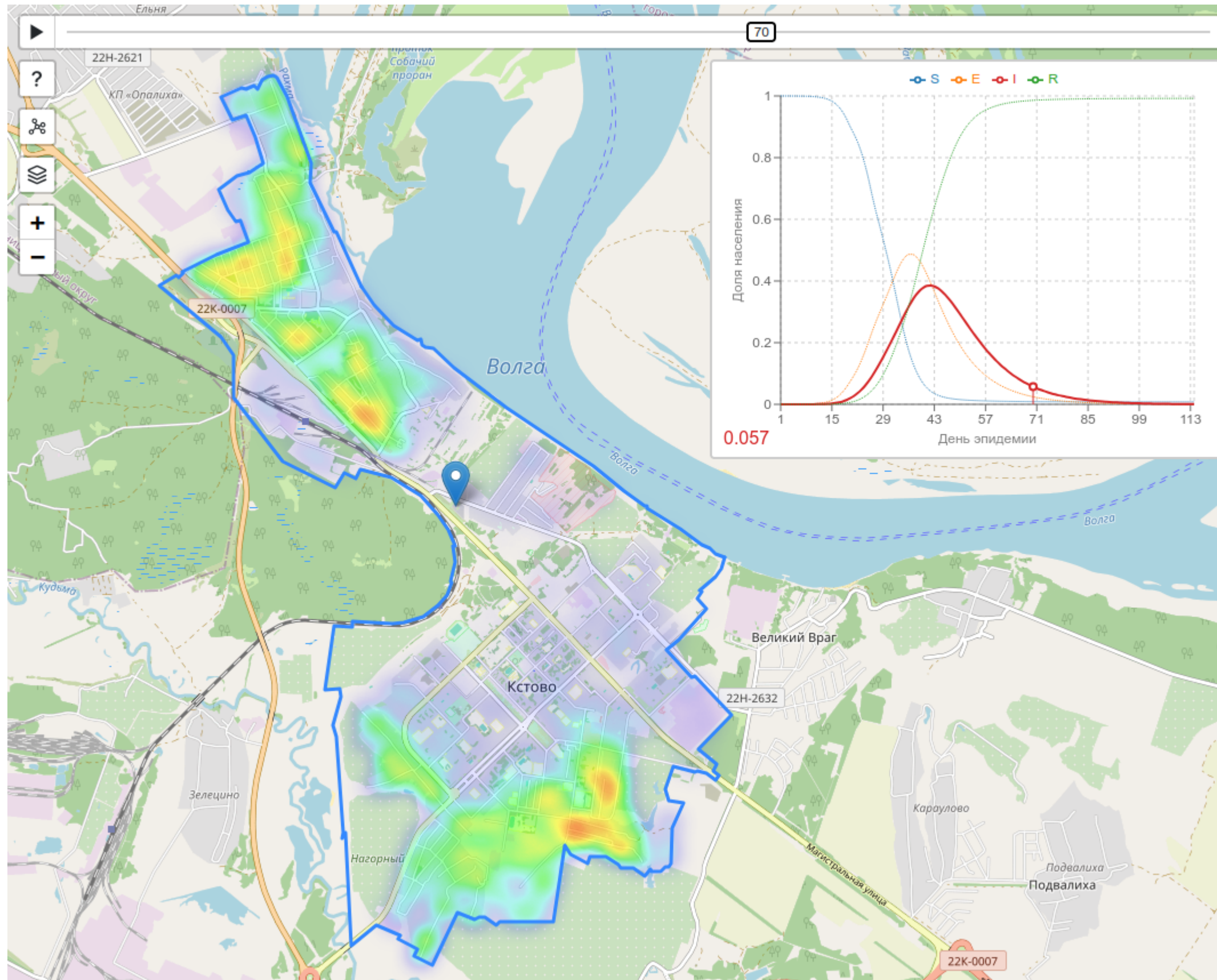
$$\begin{cases} \dot{S}_i = -\frac{N_i}{N_G} \cdot \frac{\beta}{N_G} \sum_{j \in G} S_j \sum_{j \in G} \frac{(1 - d_{ij}) \cdot I_j}{r}, \\ \dot{E}_i = \frac{N_i}{N_G} \cdot \frac{\beta}{N_G} \sum_{j \in G} S_j \sum_{j \in G} \frac{(1 - d_{ij}) \cdot I_j}{r} - \sigma E_i, \\ \dot{I}_i = \sigma E_i - \gamma I_i, \\ \dot{R}_i = \gamma I_i \end{cases}$$



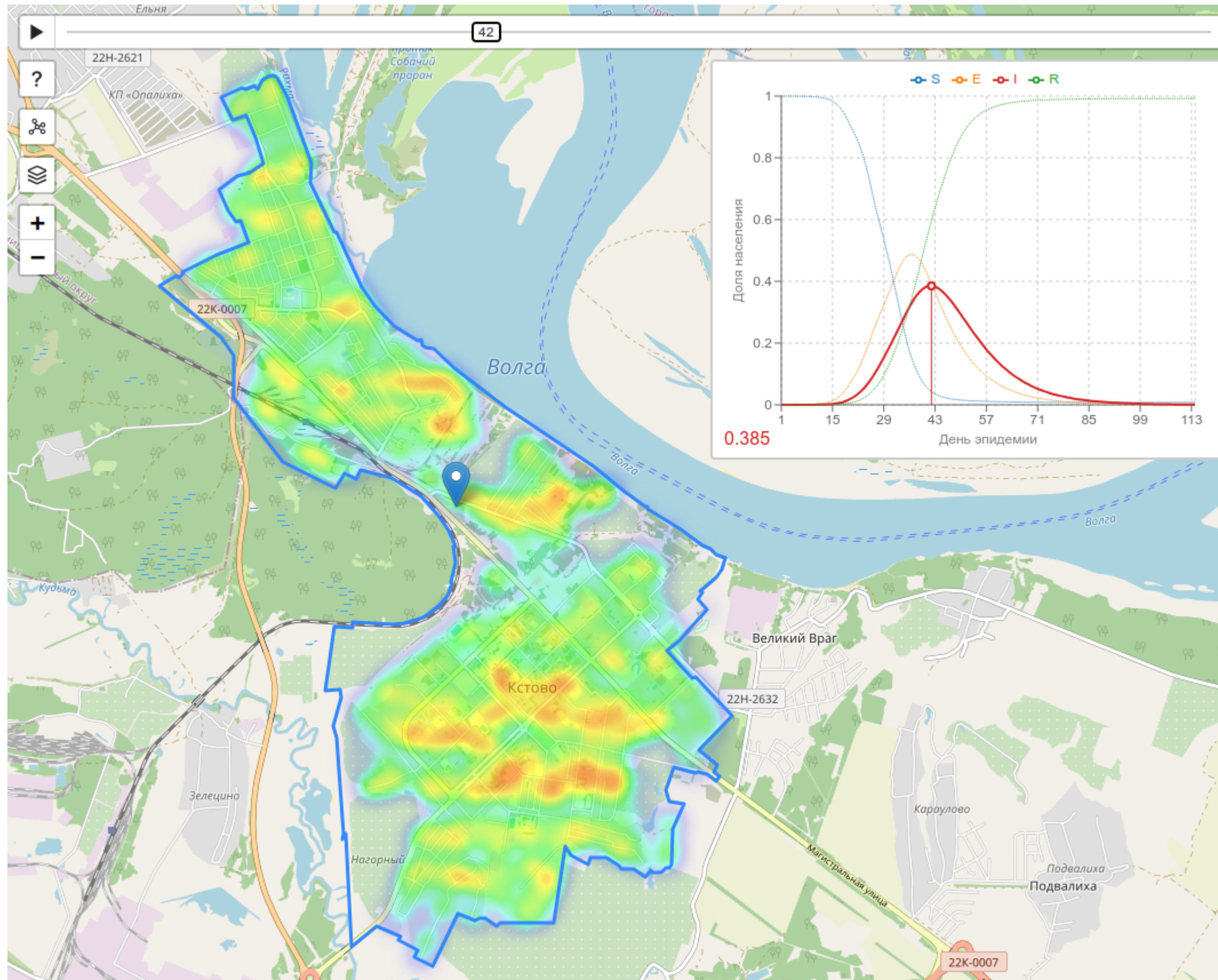
$$\beta = 0.5, \sigma = 0.14, \gamma = 0.15 \text{ (days}^{-1}\text{)}; r = 1 \text{ (km)}; lat = 56.1634723, lon = 44.1850425 \text{ (}^{\circ}\text{)}$$



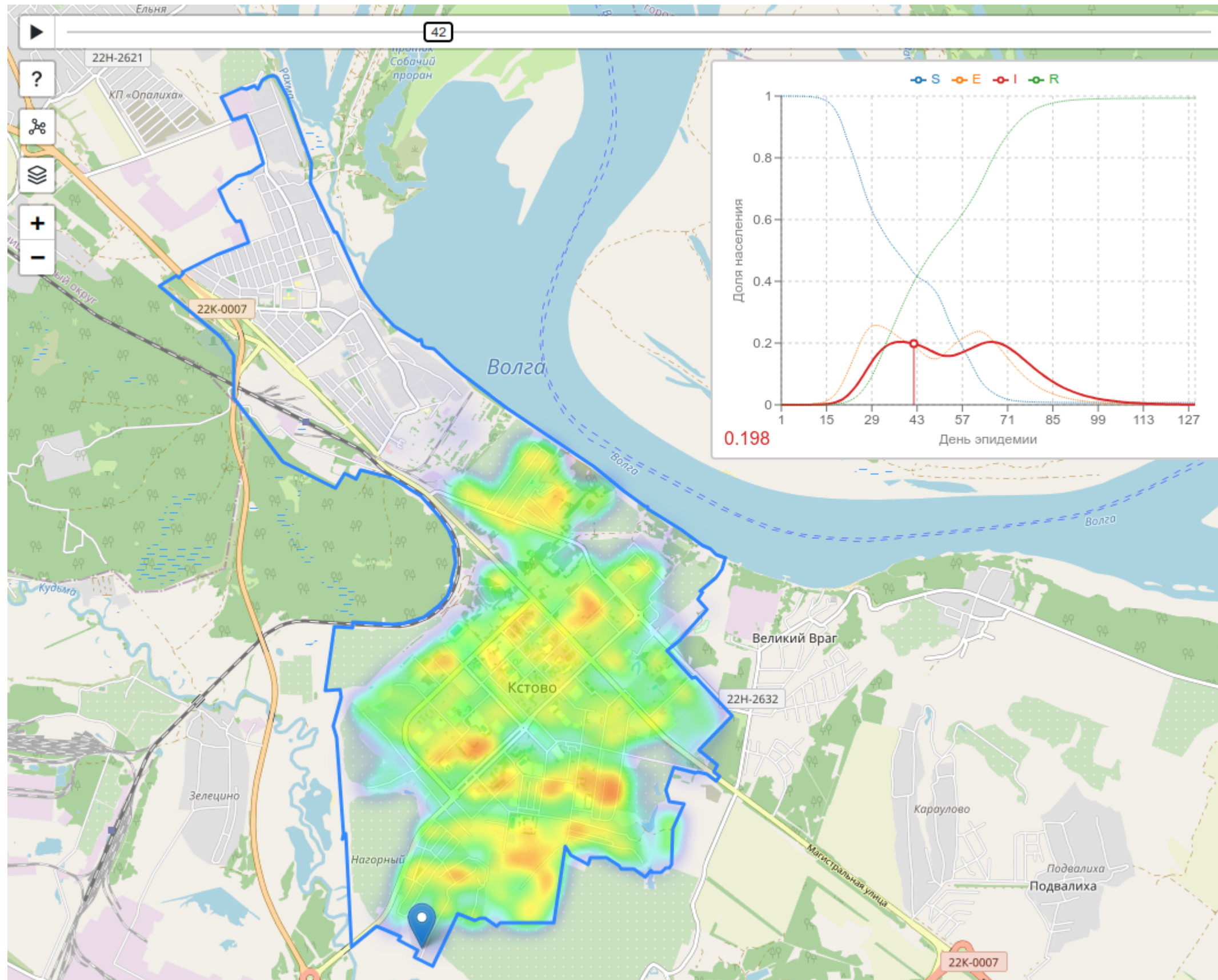
$$\beta = 0.5, \sigma = 0.14, \gamma = 0.15 \text{ (days}^{-1}\text{)}; r = 1 \text{ (km)}; lat = 56.1634723, lon = 44.1850425 \text{ (}^{\circ}\text{)}$$



$$\beta = 0.5, \sigma = 0.14, \gamma = 0.15 \text{ (days}^{-1}\text{)}; r = 1 \text{ (km)}; lat = 56.1634723, lon = 44.1850425 \text{ (}^{\circ}\text{)}$$



✓ ... с учетом первичного очага инфекции $lat = 56.1634723$, $lon = 44.1850425$ (°)



✓ ... с учетом первичного очага инфекции $lat = 56.1275668$, $lon = 44.1816902$ (°)

Открытые вопросы

1. Как правильно задать радиус заражения?
2. Как учесть более сложный характер перемещения людей?
3. Как сделать модель более практически применимой?

Спасибо за внимание!