



XVII конференция “Математические модели и численные методы в биологии и медицине”

Перспективы применения физико-информированных нейронных сетей (PINN) для решения задач биомеханики

Уразова К. М., Шепя Е. Б., Гаврилина А. Д.

*ФГАОУ ВО Первый МГМУ им. И. М. Сеченова Минздрава России
(Сеченовский университет)*

Москва, 16 октября, 2025 года

Мягкие биологические ткани обладают сложным вязкоупругим поведением, описываемым уравнениями в частных производных

Что есть сейчас?

FEM, FVM, FDM:

Плюсы: Высокая точность, надежность, хорошо изучены.

Минусы: Требуют сложных сеток, вычислительно затратны, плохо работают с неполными данными.

Data-Driven AI:

Плюсы: Гибкие, находят сложные зависимости в данных.

Минусы: Требуют огромных данных, «черные ящики», могут выдавать физически нерелевантные решения.

Что такое PINN?

Физико-информированная нейронная сеть (PINN) - это нейронная сеть, у которой в функцию потерь включен учёт уравнений физики.

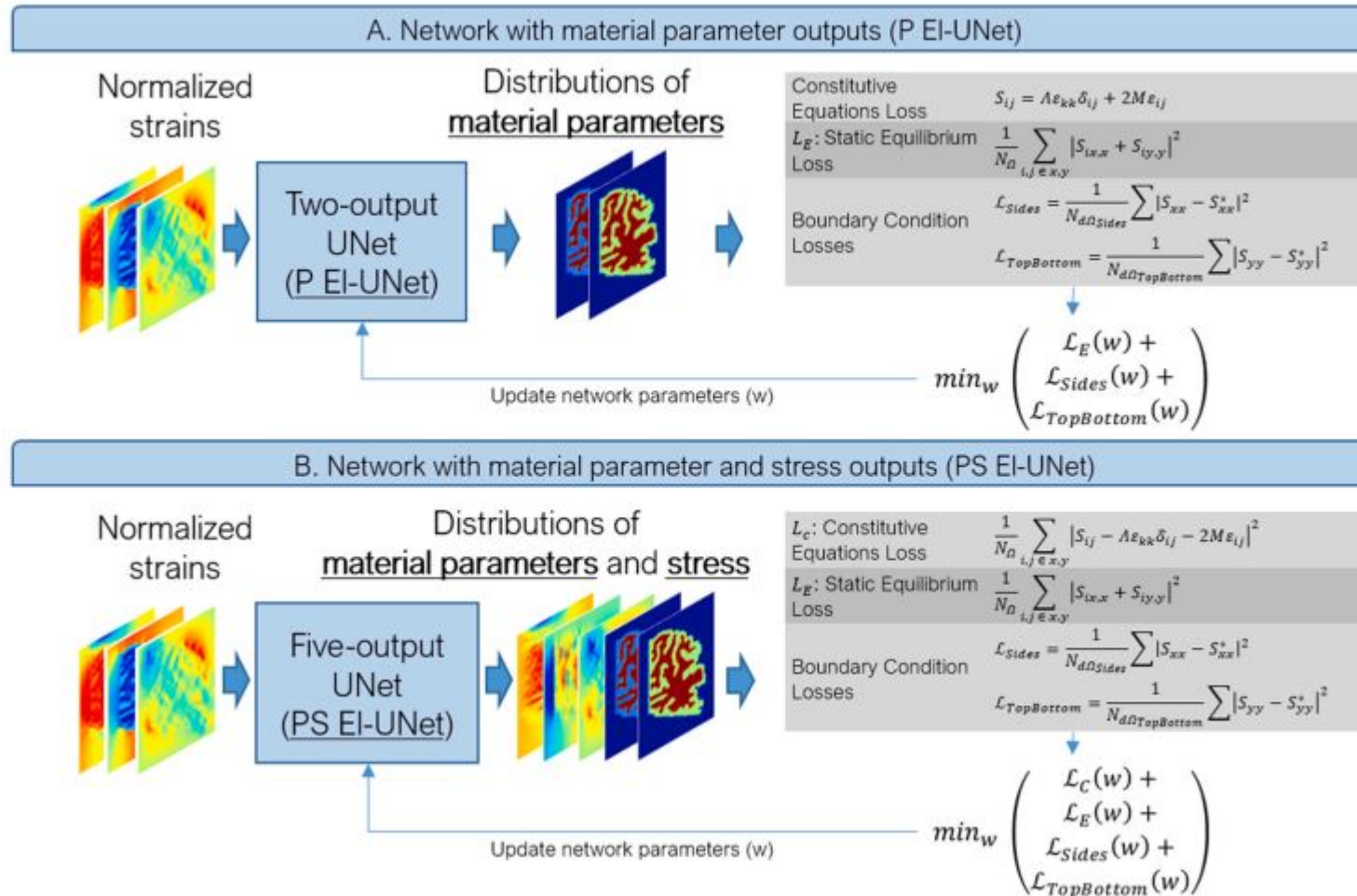
1. Нейронная сеть $u_\theta(x, t)$ принимает на вход координаты и время, возвращая предсказанное значение искомой физической величины (скорость, температура и т.д.)
2. С помощью автоматического дифференцирования (AD) вычисляем производные выхода сети по ее входам. Эти производные подставляются в уравнение $f(u) = 0$, чтобы вычислить невязку.

Что такое PINN?

Например, для уравнения теплопроводности:

$$\text{Невязка} = \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Здесь нейросеть предсказывает $u(x,t)$, а AD позволяет получить $\partial u / \partial t$ и $\partial^2 u / \partial x^2$.



Physics-informed UNets for discovering hidden elasticity in heterogeneous materials

Ali Kamali, Kaveh Laksar, 2024

PINN пример 1

Уравнение движения:

$$\nabla \cdot (\mathbf{P}^e + \mathbf{P}^v) + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}},$$

Модель Кельвина-Фойгта:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} + \eta \frac{d\mathbf{C}}{dt},$$

Член потерь в PINN:

$$\mathcal{L}_{visc} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left\| \mathbf{P}^v - \eta \frac{d\mathbf{F}}{dt} \right\|^2$$

PINN пример 1

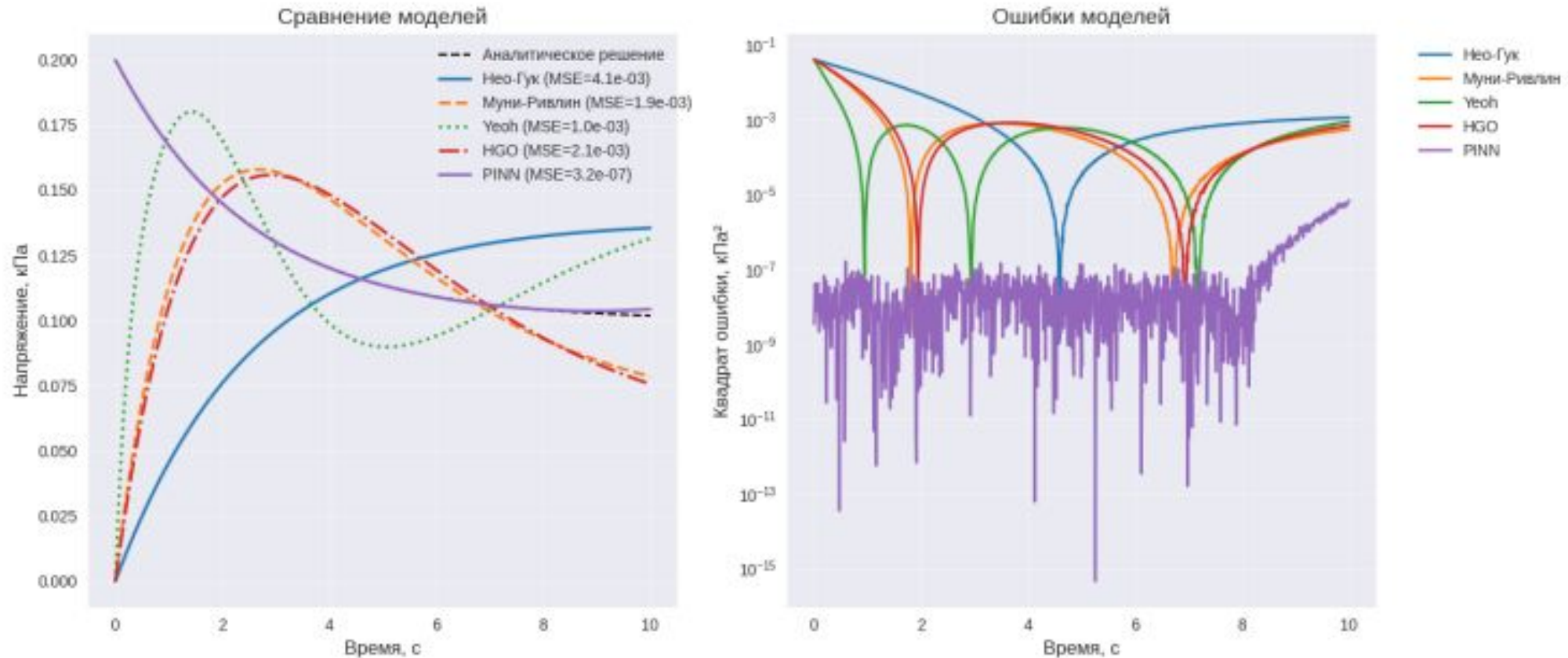


Рис. 1. Сравнение PINN с аналитическим решением и моделями

PINN пример 1

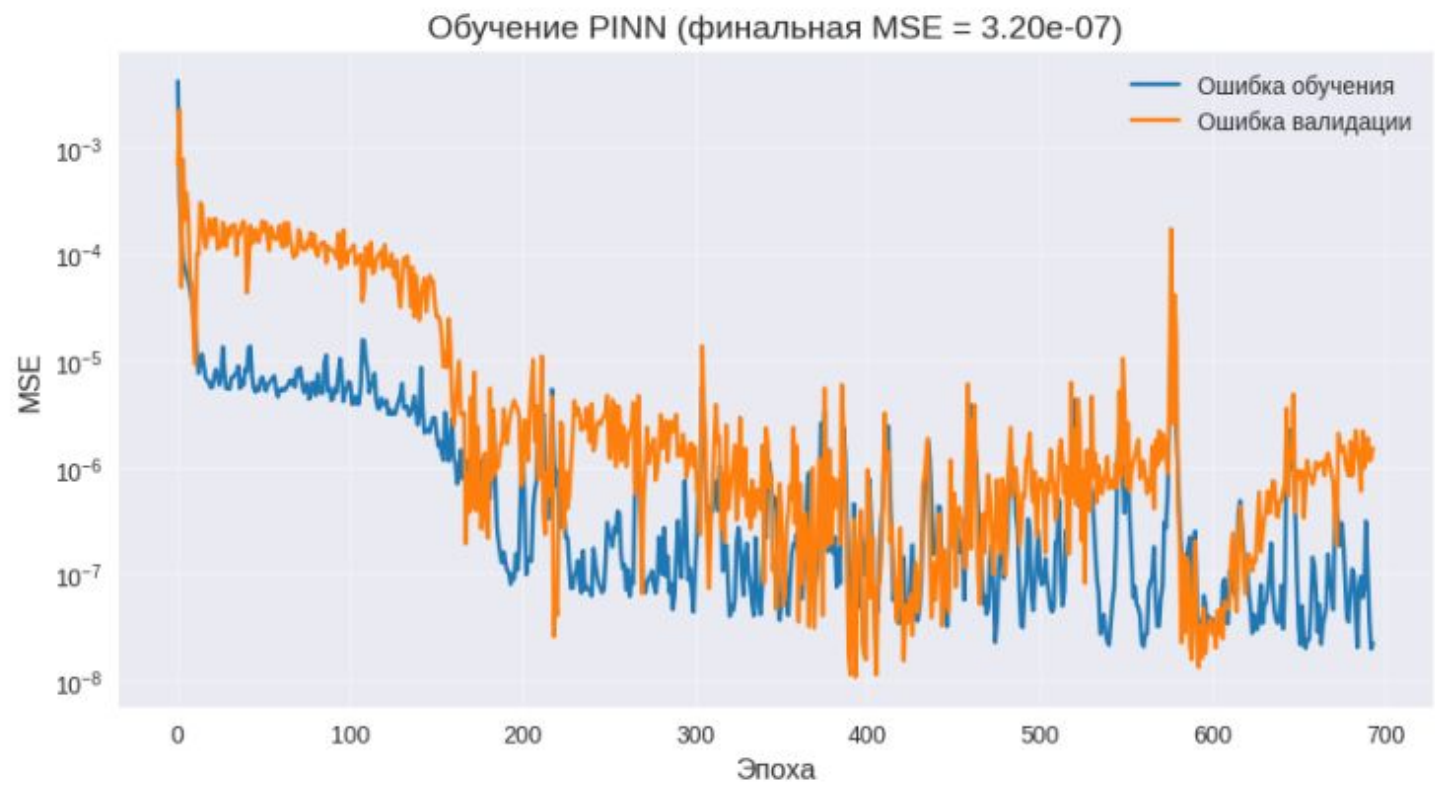


Рис. 2. Ошибка обучения PINN

Модель	MSE (kPa ²)	Улучшение
PINN	3.199×10^{-7}	12 811.0
Yeoh	1.017×10^{-3}	4.0
Муни-Ривлин	1.897×10^{-3}	2.2
HGO	2.057×10^{-3}	2.0
Нео-Гук	4.099×10^{-3}	1.0

PINN в исследовании миокарда

Тензор деформаций:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Закон Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

Уравнения равновесия:

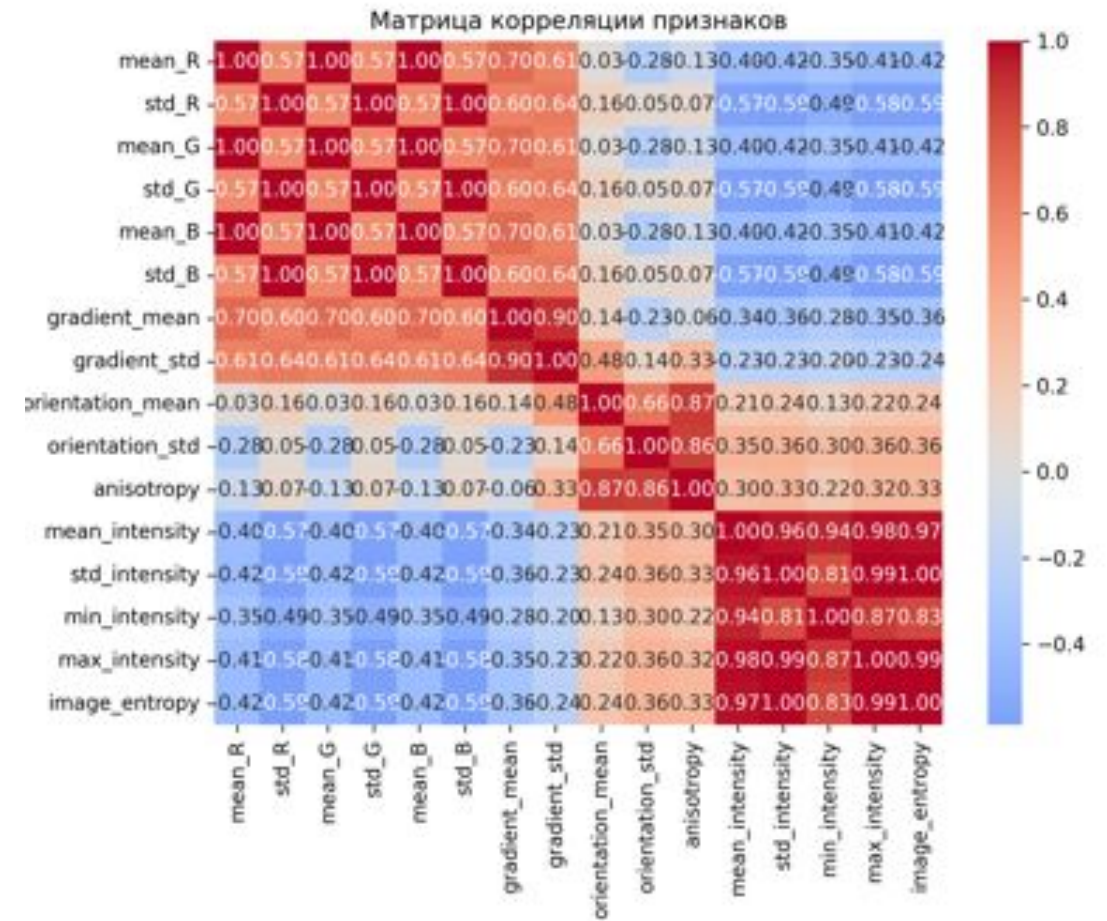
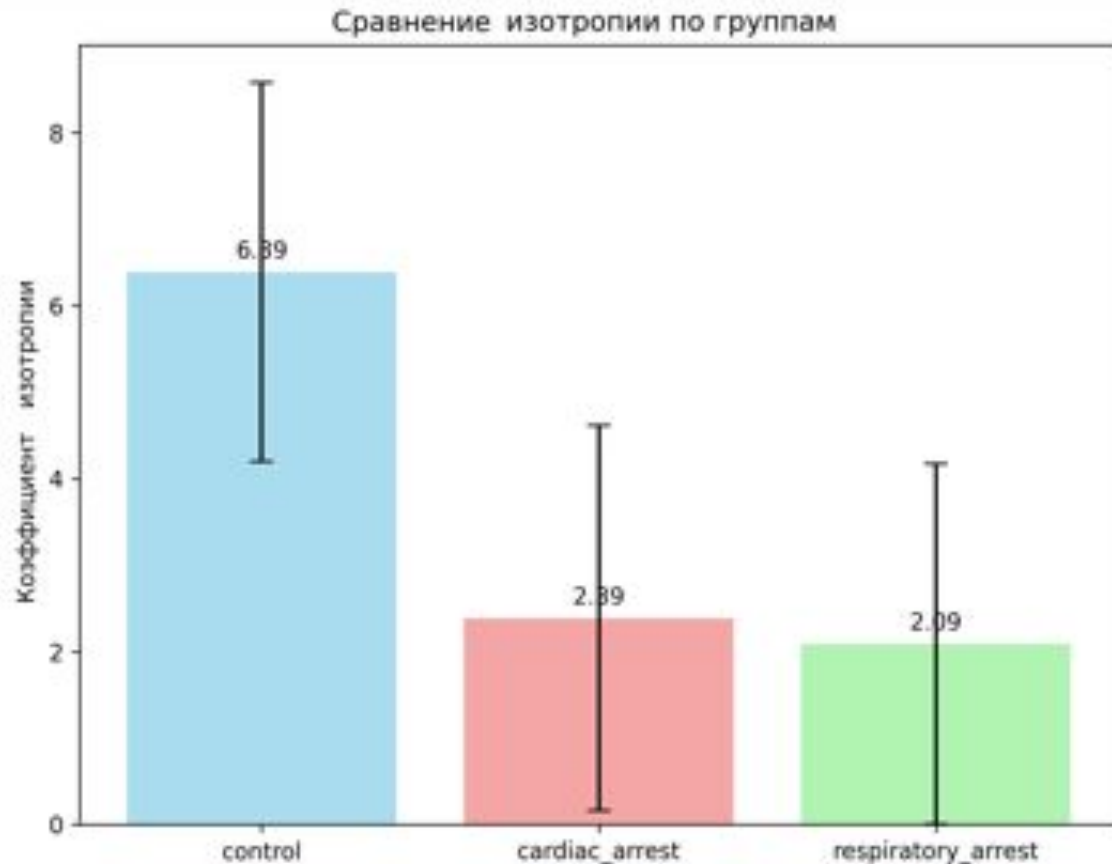
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

$$F_{\text{ratio}} = \frac{\sum \mathbb{I}(I_B > I_G + 0.1)}{N_{\text{pixels}}}$$

$$K_{\text{ratio}} = \frac{\sum \mathbb{I}(I_R > 0.4 \cap I_G < 0.3 \cap I_B < 0.3)}{N_{\text{pixels}}}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}^{-1}$$

PINN в исследовании миокарда



Заключение

1. PINN эффективно интегрируют физические уравнения и экспериментальные данные
2. Устраняют необходимость в трудоёмком построении расчётных сеток
3. Позволяют работать с ограниченными, зашумленными или неполными наборами данных
4. Могут одновременно определять неизвестные параметры системы и восстанавливать данные.

ВАШИ ВОПРОСЫ