

Вычислительная технология для расчёта диастолического состояния аортального клапана

Легкий А.А.¹, Саламатова В.Ю.²

¹ИВМ РАН

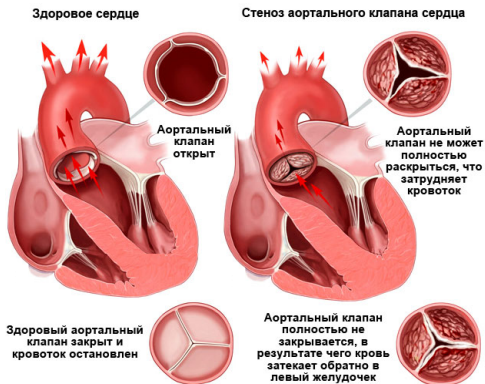
²Сеченовский университет

XVII конференция

«Математические модели и численные методы в биологии и медицине»

Аортальный клапан

Расположен на границе левого желудочка и аорты, препятствуя обратному току крови из аорты в левый желудочек



Стент аортального клапана

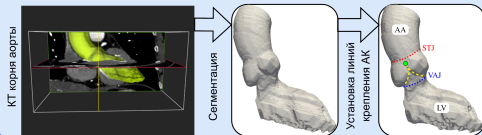


Шаблоны створок клапана на ткани перикарда

Макет технологии оптимизации дизайна створок

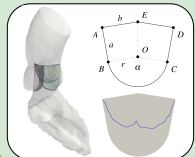
Подготовка входных данных

1. Получение поверхности корня аорты с линией крепления АК
2. Оценка диастолического трансклапанного давления
3. Оценка механических свойств неостворок $\mathbb{P}(\mathbb{F})$

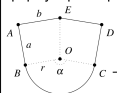


Результат

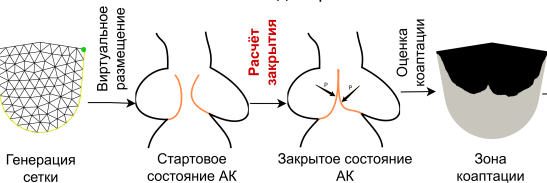
Геометрия неостворок и характеристики коаптации



Пробуем новую форму и размер



Численное моделирование



Цикл оптимизации дизайна неостворок

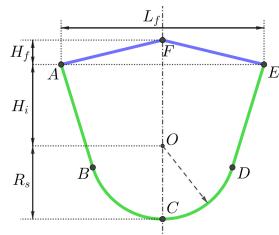
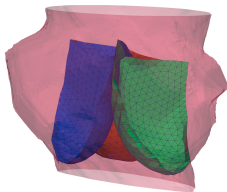
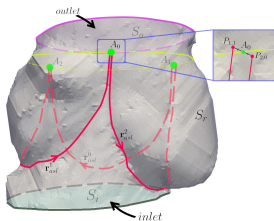


Математическая модель аортального клапана

- “Сухая” модель (без гемодинамики)
- Створки — оболочки Кирхгофа-Лява, $H \sim 0.2 - 0.5$ мм, $L \sim 15 \sim 35$ мм
- Плотность створок $\rho_0 \approx 1$ мг/мм³
- Створки из несжимаемого материала Гента с $E \sim 1000$ кПа, $J_m = 2.3$

$$\psi = -\frac{EJ_m}{6} \ln \left(1 - \frac{l_1 - 3}{J_m} \right)$$

- Диастолическое давление $P \sim 80$ мм рт. ст. закрывает клапан
- Пришиваемый край фиксирован: $x|_{\Gamma_{csl}} = r_{asl}$ и $x_n|_{\Gamma_{csl}} = \phi$
- Время достижения диастолического состояния $T = 70$ мс



Математическая формулировка задачи

- Уравнение механического равновесия в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \sigma + b = 0 \text{ при } x \in \Omega_t,$$

где $b = b(x)$ - плотность внешних сил, $\sigma = \sigma(x, \nabla x)$ - тензор напряжений

- Смешанные граничные условия $[\partial\Omega_t = \Gamma_u(t) \cup \Gamma_\sigma(t)]$:

$$x = \bar{x} \text{ на } \Gamma_u(t), \quad \sigma_n = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma(t)$$

Математическая формулировка задачи

- Уравнение механического равновесия в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \sigma + b = 0 \text{ при } x \in \Omega_t,$$

где $b = b(x)$ - плотность внешних сил, $\sigma = \sigma(x, \nabla x)$ - тензор напряжений

- Смешанные граничные условия $[\partial\Omega_t = \Gamma_u(t) \cup \Gamma_\sigma(t)]$:

$$x = \bar{x} \text{ на } \Gamma_u(t), \quad \sigma_n = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma(t)$$

- Принцип виртуальной работы в случае гиперупругого материала:
найти такое $x \in \tilde{H}^1(\Omega_t) \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{v} \in (H^1(\Omega_t))^3 : v = \bar{x} \text{ на } \Gamma_u\}$ что

$$\delta I = \delta(W - U) = 0,$$

где

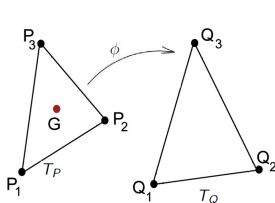
$$\delta U = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\Omega_0} \psi(\nabla x) d\Omega \right) \cdot \delta x, \quad \delta W = \int_{\Omega_t} b \cdot \delta x \, d\Omega$$

- Приближение тонкой оболочки $\delta U = \delta U^{memb} + \delta U^{bend}$,
 δU^{memb} зависит от изменения линейных расстояний,
 δU^{bend} зависит от изменения кривизны оболочки

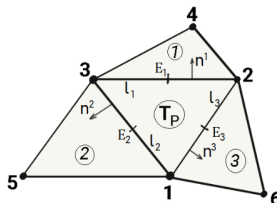
Дискретизация уравнений движения оболочки

- Конформная треугольная сетка в исходной области Ω_0
- Актуальное положение x - P_1 конечные элементы, *2d SVK: Delingette H., 2008*
- Аппроксимация кривизны κ на патче треугольников, *Basic shell triangle: Oñate, Flores, 2005*
- Метод инкрементального контактного потенциала (IPC) + отслеживание барьеров, *IPC: Li M. 2020 и Huang Z. 2024*
- Метод Ньютона с отслеживанием барьеров через оценку максимального допустимого шага

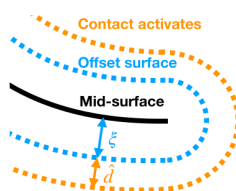
$$-\mathbf{F}_v^{memb} - \mathbf{F}_v^{bend} - \mathbf{F}_v^{ext} - \mathbf{F}_v^{contact} = 0, \quad v = 1, \dots, N$$



T_P элемент



Π_P патч

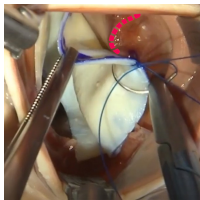


зона отталкивания

Учёт особенностей процедуры вшивания лепестков

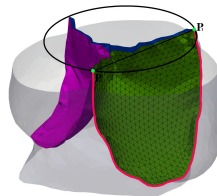
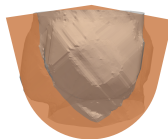
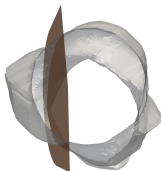
Вшивание

Размещение створки в полости аорты



Модель

Алгоритм виртуального размещения створки

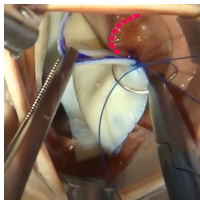


Учёт особенностей процедуры вшивания лепестков

Вшивание

Размещение створки в полости аорты

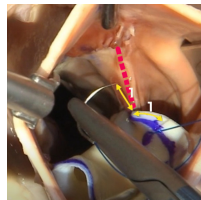
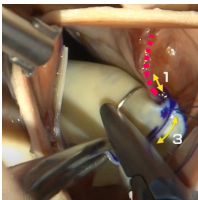
Нелин. по длине отображение пришиваемой границы лепестка на поверхность аорты



Модель

Алгоритм виртуального размещения створки

Гран. условие $x|_{\Gamma_{csl}} = r_{asl}$ с нелин. по длине кривой Γ_{csl} функцией r_{asl}



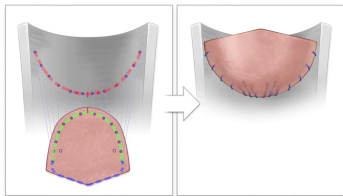
Учёт особенностей процедуры вшивания лепестков

Вшивание

Размещение створки в полости аорты

Нелин. по длине отображение пришиваемой границы лепестка на поверхность аорты

Поджатие нитями внешней стороны створки к аорте

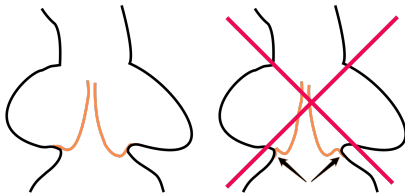


Модель

Алгоритм виртуального размещения створки

Гран. условие $x|_{\Gamma_{csl}} = r_{asl}$ с нелин. по длине кривой Γ_{csl} функцией r_{asl}

Гран. условие выстилания
 $x'_n|_{\Gamma_{csl}} = \phi$



Учёт особенностей процедуры вшивания лепестков

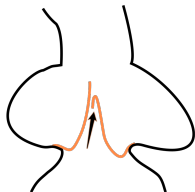
Вшивание

Размещение створки в полости аорты

Нелин. по длине отображение пришиваемой границы лепестка на поверхность аорты

Поджатие нитями внешней стороны створки к аорте

Регулировка конфигурации клапана, устранение пролапса



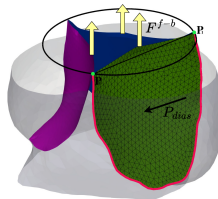
Модель

Алгоритм виртуального размещения створки

Гран. условие $x|_{\Gamma_{csl}} = r_{asl}$ с нелин. по длине кривой Γ_{csl} функцией r_{asl}

Гран. условие выстилания $x'_n|_{\Gamma_{csl}} = \phi$

Искусственная удерживающая сила при виртуальном размещении



Учёт особенностей процедуры вшивания лепестков

Вшивание

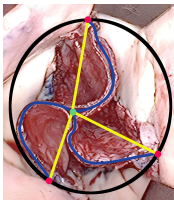
Размещение створки в полости аорты

Нелин. по длине отображение пришиваемой границы лепестка на поверхность аорты

Поджатие нитями внешней стороны створки к аорте

Регулировка конфигурации клапана, устранение пролапса

Неплоская поверхность контакта



Модель

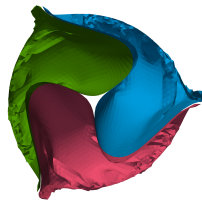
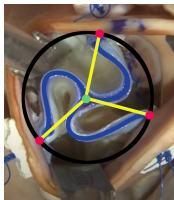
Алгоритм виртуального размещения створки

Гран. условие $x|_{\Gamma_{csl}} = r_{asl}$ с нелин. по длине кривой Γ_{csl} функцией r_{asl}

Гран. условие выстилания $x'_n|_{\Gamma_{csl}} = \phi$

Искусственная удерживающая сила при виртуальном размещении

Неплоская поверхность контакта



Алгоритм размещения створок внутри корня аорты

1. Размещение уменьшенных створок в просвете аорты

- уменьшаем створку, помещаем в аорту и тянем границу закрепления
- если есть физ. пересечения, повторяем процесс

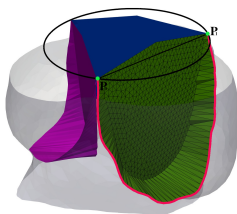
2. Расправление створок

- последовательно увеличиваем нач. размер створки до истинного
- решаем задачу стат. равновесия при F^{f-b} и P с материалом ψ_{NH}

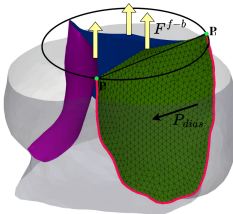
3. Релаксация деформаций

- последовательно меняем податливость материала α от 1 до 0
- решаем задачу стат. равновесия при F^{f-b} и P с материалом

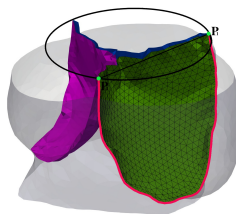
$$\psi_{\alpha}(\mathbb{C}) = \alpha\psi_{NH}(\mathbb{C}) + \psi(\mathbb{I} + (1 - \alpha)[\mathbb{C} - \mathbb{I}])$$



Размещ. уменьш. створок

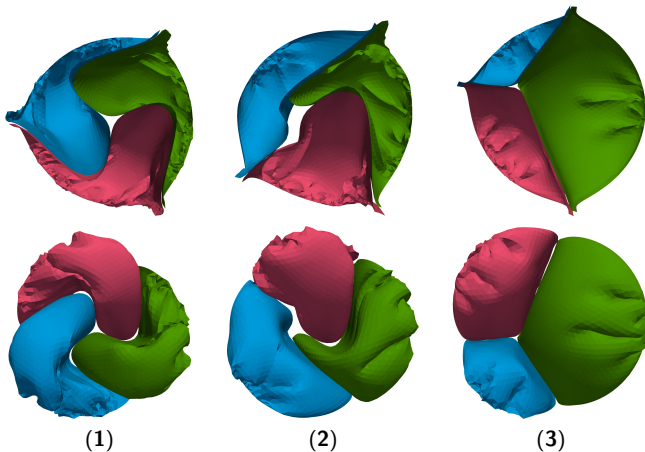


Расправл. створок



После расправл. и релакс.

Примеры размещения створок



Виртуальное размещение на цилиндрической аорте (1) больших одинаковых лепестков для правильного комиссурального треугольника (ком. тр-а), (2) лепестков разных размеров несогласованных с размерами сторон разностороннего ком. тр-а, (3) лепестков с квази-оптимальными для заданного ком. тр-а размерами

О характеристиках коаптации

Зона коаптации – область соприкосновения лепестков

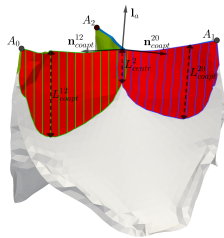
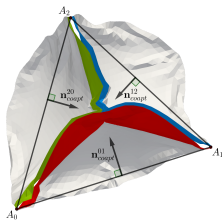
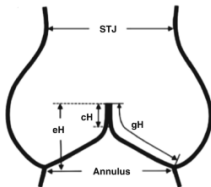
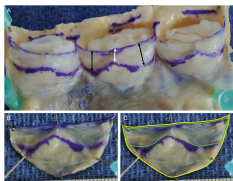
Эффективная высота – кратчайшее расстояние между вершиной коаптации створок аортального клапана и плоскостью фиброзного кольца

Центральная длина коаптации – ширина зоны коаптации, измеренная вдоль линии тройного соприкосновения лепестков

Боковая длина коаптации – наибольшая ширина зоны коаптации

Идеи обобщения определений:

1. Важны лишь внешние границы зон коаптации
2. Направление вдоль аорты l_a (для высот)
3. Направления разрезов n_{coapt}^{ij} (для ширины)



Первые шаги к валидации

- Поставлен натурный эксперимент об оценки замыкательной функции АК на 20 свиных корнях аорты¹
- Эксп. данные: геометрия аорты, створок, линии крепления, давление. Толщина створок и их жёсткость неизвестны, были взяты как $H = 0.2$ мм, $E = 3000$ кПа
- Коаптация в экспериментах превышала физиологические значения, поскольку процедура Озаки выбора размера шаблонов не подходит для свиной аорты

	$L_{coapt,l}$	$L_{coapt,r}$	L_{centr}	H_{eff}^{mean}	H_{bill}	S_{coapt}
min	10.69	9.62	7.71	7.12	1.26	173.3
max	20.97	18.31	17.40	13.72	9.33	622.9
mean	14.77	14.37	11.52	9.98	4.25	400.7
MPE	+15.8%	+17.8%	+9.4%	+48.5%	-23.9%	+0.4%
MAPE	18.3%	19.9%	13.1%	48.5%	40.2%	5.5%

Результаты натурных экспериментов и их сравнение с численными расчётами.

$$MPE(A) = 100\% \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{num} - A_i^{nat}}{A_i^{nat}} \text{ и } MAPE(A) = 100\% \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{A_i^{num} - A_i^{nat}}{A_i^{nat}} \right|$$

- Даже несмотря на отсутствие данных о мех. с-вах используемого перикарда и его толщины, а также пренебрежение изгибной жёсткостью, по ряду параметров демонстрируется согласованность с натурным экспериментом

¹Каравайкин, П. А. Математическое моделирование в прогнозировании замыкательной функции аортального клапана после неокуспидизации : Канд. дис.:3.1.15

- Предложена персонализированная модель для оценки коаптации реконструированного аортального клапана в диастолическом состоянии
- Отмечены некоторые особенности хирургического вшивания створок и с их учётом предложен автоматический алгоритм виртуального размещения тонких створок клапана в просвете корня аорты пациента
- Математически формализованы медицинские понятия, используемые для оценки состоятельности АК
- Представлено сравнение расчётов закрытия клапанов Озаки на ряде геометрий корня аорты свиней с результатами натурального эксперимента.

Работа выполнялась при поддержке проектов РНФ 19-71-10094, 21-71-30023 и при поддержке МЦМУ ИВМ РАН 75-15-2022-286 и 075-15-2025-347

Спасибо за внимание!