

Экономичная аппроксимация дробной производной для задач гемодинамики

Руслан Янбарисов^{1,2} Тимур Гамилов^{1,2}

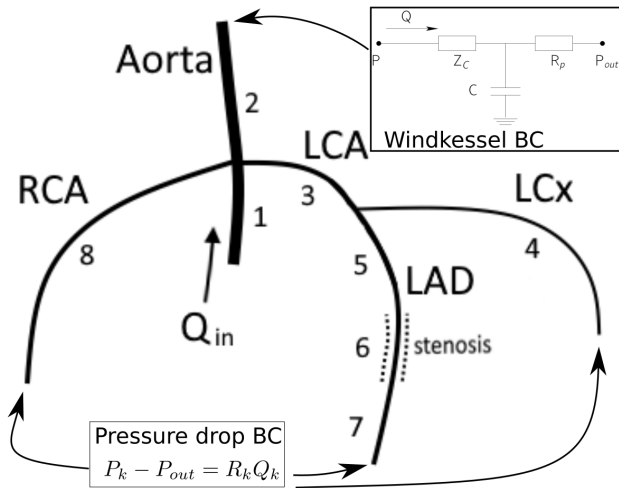
¹Сеченовский университет, Москва

²Институт вычислительной математики РАН им. Г.И.Марчука

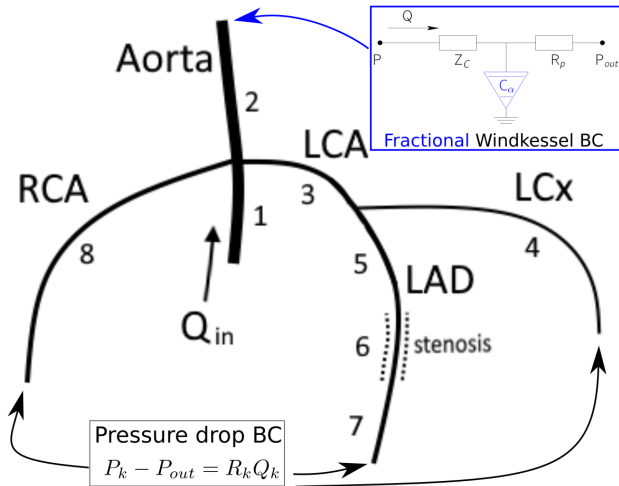
XVI конференция "Математические модели и численные методы в
биологии и медицине"

1 ноября 2024

Кровоток в коронарных сосудах

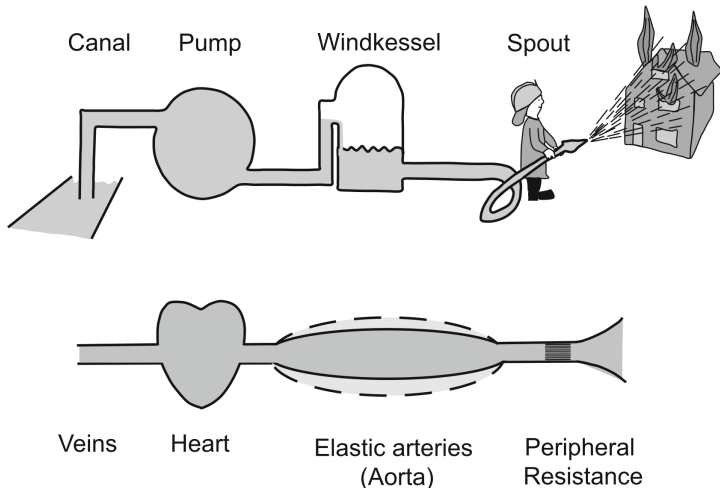


Кровоток в коронарных сосудах



T.Gamilov, R.Yanbarisov (2023). Fractional-Order Windkessel Boundary Conditions in a One-Dimensional Blood Flow Model for Fractional Flow Reserve (FFR) Estimation

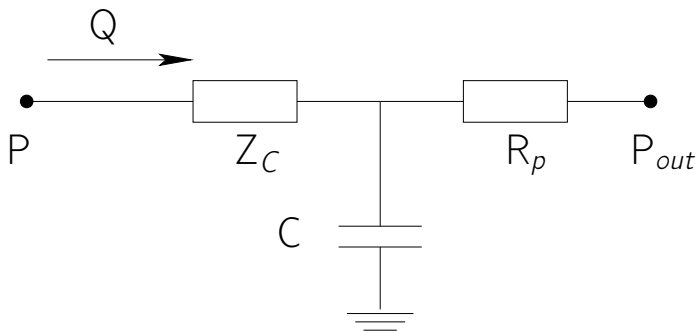
Модель Виндкесселя ¹



¹Frank O. (1899) Die Grundform des Arteriellen Pulses

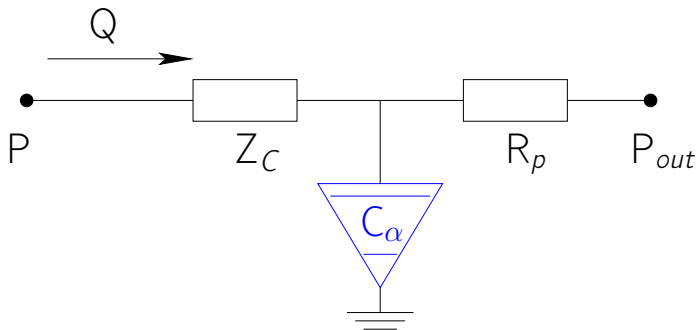
Трехэлементная модель Виндкесселя

$$Z_C C \frac{dQ}{dt} + \left(1 + \frac{Z_C}{R_p}\right) Q = C \frac{dP}{dt} + \frac{P - P_{out}}{R_p}$$



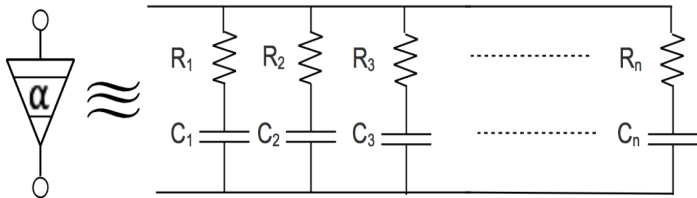
Трехэлементная дробнодифференциальная модель Виндкесселя

$$Z_C C_\alpha D_\alpha^t Q + \left(1 + \frac{Z_C}{R_p}\right) Q = C_\alpha D_\alpha^t P + \frac{P - P_{out}}{R_p}$$



Трехэлементная дробнодифференциальная модель Виндкесселя

$$Z_C C_\alpha D_\alpha^t Q + \left(1 + \frac{Z_C}{R_p}\right) Q = C_\alpha D_\alpha^t P + \frac{P - P_{out}}{R_p}$$



Bahloul M. et al. (2018) Three-Element Fractional-Order Viscoelastic Arterial Windkessel Model.

Трехэлементная дробнодифференциальная модель Виндкесселя

$$Z_C C_\alpha D_\alpha^t Q + \left(1 + \frac{Z_C}{R_p}\right) Q = C_\alpha D_\alpha^t P + \frac{P - P_{out}}{R_p}$$

Здесь $0 < \alpha < 1$,

$$D_t^\alpha U(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\frac{dU}{dt}(s)}{(t-s)^\alpha} ds \quad (1)$$

– дробная производная Капуто (свертка производной с ядром $K(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$).

Причины использования *дробнодифференциальной* модели?

- Неточные оценки для растяжимости из-за предположения упругости (а не вязкоупругости ²) сосудов
- Использование простой вязкоупругой модели Фойта не позволяет качественно описать тесты с релаксацией напряжений ³
- Использование цепи из базовых подмоделей Фойта – нужно оценивать много параметров по недостаточным данным
- Модели с дробными производными могут учитывать вязкоупругие свойства сосудов меньшим числом параметров

²Craiem D.O. et al. (2008) Fractional calculus applied to model arterial viscoelasticity

³J. M. Canty Jr. et al. (1985). Pressure and tone dependence of coronary diastolic input impedance and capacitance

L1-аппроксимация дробной производной

$$D_t^\alpha U(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{dU}{dt}(s) (t-s)^{-\alpha} ds$$

$$(D_t^\alpha U)(t_k) \approx \sum_{j=1}^k d_j^k (U^{k-j+1} - U^{k-j}) = \sum_{j=0}^k b_j^k U^j, \quad (2)$$

$$d_j^k = \frac{j^\alpha - (j-1)^\alpha}{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}, \quad b_j^k = \begin{cases} -d_k^k, & j=0 \\ d_j^k - d_{j-1}^k, & j=1, \dots, k \end{cases}$$

L1-аппроксимация дробной производной

$$D_t^\alpha U + \frac{1}{CR_p} U = -\frac{R_p Q + P_{out}}{CR_p} \quad (\text{модель Виндкесселя})$$

$$(D_t^\alpha U)(t_k) \approx \sum_{j=1}^k d_j^k (U^{k-j+1} - U^{k-j}) = \sum_{j=0}^k b_j^k U^j,$$

Неявный метод Эйлера для неизвестной на $n + 1$ шаге:

$$\sum_{j=0}^{n+1} b_j^{n+1} U^j + \frac{1}{CR_p} U^{n+1} = -\frac{R_p Q^{n+1} + P_{out}}{CR_p}$$

$$\left(b_j^{n+1} + \frac{1}{CR_p} \right) U^{n+1} = -\frac{R_p Q^{n+1} + P_{out}}{CR_p} - \sum_{j=0}^n b_j^{n+1} U^j$$

Экономичный способ аппроксимации дробной производной⁴

$$D_t^\alpha U(t) = \int_0^t K(t-s) \frac{dU}{dt}(s) ds, \quad K(q) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} q^{-\alpha}$$

Можно найти аппроксимацию преобразования Лапласа \mathcal{L} от ядра дробной производной:

$$\mathcal{L}[K](s) = s^{\alpha-1} \approx \sum_{i=1}^{n_{exp}} \frac{a_i}{b_i + s} + \gamma_2. \quad (2)$$

Тогда обратным преобразованием получаем аппроксимацию самого ядра K :

$$K(t) \approx \sum_{i=1}^{n_{exp}} a_i \exp(-b_i t) + \gamma_2 \delta(t), \quad (3)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция.

⁴Vabischevich P.N. Approximate solution of the Cauchy problem for a first-order integrodifferential equation with solution derivative memory. JCAM. (2023)

Экономичный способ аппроксимации дробной производной

Подстановка аппроксимации ядра в дробную производную:

$$D_t^\alpha U(t) \approx \sum_{i=1}^{n_{exp}} a_i \underbrace{\int_0^t e^{-b_i(t-s)} \frac{dU}{dt}(s) ds}_{U_i(t)} + \gamma_2 \frac{dU}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n_{exp}} a_i U_i(t) + \gamma_2 \frac{dU}{dt}. \quad (4)$$

Оказывается, что $U_i(t)$ удовлетворяет следующему ОДУ:

$$\frac{dU_i}{dt} + b_i U_i = \frac{dU}{dt}, \rightarrow U_i = \frac{1}{b_i} \frac{dU}{dt} - \frac{1}{b_i} \frac{dU_i}{dt}. \quad (5)$$

Экономичный способ аппроксимации дробной производной

$$D_t^\alpha U + \frac{1}{CR_p} U = -\frac{R_p Q + P_{out}}{CR_p}.$$

$$D_t^\alpha U(t) \approx \sum_{i=1}^{n_{exp}} a_i U_i(t) + \gamma_2 \frac{dU}{dt}$$

$$\frac{1}{b_i} \frac{dU}{dt} - \frac{1}{b_i} \frac{dU_i}{dt} = U_i, i = 1, \dots, n_{exp}$$

$$\sum_{i=1}^{n_{exp}} a_i U_i(t) + \gamma_2 \frac{dU}{dt} + \frac{1}{CR_p} U = -\frac{R_p Q + P_{out}}{CR_p}$$

$$\frac{1}{b_i} \frac{dU}{dt} - \frac{1}{b_i} \frac{dU_i}{dt} = U_i, i = 1, \dots, n_{exp}$$

Можно записать как систему уравнений с вектором неизвестных

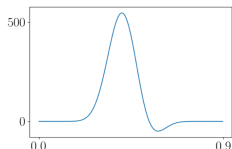
$U = (U \ U_1 \ \dots \ U_{n_{exp}})^T$ и матрицами A, B:

$$B \frac{dU}{dt} + AU = F$$

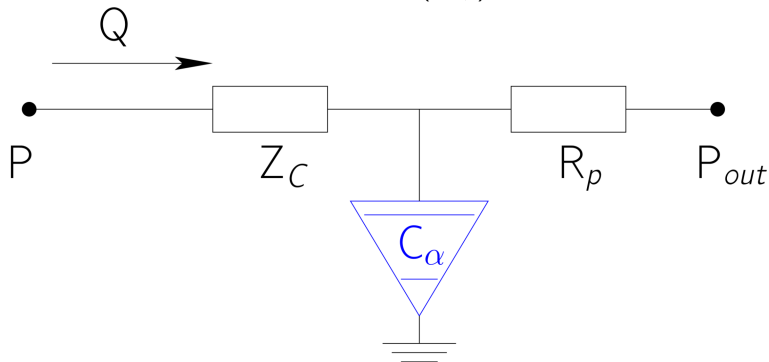
Экономичность аппроксимации

- L1-аппроксимация: для N шагов по времени потребуется $\mathcal{O}(N^2)$ операций, $\mathcal{O}(N)$ памяти для хранения предыстории.
- Подход с суммой экспонент: для N шагов по времени потребуется $\mathcal{O}(N)$ операций, $n_{exp} = \mathcal{O}(1)$ для хранения предыстории.

Нульмерная модель



$$Q(t, n, \phi) = \frac{SV}{A(n, \phi)} \sin^n(\omega t) \cos(\omega t - \phi)$$



Stevens S.A. et al. (2003) A Differentiable, Periodic Function for Pulsatile Cardiac Output Based on Heart Rate and Stroke Volume.

Подзадача аппроксимации

Отдельная подзадача аппроксимации нелинейной функции рациональными функциями с оптимальной точностью на заданном интервале $[\tau, T]$:

$$\mathcal{L}[K](s) = s^{\alpha-1} \approx \sum_{i=1}^{n_{exp}} \frac{a_i}{b_i + s} + \gamma_2.$$

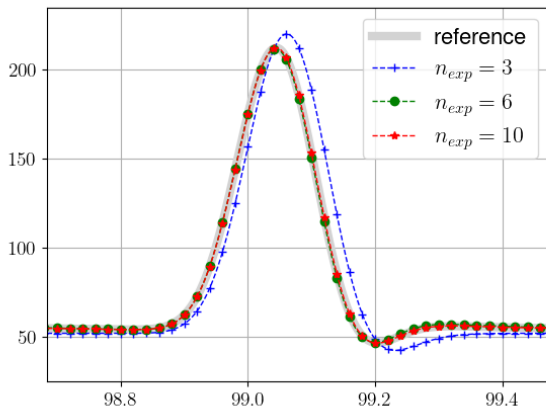
На точность влияют: количество слагаемых n_{exp} , величина интервала T .

Для решения этой подзадачи используется программный пакет `baryrat`⁵, использующий аппроксимацию рациональными функциями в барицентрической форме⁶.

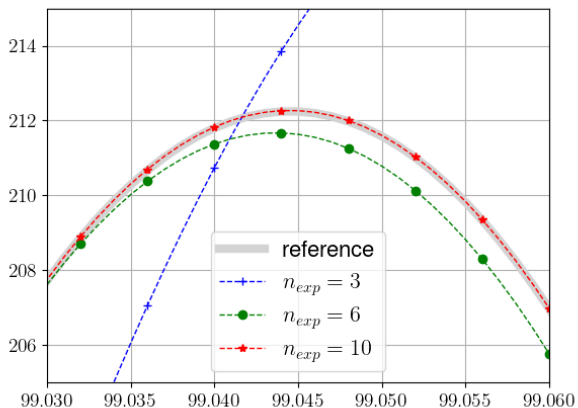
⁵<https://github.com/c-f-h/baryrat>

⁶C. Hofreither (2021). An algorithm for best rational approximation based on barycentric rational interpolation

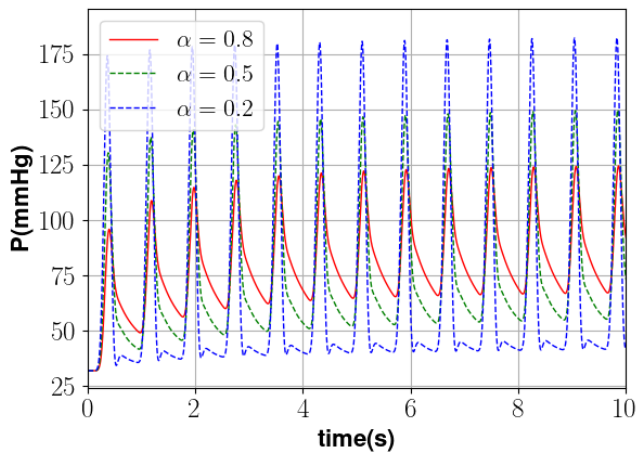
Влияние n_{exp} на точность аппроксимации



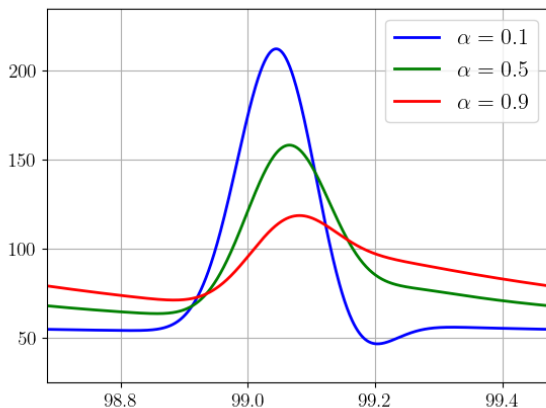
Влияние n_{exp} на точность аппроксимации



Влияние α на профиль пульсовой волны



Влияние α на профиль пульсовой волны

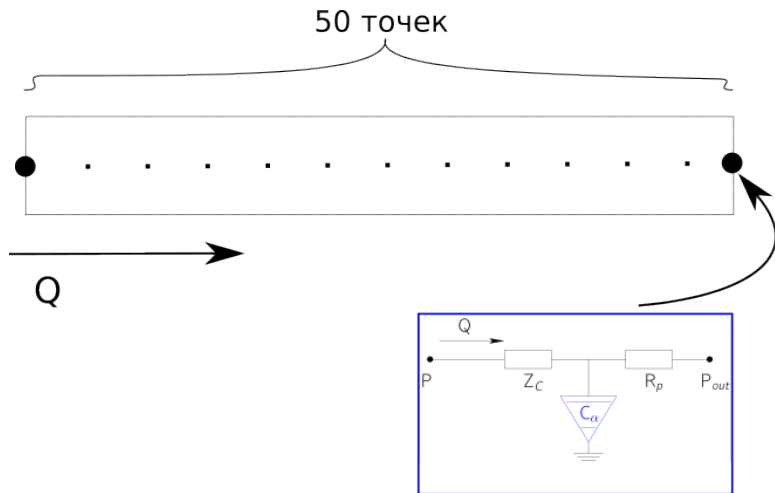


Нульмерная модель: сравнение времени расчетов

T	t_{wk}	t_{fwb}	t_{sewk}	t_{sewk}/t_{wk}	t_{fwb}/t_{wk}
10	1.6e-3	8.1e-2	2.3e-3	1.4	50
100	1.5e-2	7.7e0	2.6e-2	1.7	510
1000	1.9e-1	8.2e2	3.0e-1	1.6	4310

Время расчета для различных подходов аппроксимации дробной производной: прямой подход (L1-аппроксимация, t_{fwb}), подход с суммой экспонент t_{sewk} . Также приведено время расчета модели Виндкесселя t_{wk} с целочисленной производной для сравнения.

Одномерная модель кровотока: сравнение времени расчетов

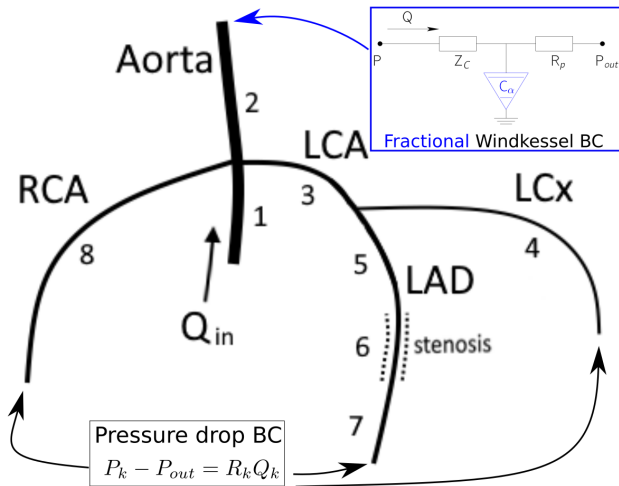


Одномерная модель кровотока: сравнение времени расчетов

T	t_{wk}	t_{sewk}	t_{fwb}	t_{sewk}/t_{wk}	t_{fwb}/t_{wk}
1.1	6	10	10	1.4	1.4
2.2	12	19	34	1.6	2.8
4.4	26	35	86	1.3	3.3
8.8	48	63	297	1.3	6.2
17.6	94	138	1060	1.5	11.3

Время расчета для различных подходов аппроксимации дробной производной: прямой подход (L1-аппроксимация, t_{fwb}), подход с суммой экспонент t_{sewk} . Также приведено время расчета модели Виндкесселя t_{wk} с целочисленной производной для сравнения.

Кровоток в коронарных сосудах



T.Gamilov, R.Yanbarisov. Fractional-Order Windkessel Boundary Conditions in a One-Dimensional Blood Flow Model for Fractional Flow Reserve (FFR) Estimation

Кровоток в коронарных сосудах: сравнение времени расчетов

T	t_{wk}	t_{sewk}	t_{fwk}	t_{sewk}/t_{wk}	t_{fwk}/t_{wk}
1.1	92	121	109	1.32	1.18
2.2	283	262	298	0.93	1.05
4.4	479	588	632	1.23	1.32
8.8	1007	1084	1265	1.08	1.26

Время расчета для различных подходов аппроксимации дробной производной: прямой подход (L1-аппроксимация, t_{fwk}), подход с суммой экспонент t_{sewk} . Также приведено время расчета модели Виндкесселя t_{wk} с целочисленной производной для сравнения.

Спасибо за внимание!