Deep-HyROMnet: использование глубокого обучения для гиперредукции нелинейных параметризованных УЧП

Данилова Светлана Сергеевна
Валетов Дмитрий Кириллович
Легкий Алексей Андреевич

Цель

- Улучшить существующую численную модель решения нелинейного параметризованного УЧП, добавив в нее нейронную сеть, которая позволит снизить размерность задачи, увеличив скорость решения.

На основе статьи «Deep-HyROMnet: A deep learning-based operator approximation for hyper-reduction of nonlinear parametrized PDEs» мы хотим разработать нейронную сеть для модели сердца. Начали мы с проверочной задачи с балкой из-за более простой физики.

Научная новизна

- Сетка

Нерегулярная сетка против регулярной сетки.

- Итерационный метод

Неточный метод Ньютона с оптимизацией величины шага против точного метода Ньютона.

- Генерация параметров

По методу Соболева против метода гиперкуба

Алгоритм решения

УЧП
$$R(\mathbf{u}(t;\boldsymbol{\mu}),t;\boldsymbol{\mu}) = 0 \quad \text{in } V',$$

Дискретизация
$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_h^n(\boldsymbol{\mu}),t^n;\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathbb{R}^{N_h},$$

Метод Ньютона
$$\begin{cases} \mathbf{J}(\mathbf{u}_h^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}),t^n;\boldsymbol{\mu})\delta\mathbf{u}_h^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}) = -\mathbf{R}(\mathbf{u}_h^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}),t^n;\boldsymbol{\mu}) \\ \mathbf{u}_h^{n,(k+1)}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{u}_h^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}) + \delta\mathbf{u}_h^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}) \end{cases}$$

Редукция

Хотим найти матрицу редукции $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N_h \times N}$, чтобы решать редуцированную задачу в пространстве меньшего размера $N \ll N_h$, порожденного матрицей редукции.

Матрица снэпшотов

$$\mathbf{S} = \left[\mathbf{u}_h(t^1;\boldsymbol{\mu}_1) \mid \ldots \mid \mathbf{u}_h(t^{N_t};\boldsymbol{\mu}_1) \mid \ldots \mid \mathbf{u}_h(t^1;\boldsymbol{\mu}_{n_s}) \mid \ldots \mid \mathbf{u}_h(t^{N_t};\boldsymbol{\mu}_{n_s})\right] \in \mathbb{R}^{N_h \times n_s}$$

Матрица редукции – первые N столбцов матрицы U. $\mathbf{S} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{Z}^T$

Выбор N

$$RIC(N) = \frac{\sum_{\ell=1}^{N} \sigma_i^2}{\sum_{\ell=1}^{r} \sigma_i^2} \geq 1 - \varepsilon_{POD}^2$$

Редукция

Нашли матрицу редукции $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N_h \times N}$, чтобы решать редуцированную задачу в пространстве меньшего размера $N \ll N_h$, порожденного матрицей редукции.

Малоранговая аппроксимация $\mathbf{V}\mathbf{u}_N^n(\boldsymbol{\mu}) \approx \mathbf{u}_h^n(\boldsymbol{\mu}), \qquad \mathbf{u}_N^n(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^N$

Редуцированное УЧП $\mathbf{V}^T\mathbf{R}(\mathbf{V}\mathbf{u}_N^n(\boldsymbol{\mu}), t^n; \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}.$

Редуцированный метод Ньютона

$$\begin{cases} \mathbf{J}_N(\mathbf{V}\mathbf{u}_N^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}), t^n; \boldsymbol{\mu})\delta\mathbf{u}_N^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}) = -\mathbf{R}_N(\mathbf{V}\mathbf{u}_N^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}), t^n; \boldsymbol{\mu}), \\ \mathbf{u}_N^{n,(k+1)}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{u}_N^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}) + \delta\mathbf{u}_N^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}), \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{V}^T\mathbf{R}$$

$$\mathbf{J}_N = \mathbf{V}^T\mathbf{J}\mathbf{V}$$

Зачем нужна нейросеть?

Хотим получить аппроксимацию, не зависящую от u

$$\mathcal{M}_{R_N} = \{\mathbf{R}_N(\mathbf{V}\mathbf{u}_N^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}), t^n; \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^N \mid n = 1, \ldots, N_t,\ k \geq 0,\ \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}\},$$

$$\mathcal{M}_{J_N} = \{\mathbf{J}_N(\mathbf{V}\mathbf{u}_N^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}), t^n; \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^{N\times N} \mid n = 1, \ldots, N_t,\ k \geq 0,\ \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}\},$$

Хотим генерировать

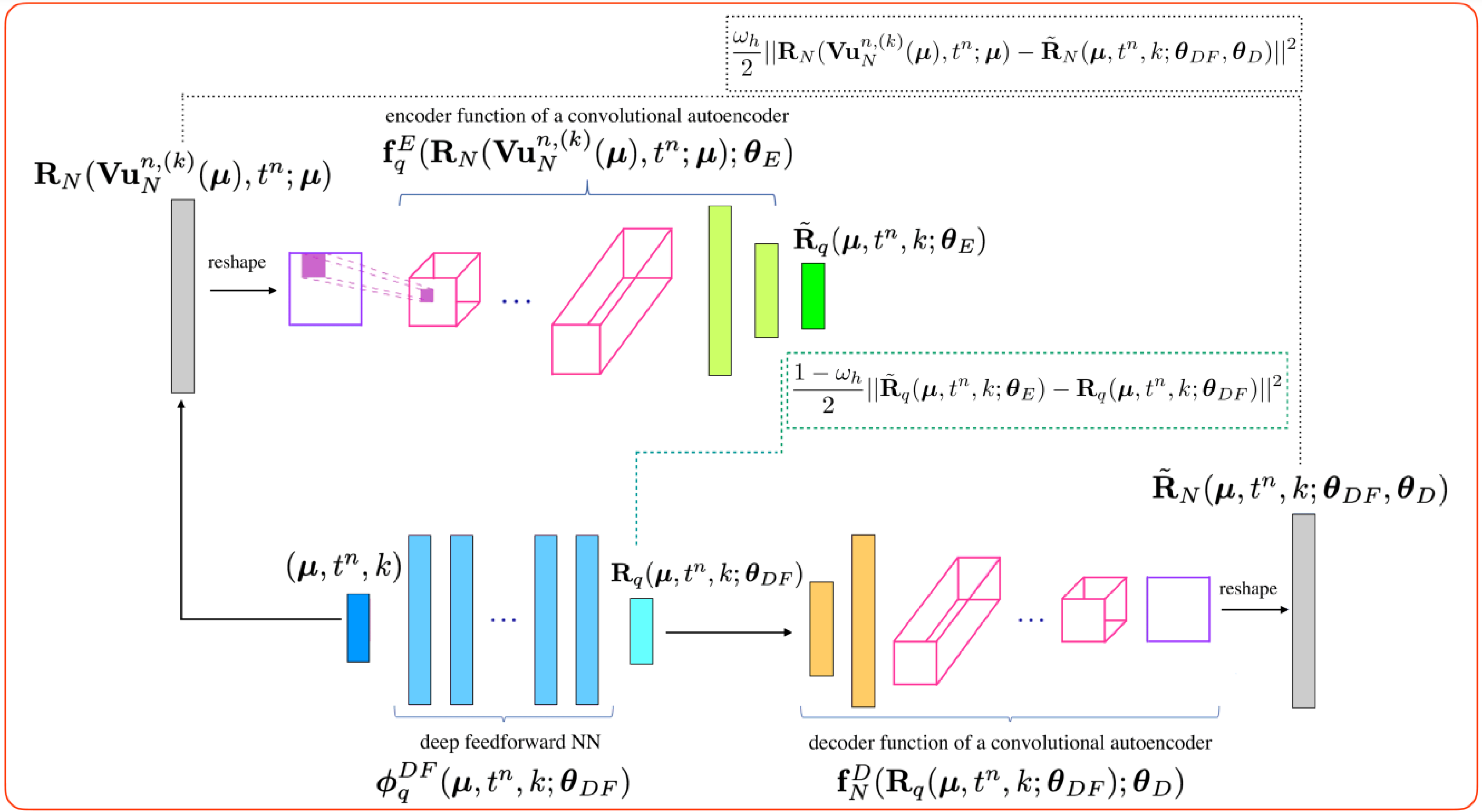
$$\boldsymbol{\rho}_N : (\boldsymbol{\mu}, t^n, k) \longmapsto \boldsymbol{\rho}_N(\boldsymbol{\mu}, t^n, k) \approx \mathbf{R}_N(\mathbf{V}\mathbf{u}_N^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}), t^n; \boldsymbol{\mu}),$$

$$\boldsymbol{\iota}_N : (\boldsymbol{\mu}, t^n, k) \longmapsto \boldsymbol{\iota}_N(\boldsymbol{\mu}, t^n, k) \approx \mathbf{J}_N(\mathbf{V}\mathbf{u}_N^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}), t^n; \boldsymbol{\mu}),$$

Метод Ньютона

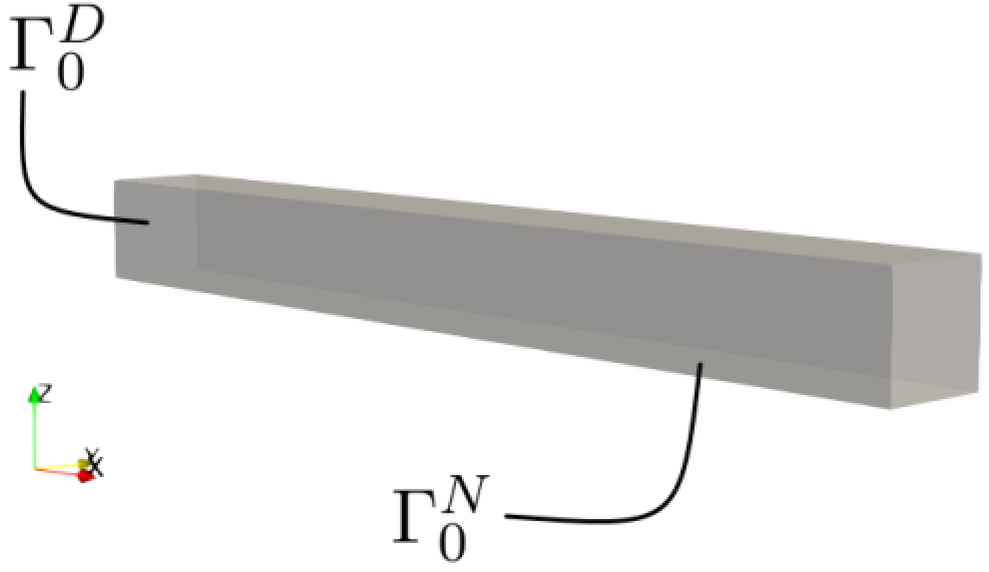
$$\begin{cases} \boldsymbol{\iota}_N(\boldsymbol{\mu}, t^n, k)\delta\mathbf{u}_N^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}) = -\boldsymbol{\rho}_N(\boldsymbol{\mu}, t^n, k), \\ \mathbf{u}_N^{n,(k+1)}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{u}_N^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}) + \delta\mathbf{u}_N^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}), \end{cases}$$

Архитектура нейросети



$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\boldsymbol{\mu}_\ell, t^n, k; \boldsymbol{\theta}) = & \frac{\omega_h}{2}\|\mathbf{R}_N(\mathbf{V}\mathbf{u}_N^{n,(k)}(\boldsymbol{\mu}_\ell), t^n; \boldsymbol{\mu}_\ell) - \widetilde{\mathbf{R}}_N(\boldsymbol{\mu}_\ell, t^n, k; \boldsymbol{\theta}_{DF}, \boldsymbol{\theta}_D)\|^2 \\
& + \frac{1-\omega_h}{2}\|\widetilde{\mathbf{R}}_q(\boldsymbol{\mu}_\ell, t^n, k; \boldsymbol{\theta}_E) - \mathbf{R}_q(\boldsymbol{\mu}_\ell, t^n, k; \boldsymbol{\theta}_{DF})\|^2,
\end{aligned}
$$

Деформация балки



Внешняя нагрузка

$$\mathbf{g}(t;\boldsymbol{\mu}) = \widetilde{p}\, t/T$$

- the shear modulus $G \in [0.5 \cdot 10^4, 1.5 \cdot 10^4]$ Pa;
- the bulk modulus $K \in [2.5 \cdot 10^4, 7.5 \cdot 10^4]$ Pa;
- the external load parameter $\widetilde{p} \in [2, 6]$ Pa.

Исходный размер задачи

$$N_h = 32796$$

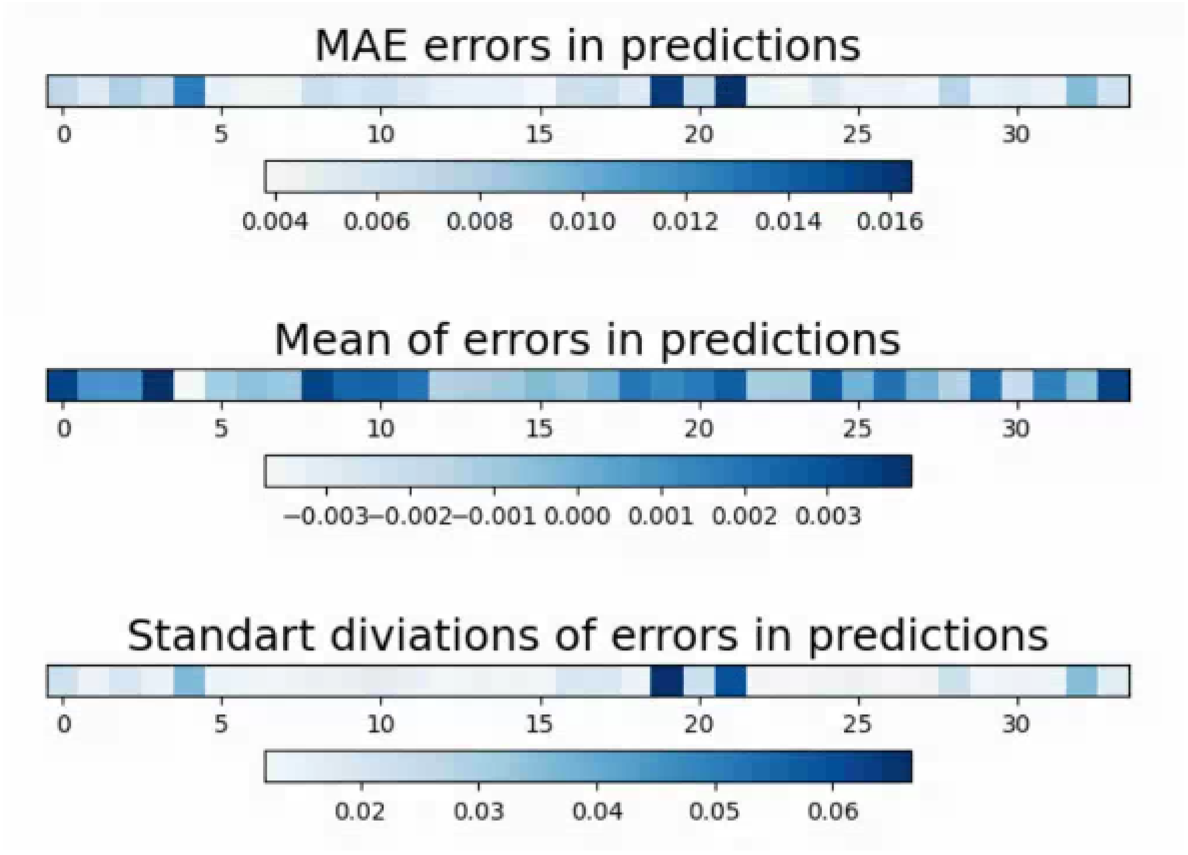
После редукции

$$\varepsilon_{POD} = 10^{-5}$$

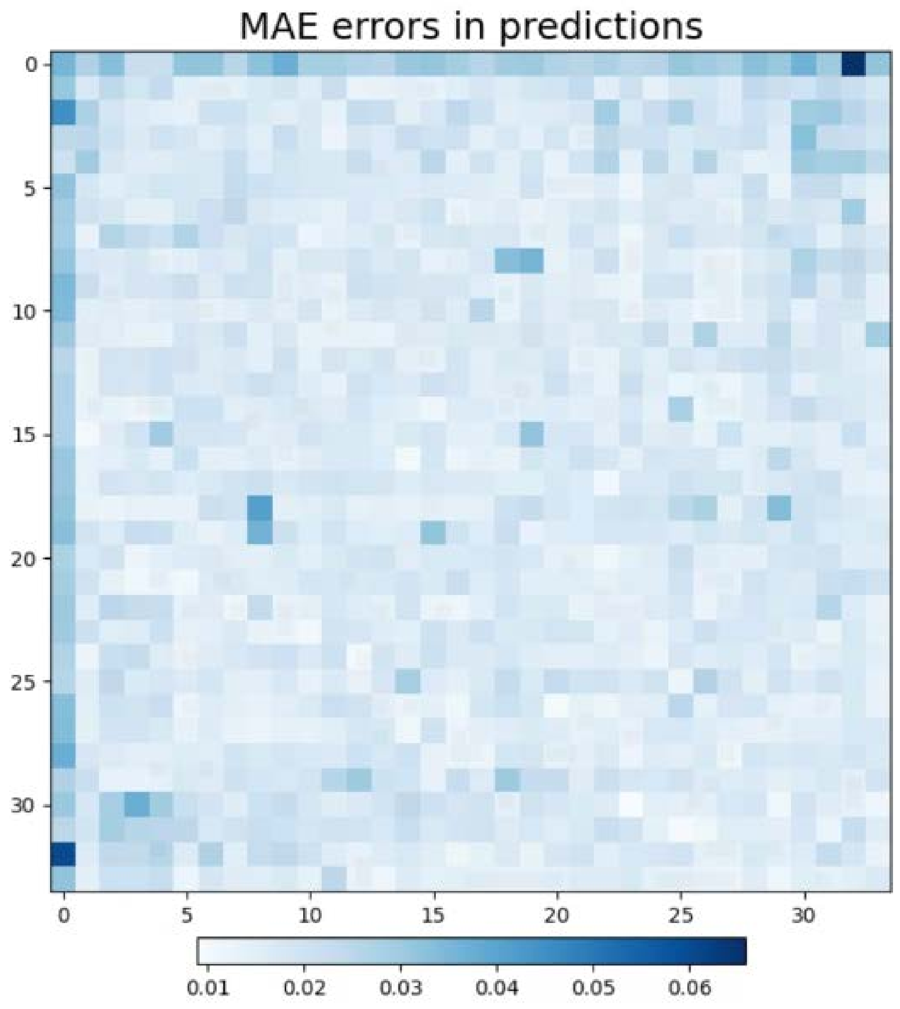
$$N = 34$$

Тестирование нейросети

Ошибки в предсказании R_N

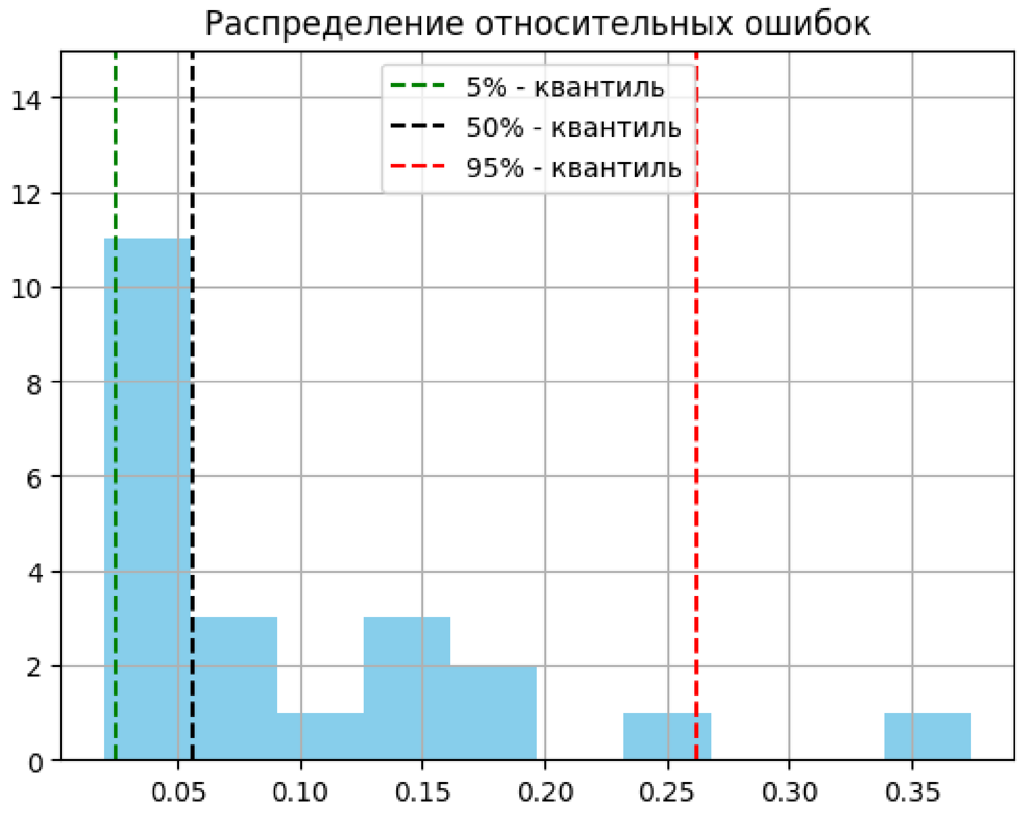


Ошибки в предсказании J_N



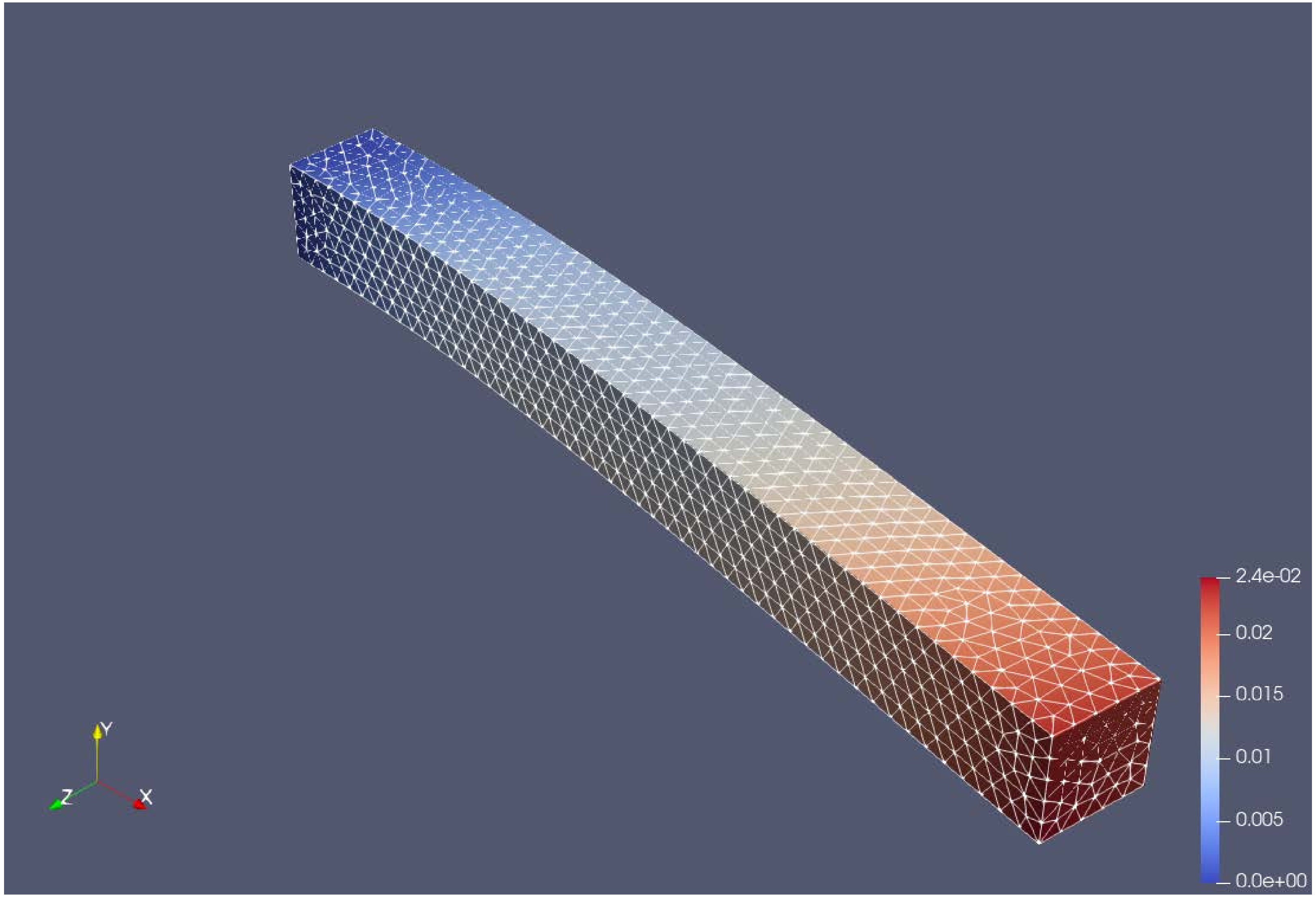
Результаты

Распределение ошибок на тестовых данных на последнем временном шаге T = 250 мс.



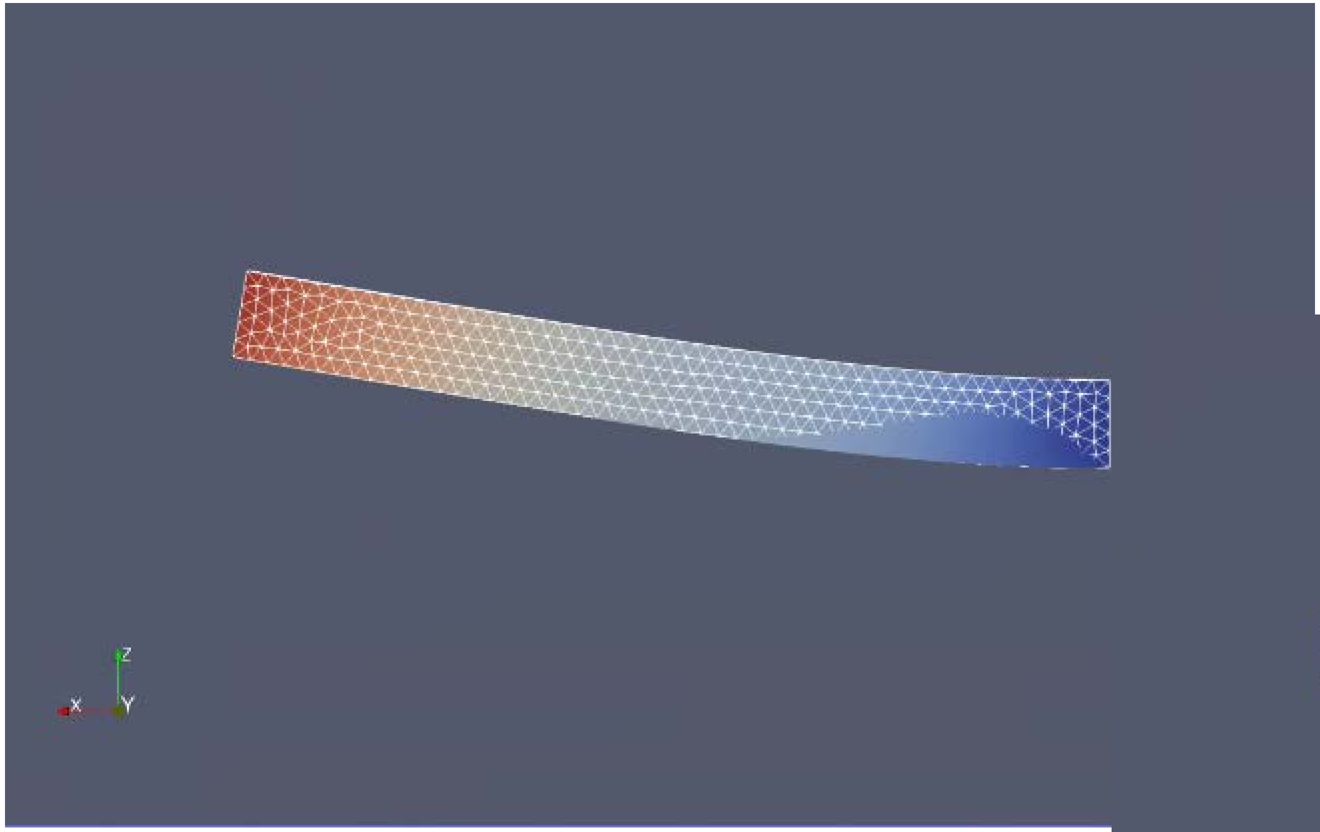
Результаты

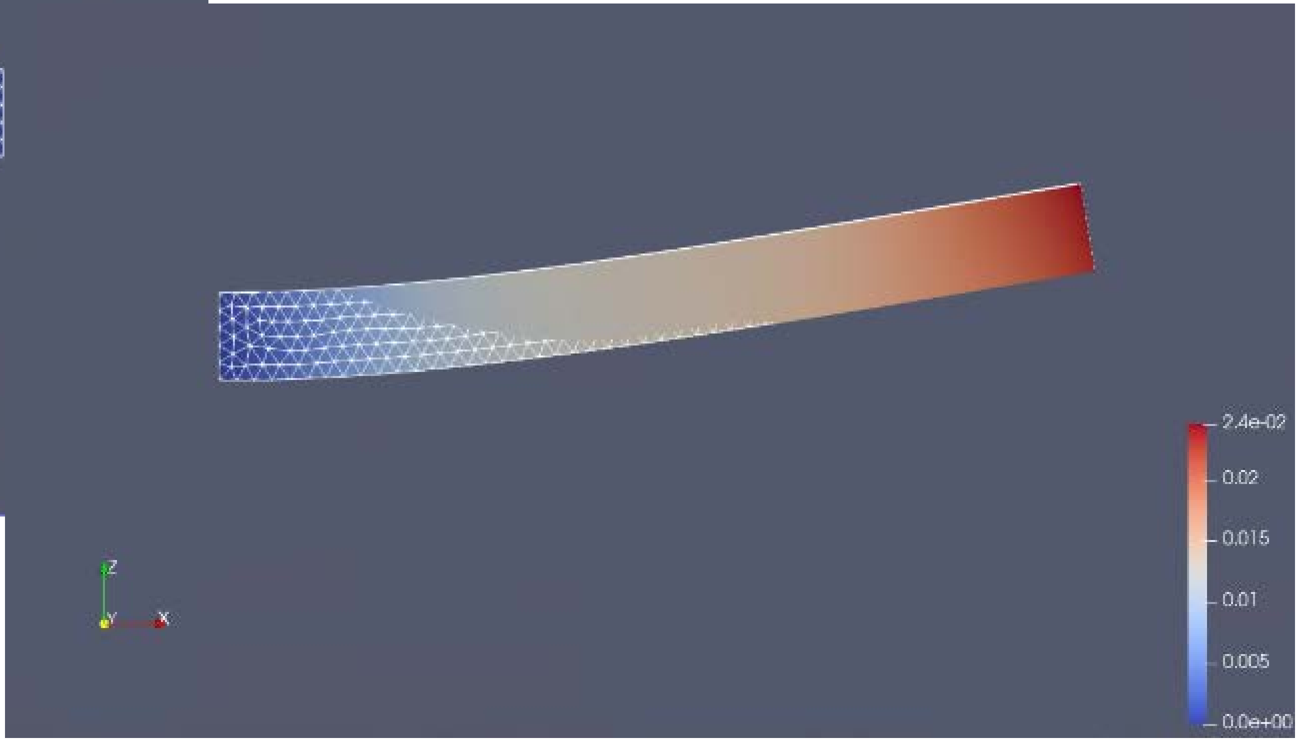
Медиана из «лучших» результатов



Результаты

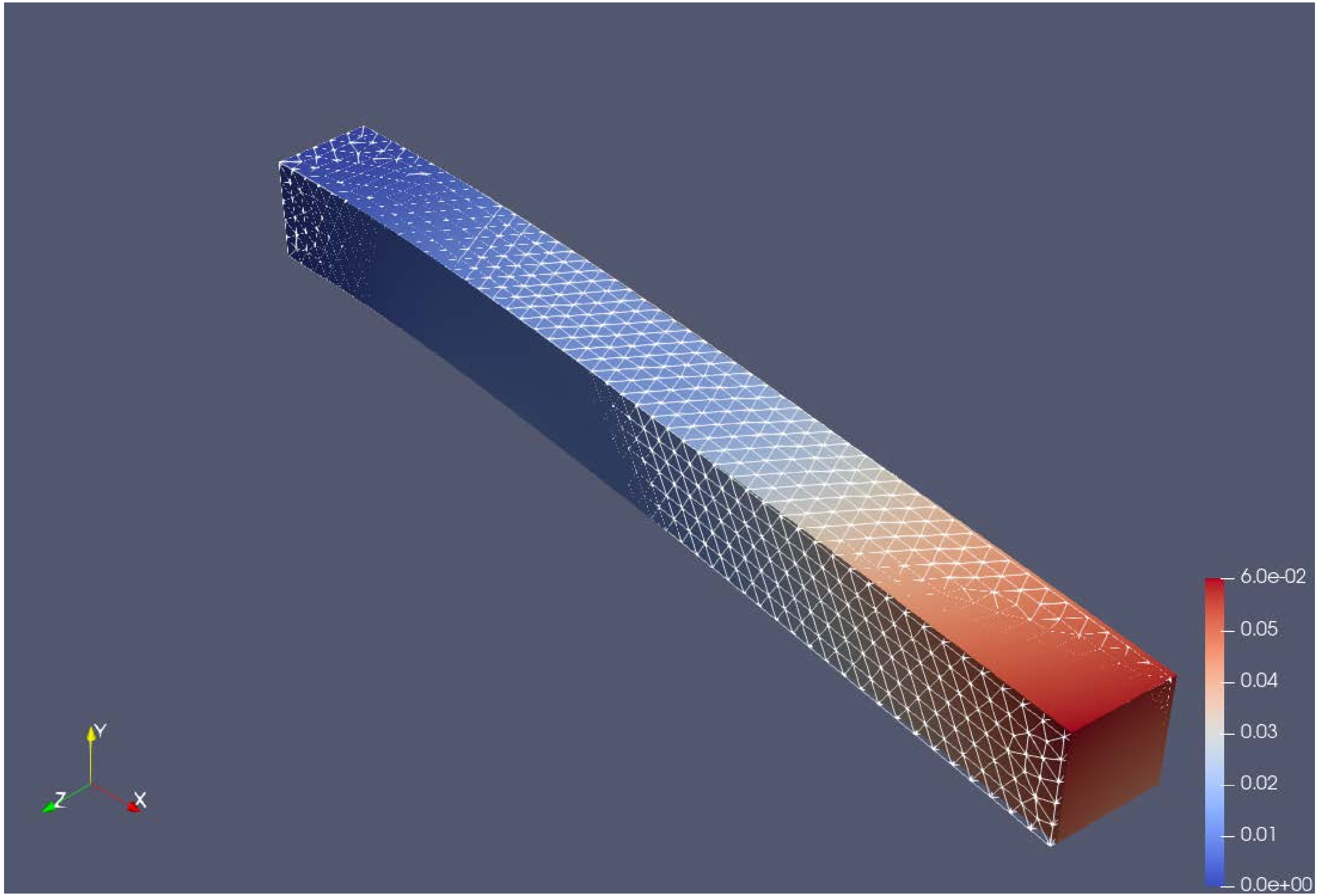
Медиана из «лучших» результатов





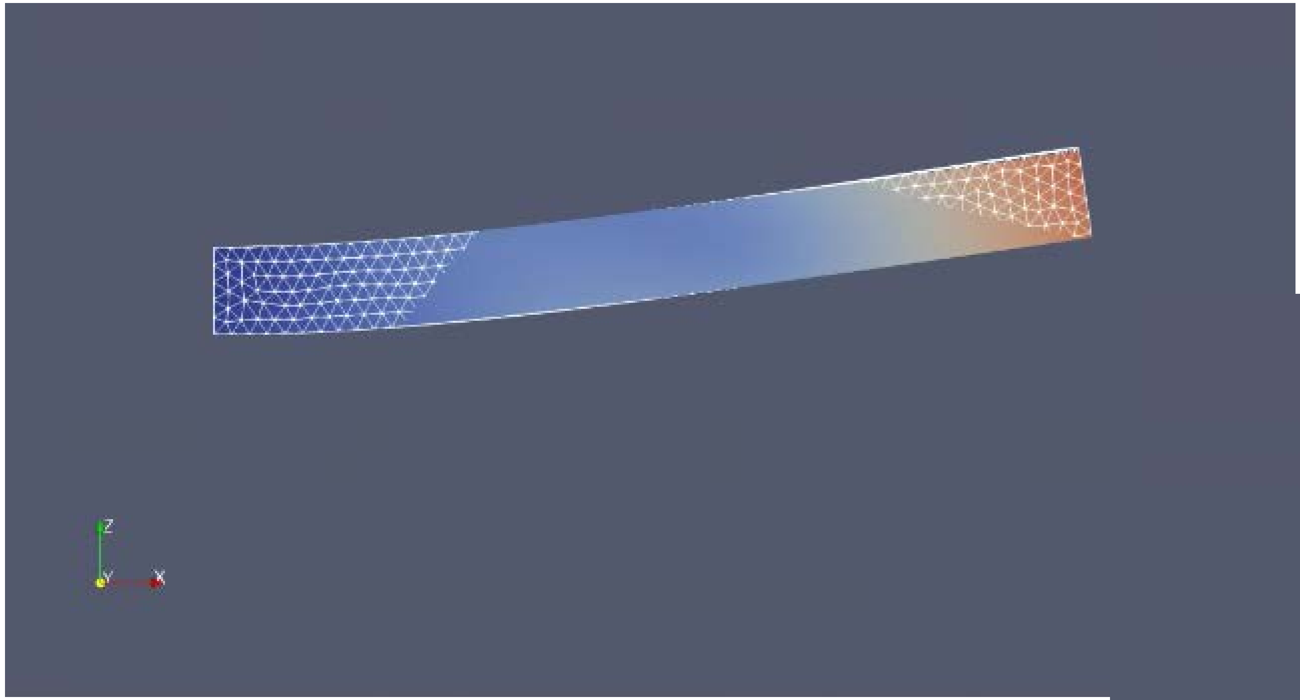
Результаты

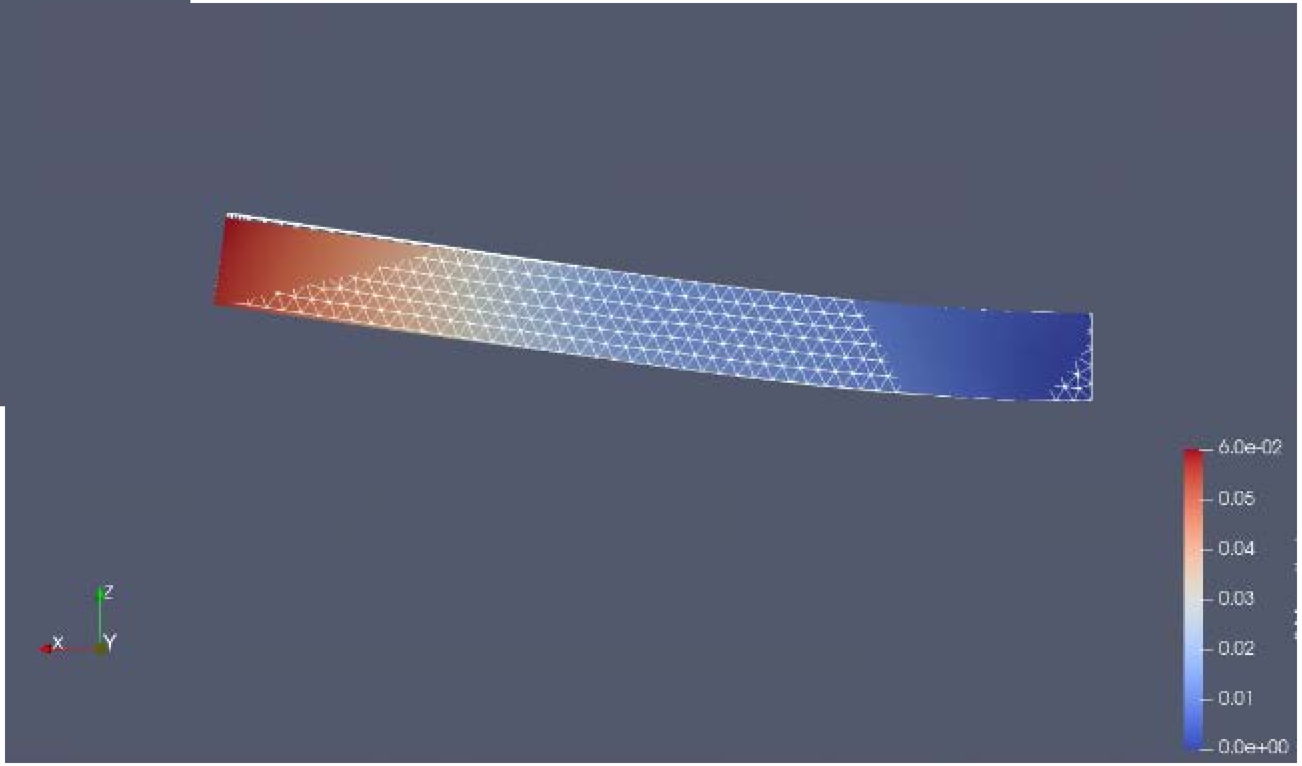
Медианный результат



Результаты

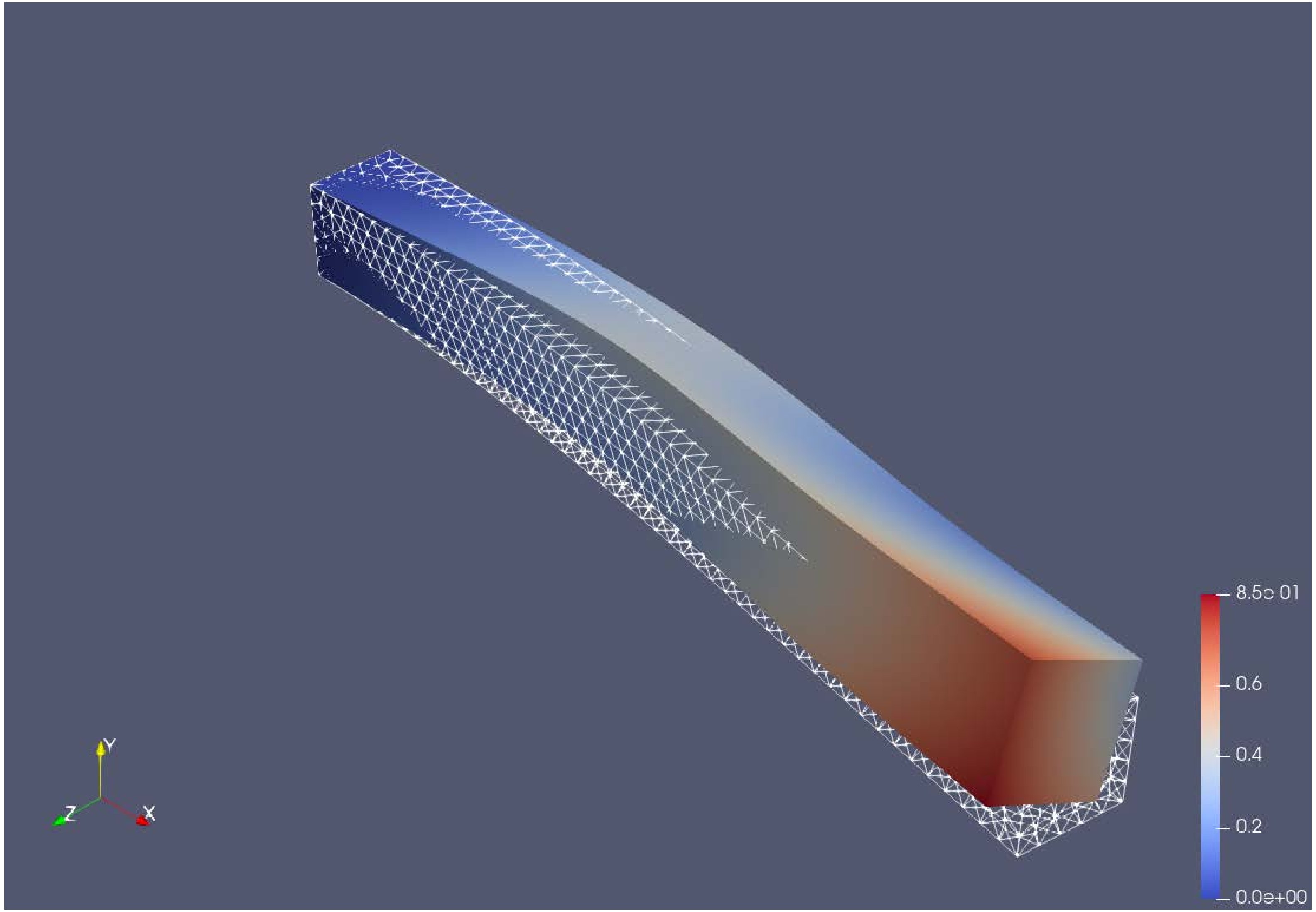
Медианный результат





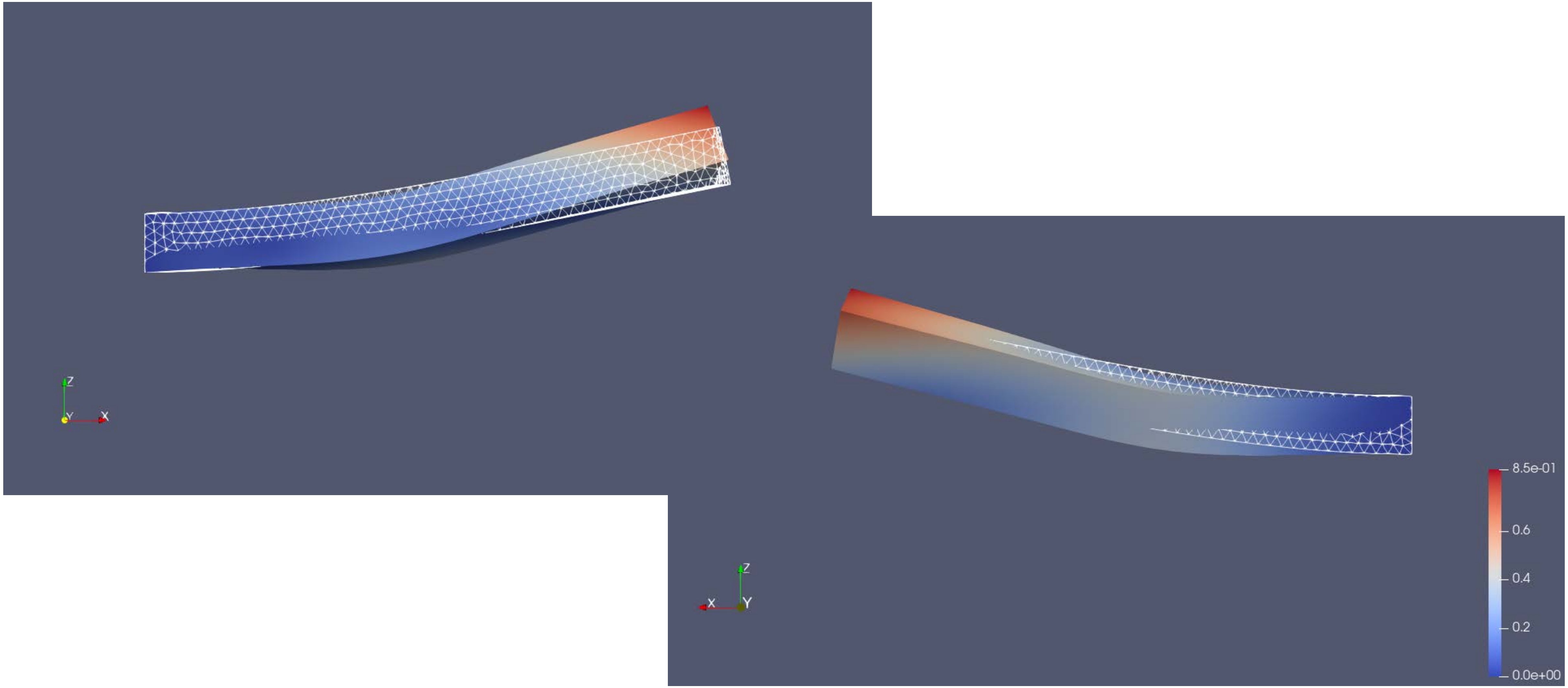
Результаты

Медиана из «худших» результатов



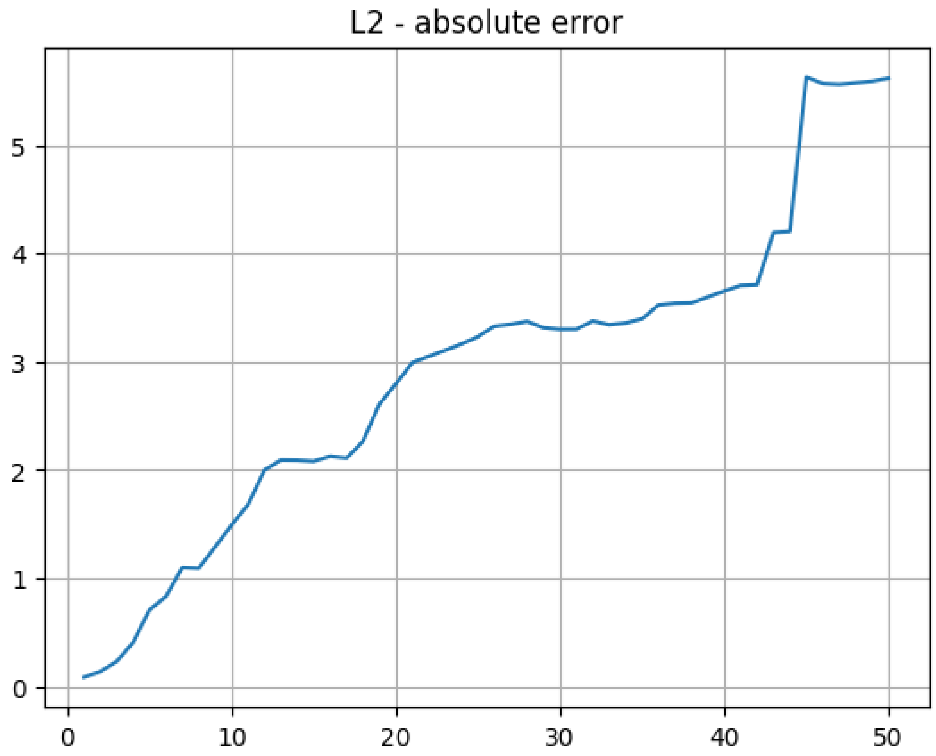
Результаты

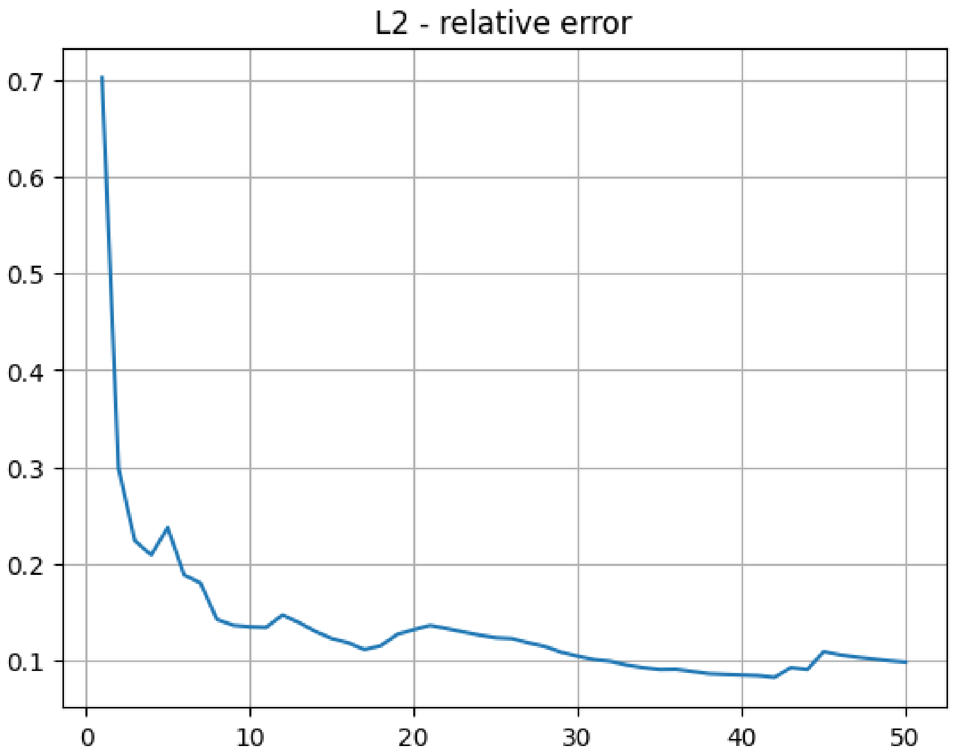
Медиана из «худших» результатов



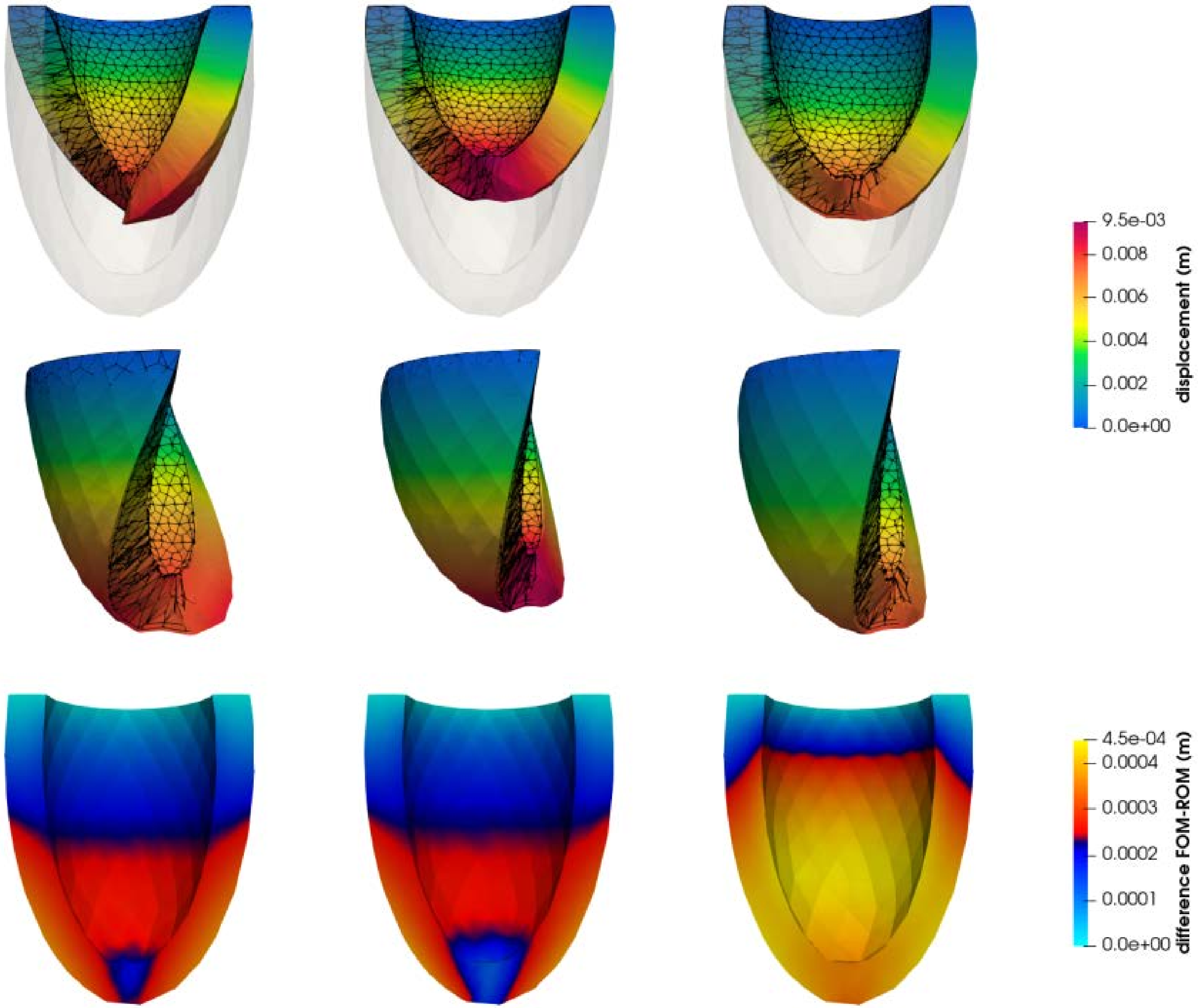
Эффективность

	FOM	HyROMnet
Время работы	81 секунда	0,06 секунды
Ускорение	×1	×1347
Средняя ошибка по L_2 норме		2,5
Средняя относительная ошибка по L_2 норме		5e-2





Что дальше?



9.5e-03
0.008
0.006
0.004
0.002
0.0e+00
displacement (m)
4.5e-04
0.0004
0.0003
0.0002
0.0001
0.0e+00
difference FOM-ROM (m)

Спасибо за внимание