

# Исследование модели многожидкостной пороупругости в приложении к моделированию гидроцефалии головного мозга

Валова Г.С., Черевко А.А.,

Богомякова О.Б., Тулупов А.А.,

Акулов А.Е., Петровский Д.В., Ромащенко А.В.

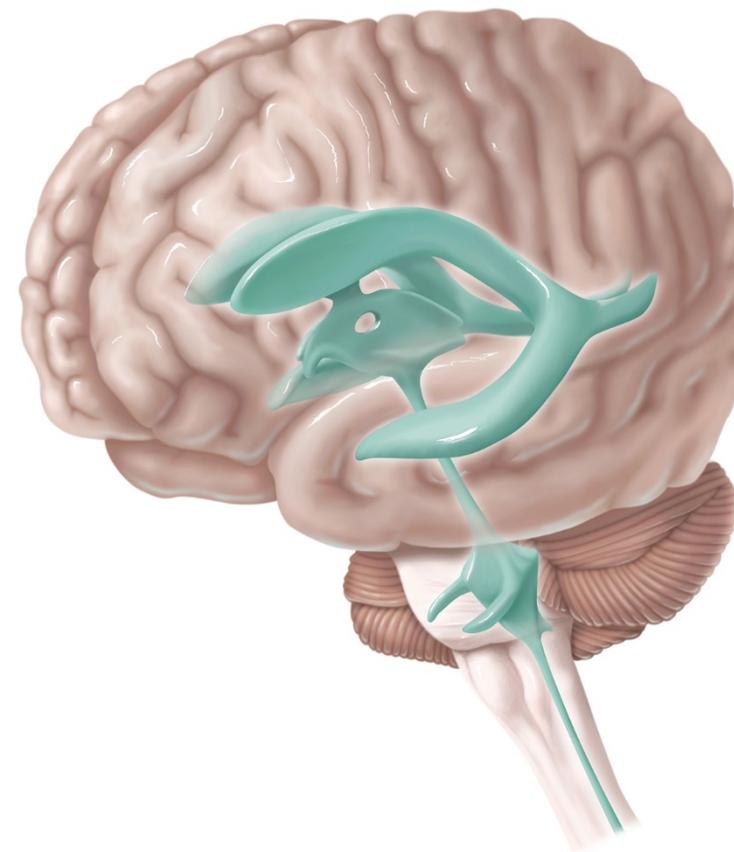
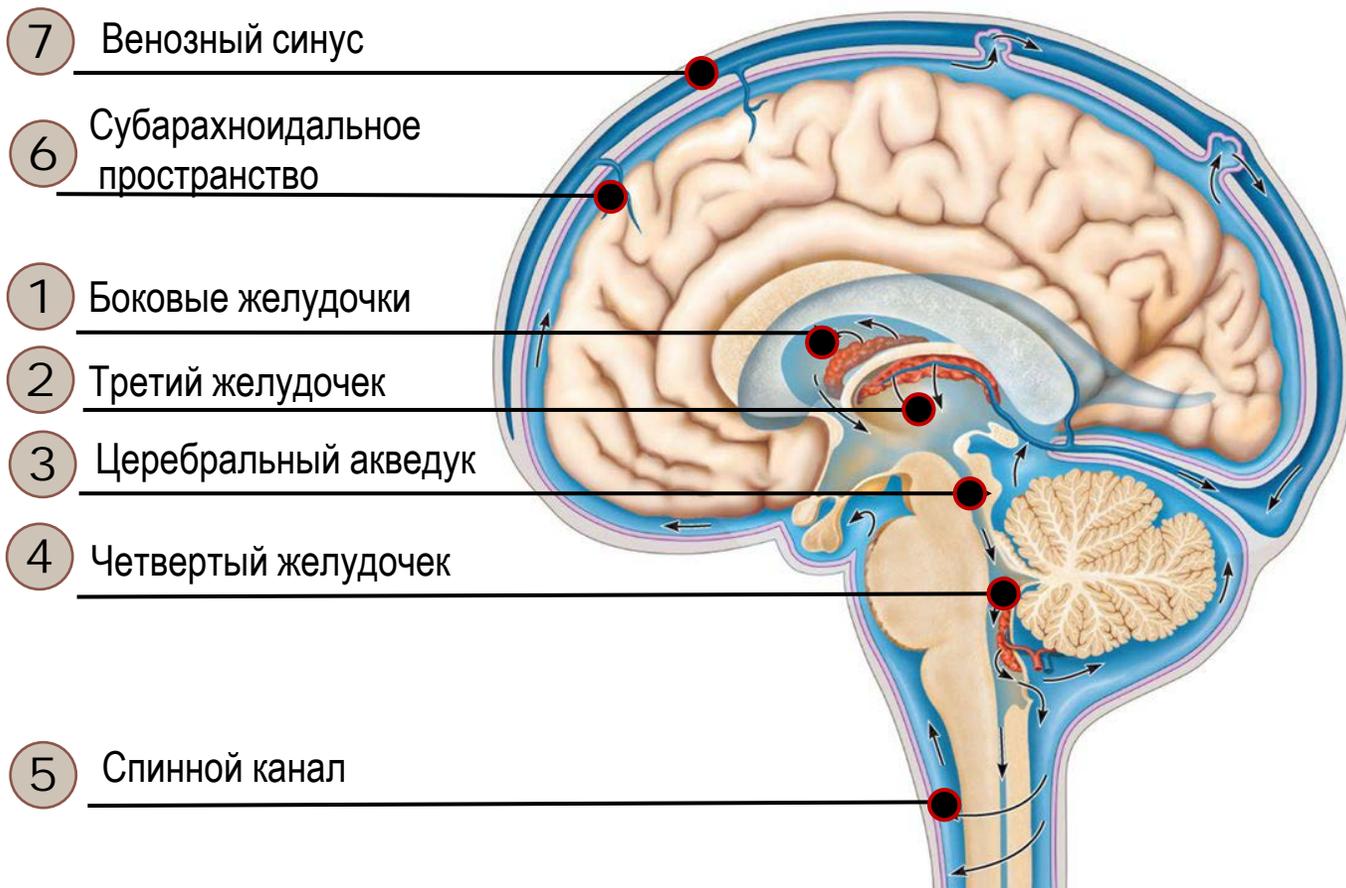
ИГиЛ СО РАН

МТЦ СО РАН

ИЦиГ СО РАН

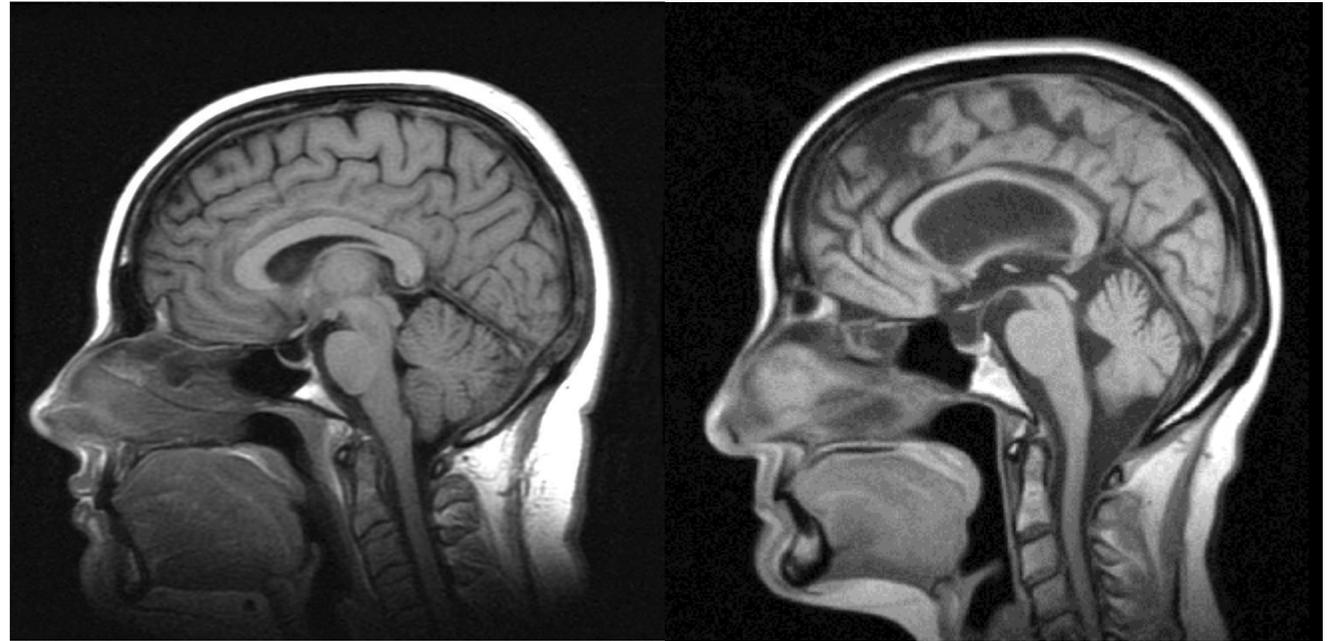
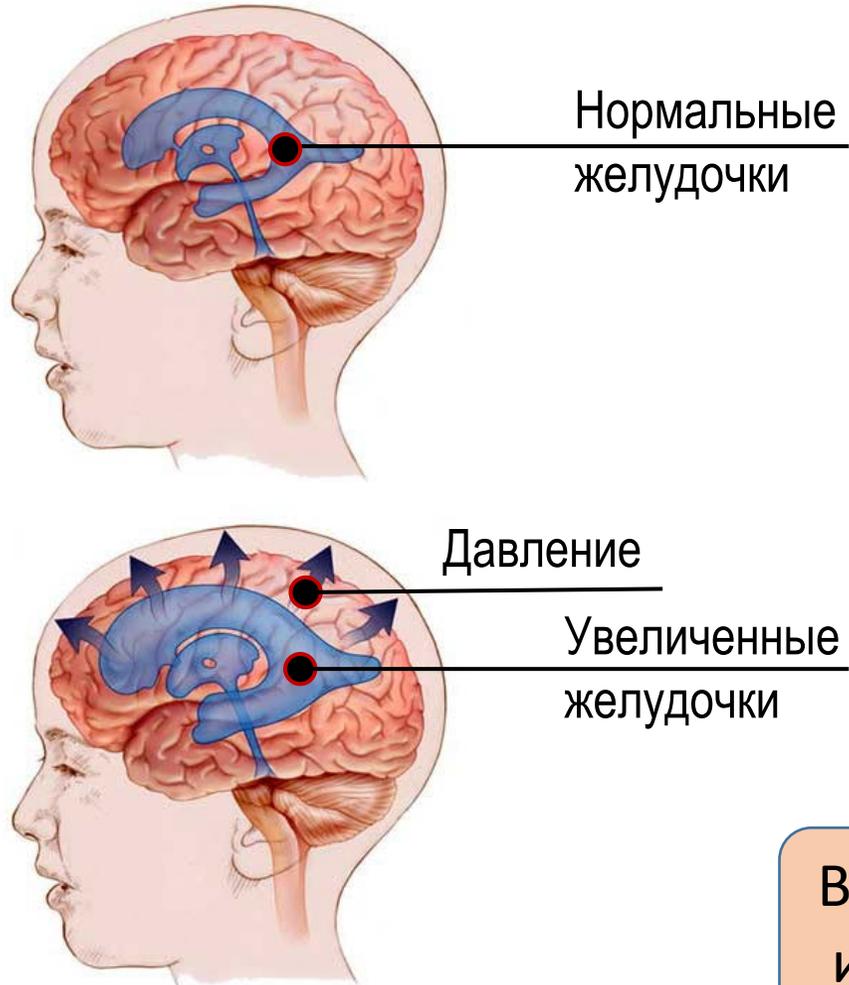
# Цереброспинальная жидкость

Ликвор (цереброспинальная жидкость, ЦСЖ) — прозрачная бесцветная жидкость, которая заполняет и окружает головной и спинной мозг. В головном мозге ликвор **образуется в веществе головного мозга фильтрацией из плазмы крови** и сливается в четыре желудочка, расположенных в центре черепа. За сутки у взрослого человека образуется примерно 500 мл ЦСЖ.



# Гидроцефалия

Важно поддерживать непрерывное равновесие между секрецией, циркуляцией и резорбцией ликвора. В случае дисбаланса жидкость накапливается в системе, вызывая состояние, называемое **гидроцефалией**.



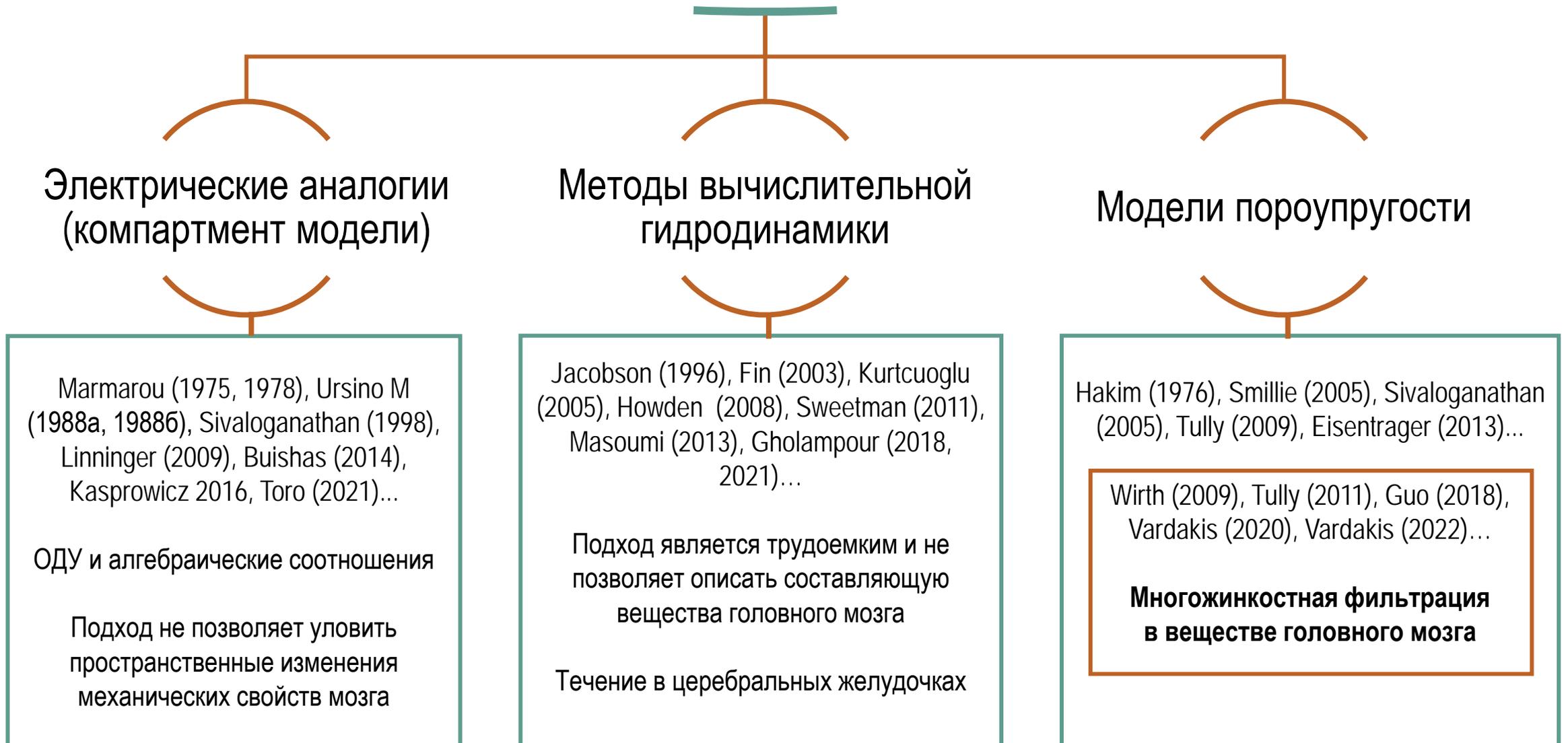
MPT данные здорового человека и пациента с гидроцефалией  
(from <https://radiopaedia.org>)

В некоторых случаях причина гидроцефалии неизвестна и прогноз течения не ясен

Рис.: Гидроцефалия

# Современное состояние вопроса

## Подходы к построению математических моделей:



# Система уравнений многожидкостной пороупругой фильтрации\*

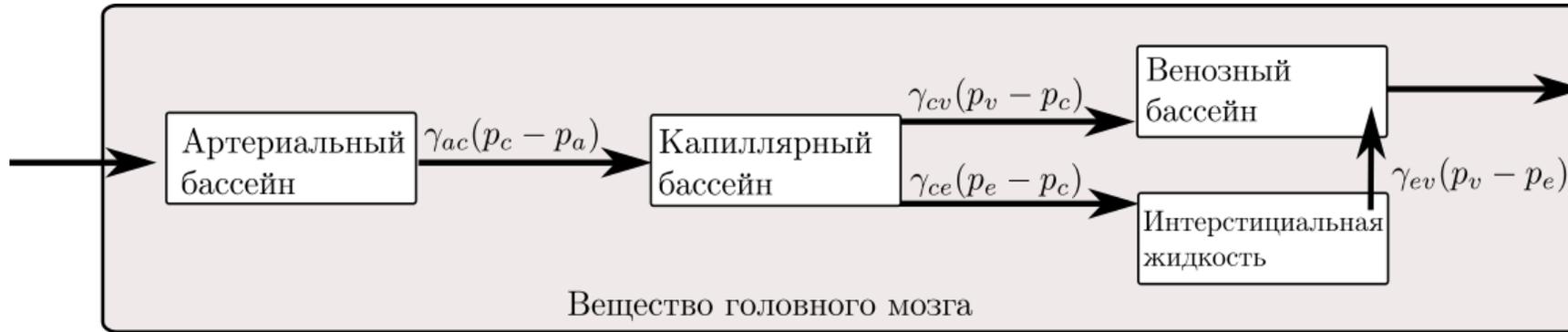


Схема транспорта внутримозговых жидкостей

4 поровых жидкости:  
 Артериальная кровь (а)  
 Капиллярная кровь (с)  
 Венозная кровь (v)  
 Ликвор (extravascular)

Уравнения фильтрации для поровых жидкостей:

$$-\frac{k_a}{\mu_a} \Delta p_a - \gamma_{ac} (p_c - p_a) = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{k_c}{\mu_c} \Delta p_c + \gamma_{ac} (p_c - p_a) - \gamma_{ce} (p_e - p_c) - \gamma_{cv} (p_v - p_c) = 0, \quad (2)$$

$$-\frac{k_e}{\mu_e} \Delta p_e + \gamma_{ce} (p_e - p_c) - \gamma_{ev} (p_v - p_e) = 0, \quad (3)$$

$$-\frac{k_v}{\mu_v} \Delta p_v + \gamma_{cv} (p_v - p_c) + \gamma_{ev} (p_v - p_e) = 0 \quad (4)$$

В каждой точке вещества головного мозга присутствуют все четыре жидкости.

$\mathbf{u}$	Смещение вещества головного мозга	$p_i$	Давление поровых жидкостей ( $i = a, c, e, v$ )
$\mu, \lambda$	Коэффициенты Ламе	$k_i$	Проницаемость ( $i = a, c, e, v$ )
$\alpha_i$	Коэффициенты Био	$\mu_i$	Динамическая вязкость, ( $i = a, c, e, v$ )
		$\gamma_{yx}$	Параметры взаимодействия между сетями $x$ и $y$

Уравнение равновесия:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) - (\alpha_a \nabla p_a + \alpha_c \nabla p_c + \alpha_e \nabla p_e + \alpha_v \nabla p_v) = 0 \quad (5)$$

\* Tully, Ventikos: Cerebral water transport using multiple-network poroelastic theory: application to normal pressure hydrocephalus // J. Fluid Mech. (2011), 667

# Граничные условия

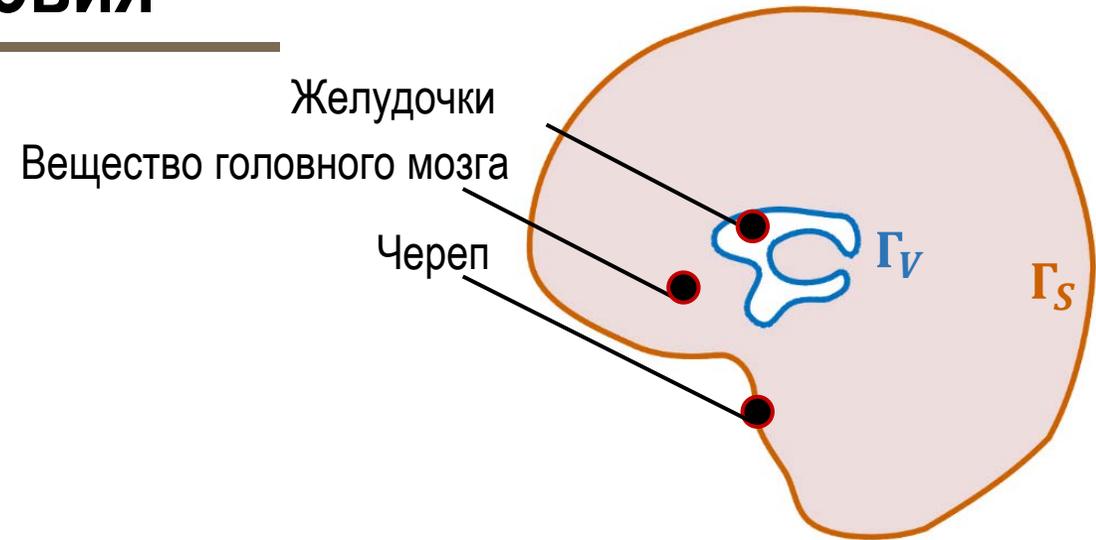
$$-\frac{k_a}{\mu_a} \Delta p_a - \gamma_{ac} (p_c - p_a) = 0,$$

$$-\frac{k_c}{\mu_c} \Delta p_c + \gamma_{ac} (p_c - p_a) - \gamma_{ce} (p_e - p_c) - \gamma_{cv} (p_v - p_c) = 0,$$

$$-\frac{k_e}{\mu_e} \Delta p_e + \gamma_{ce} (p_e - p_c) - \gamma_{ev} (p_v - p_e) = 0,$$

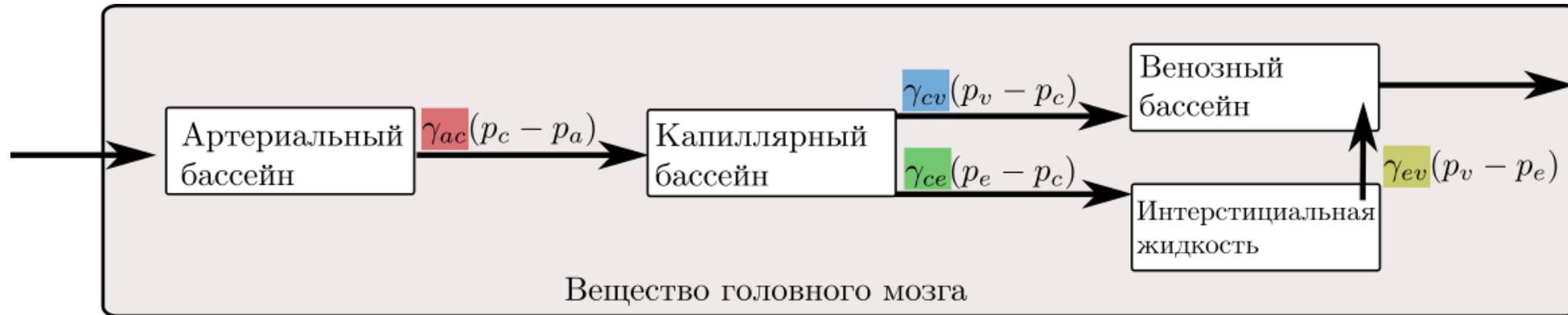
$$-\frac{k_v}{\mu_v} \Delta p_v + \gamma_{cv} (p_v - p_c) + \gamma_{ev} (p_v - p_e) = 0,$$

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) - (\alpha_a \nabla p_a + \alpha_c \nabla p_c + \alpha_e \nabla p_e + \alpha_v \nabla p_v) = 0$$



$p_a = p_{arterial}, p_v = p_{venous}$	Кровяное давление соответствует клиническим значениям
$\nabla p_c \mathbf{n} = 0$	Отсутствие капиллярного потока
$p_e = p_{venous} + \mu_e R Q_0$	Всасывание ЦСЖ в венозную сеть
$\mathbf{u} = 0$	Смещения черепа равны 0
$\nabla p_a \mathbf{n} = \nabla p_v \mathbf{n} = 0$	Отсутствие потока для артериальной и венозной сетей
$-k_{c \rightarrow ventricle} \nabla p_c \mathbf{n} = -Q_p$	Производство ЦСЖ из капиллярной крови
$Q_p = \frac{\pi d^4}{128 \mu_e L} (p_e _{\Gamma_V} - p_e _{\Gamma_S}) - \oint_{Ventricle} \left( -\frac{k_e}{\mu_e} \nabla p_e \right) \cdot \mathbf{n} dS$	Баланс массы жидкости в желудочках
$2 \mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} + \lambda \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{n} = \sum_{i=a,c,e,v} (\alpha_i - 1) p_i \mathbf{n}$	Непрерывность напряжения на границе желудочков

# Параметры модели



**Цель:** Исследовать зависимость решения на внутренней границе области, представляющей границу желудочков головного мозга, от параметров взаимодействия поровых жидкостей.

$\gamma_{yx}$  — параметры, задающие взаимодействия и перетоки поровых жидкостей между бассейнами (параметры взаимодействия) :

- $\gamma_{ac}$  — артериальный и капиллярный бассейны
- $\gamma_{cv}$  — капиллярный и венозный бассейны
- $\gamma_{ce}$  — капиллярный и ликворный бассейны
- $\gamma_{ev}$  — ликворный и венозный бассейны

$$10^{-4} \frac{D}{N_s} - 10^4 \frac{D}{N_s} -$$

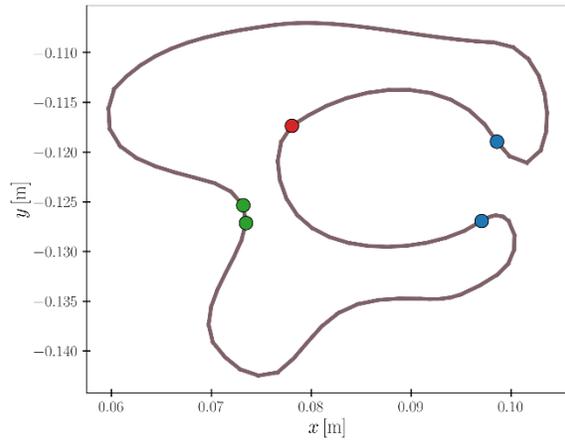
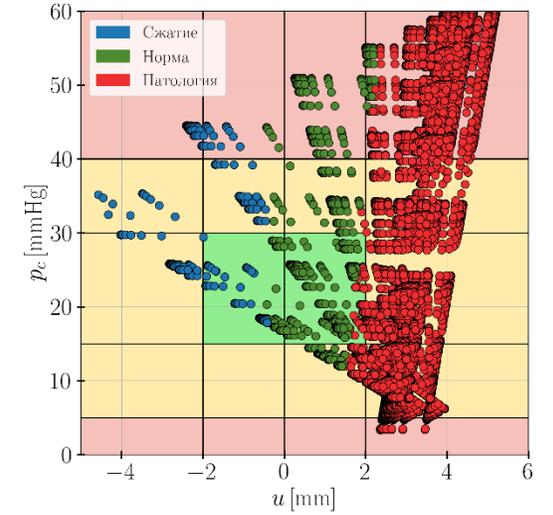
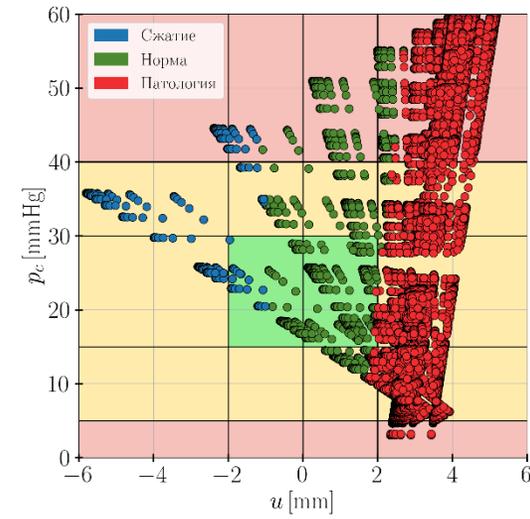
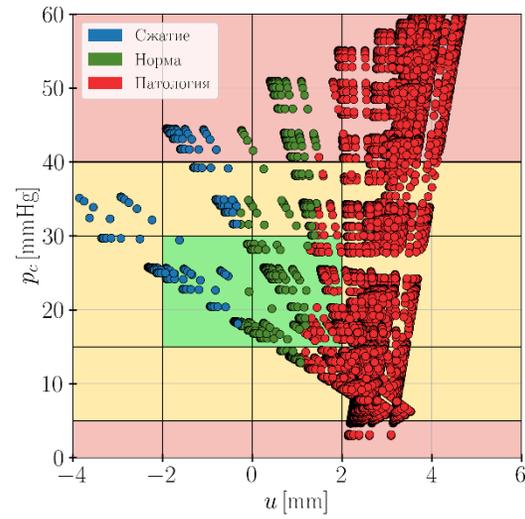
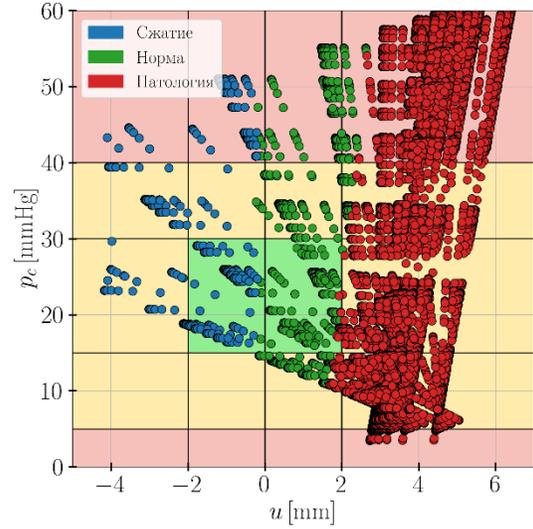
диапазон изменения параметров

$\gamma_{ac}, \gamma_{cv}, \gamma_{ce}, \gamma_{ev}$ ,  
который охватывает физиологически  
допустимые значения  $u, p_a, p_c, p_v, p_e$

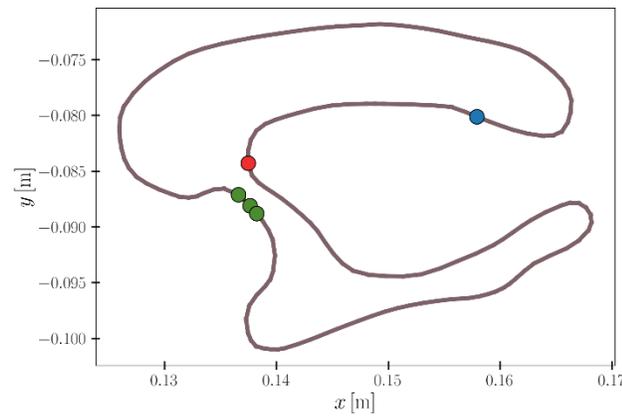
Каждый из параметров  $\gamma_{ac}, \gamma_{cv}, \gamma_{ce}, \gamma_{ev}$  независимо принимал значения из пятнадцатиеlementного набора, семплирование диапазона было выполнено в логарифмическом масштабе.

Таким образом, было рассчитано  $15^4$  различных вариантов.

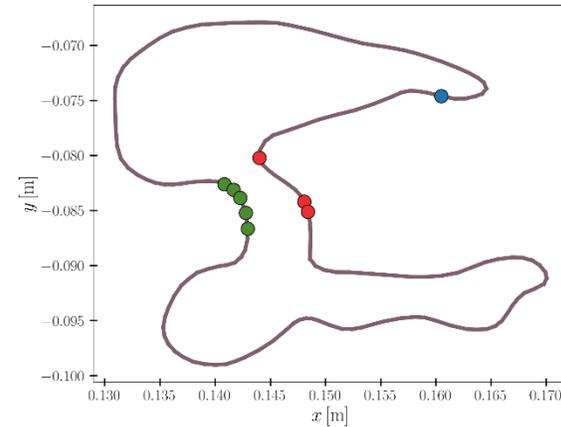
# Капиллярное давление и средние смещения на границе желудочка



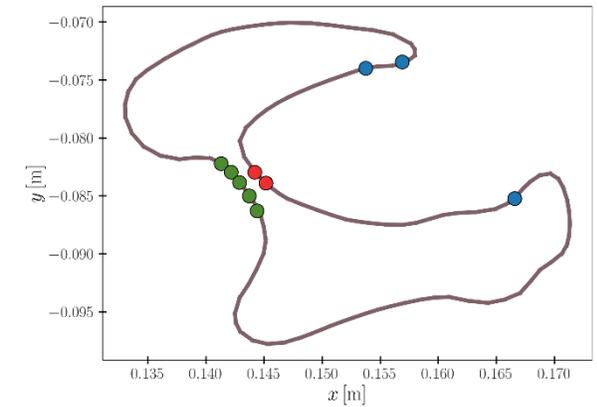
Доброволец 1



Доброволец 2



Доброволец 3



Доброволец 4

# Регрессия $\bar{u}$ на $\gamma_{ce}, \gamma_{cv}, \gamma_{ac}, \gamma_{ev}$ : выбор модели

Система уравнений в частных производных

Приближенная аналитическая формула для  $\bar{u}(\gamma_{ce}, \gamma_{cv}, \gamma_{ac}, \gamma_{ev})$

$$\psi_{**} = \ln \left( \frac{\gamma_{**} - \min \gamma_{**}}{\max \gamma_{**} - \min \gamma_{**}} + b \right)$$

$b$  — параметр оптимизации выбирался для каждой модели исходя из  $R_{adj}^2 \rightarrow \max$

Фильтрация  $\psi_{**}$  по  $\gamma_{**}$ :  
 $\gamma_{ce}, \gamma_{cv}, \gamma_{ac}, \gamma_{ev}$  Т. Ч.  
 $p_c \in [5 \text{ мм рт. ст.}, 40 \text{ мм рт. ст.}]$

$$\bar{u} = \Psi \beta + \epsilon$$

$\bar{u}$  — вектор значений  $\bar{u}$ ,  
 $\Psi = \{n \times k\}$  — матрица  $\psi_{xy}$ ,  
 $\beta$  — коэффициенты регрессии,  
 $\epsilon$  — вектор случайных ошибок,  
 $n$  — количество наблюдений,  
 $k$  — количество предикторов.

Возможные предикторы:

$\psi_{ac}, \psi_{ce}, \psi_{ev}, \psi_{cv}, \psi_{ac} \cdot \psi_{ce}, \psi_{ac} \cdot \psi_{ev}, \psi_{ac} \cdot \psi_{cv}, \psi_{ce} \cdot \psi_{cv}, \psi_{ce} \cdot \psi_{ev}, \psi_{ev} \cdot \psi_{cv}$

Для каждого пациента рассматривается 1023 модели регрессии

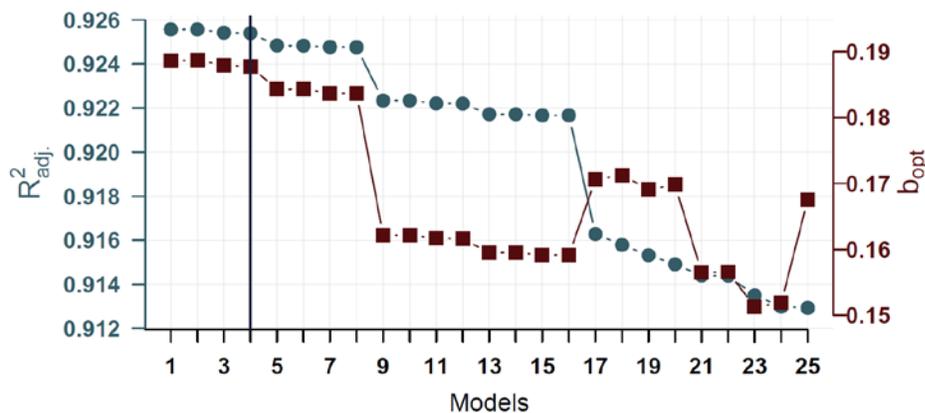


Рис.: Величины  $b_{opt}$  и  $R_{adj}^2$  для первых 25 из 1023 моделей

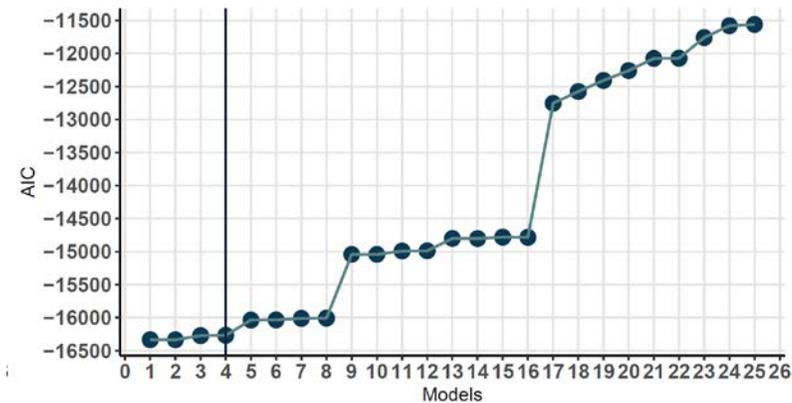
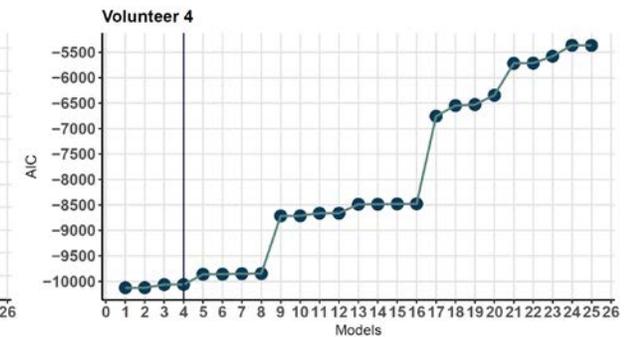
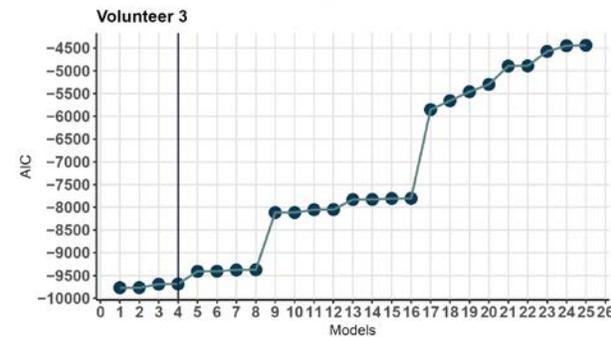
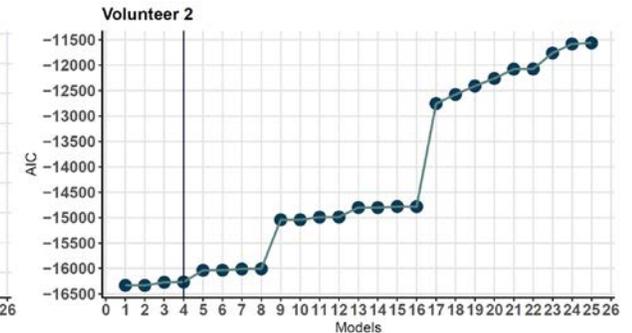
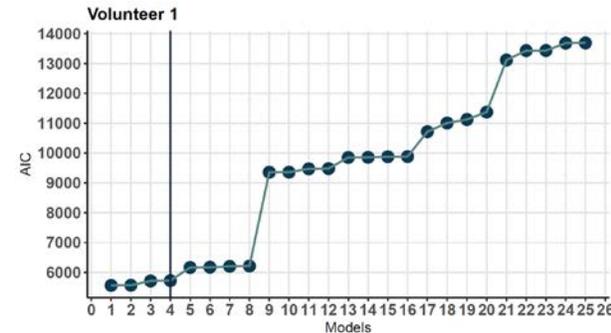
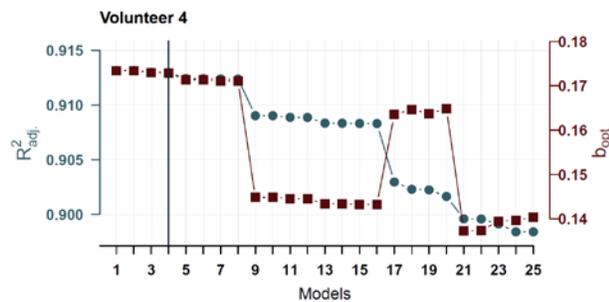
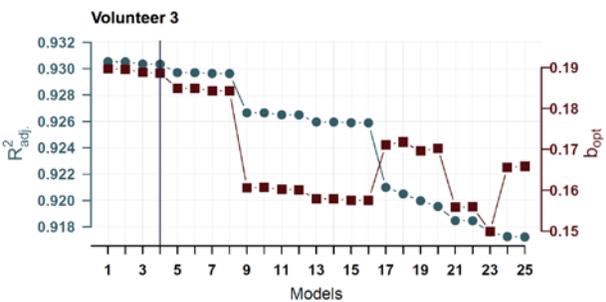
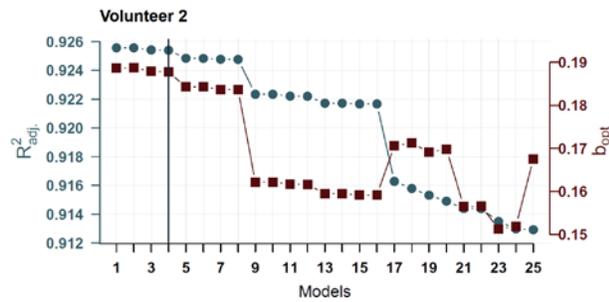
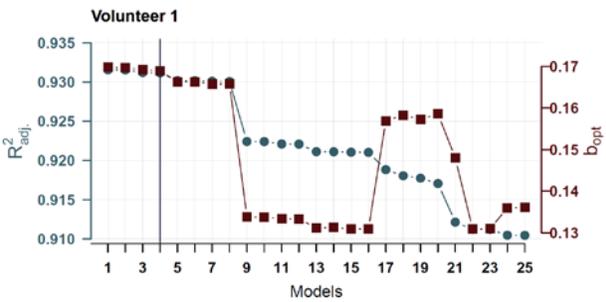


Рис.: Значения критерия Акаике для первых 25 из 1023 моделей

# Регрессия $\bar{u}$ на $\gamma_{ce}, \gamma_{cv}, \gamma_{ac}, \gamma_{ev}$ : выбор модели



Величины  $b_{opt}$  и  $R^2_{adj}$  для первых 25 из 1023 моделей

Значения критерия Акаике для первых 25 из 1023 моделей

Для каждого пациента рассматривается 1023 модели.  
Для всех пациентов «наилучшей» оказалась одна и та же модель

# Регрессия $u$ на $\gamma_{ce}, \gamma_{cv}, \gamma_{ac}, \gamma_{ev}$

Выбранная модель регрессии (модель одна и та же для всех добровольцев):

$$\bar{u} = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_{ac} \cdot \psi_{ac} + \widehat{\beta}_{ce} \cdot \psi_{ce} + \widehat{\beta}_{ev} \cdot \psi_{ev} + \widehat{\beta}_{cv} \cdot \psi_{cv} + \\ \widehat{\beta}_{ac\ ce} \cdot \psi_{ac} \cdot \psi_{ce} + \widehat{\beta}_{ac\ ev} \cdot \psi_{ac} \cdot \psi_{ev} + \widehat{\beta}_{ac\ cv} \cdot \psi_{ac} \cdot \psi_{cv} + \widehat{\beta}_{ce\ cv} \cdot \psi_{ce} \cdot \psi_{cv} \\ \psi_{ce} \cdot \psi_{ev}, \quad \psi_{ev} \cdot \psi_{cv}$$

Для всех добровольцев:

- коэффициент детерминации  $R^2 > 0.9$  (модель объясняет более 90% дисперсии данных)
- все коэффициенты модели являются статистически значимыми:  $p < 0.001$
- не включенные в модель регрессоры в полной модели имеют коэффициенты  $\sim 0.01$

Регрессионная модель для Добровольца 2 (по 30259 наборам параметров):

$$\bar{u} = -2.246 - 4.591 \cdot \psi_{ac} - 5.071 \cdot \psi_{ce} + 1.203 \cdot \psi_{ev} + 1.693 \cdot \psi_{cv} \\ - 3.591 \cdot \psi_{ac} \cdot \psi_{ce} + 0.230 \cdot \psi_{ac} \cdot \psi_{ev} + 0.643 \cdot \psi_{ac} \cdot \psi_{cv} + 0.548 \cdot \psi_{ce} \cdot \psi_{cv}$$

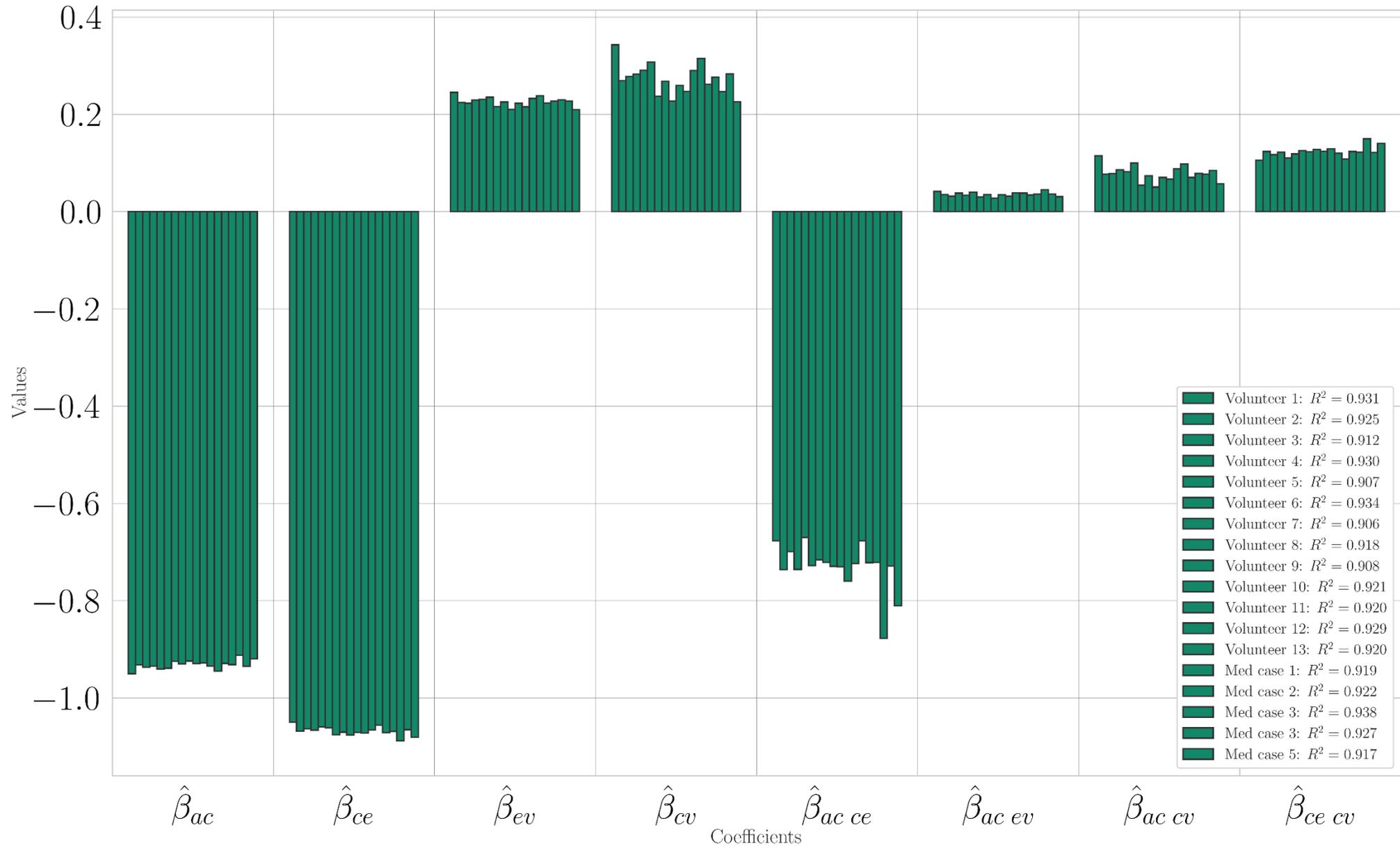
Система дифференциальных уравнений в частных производных

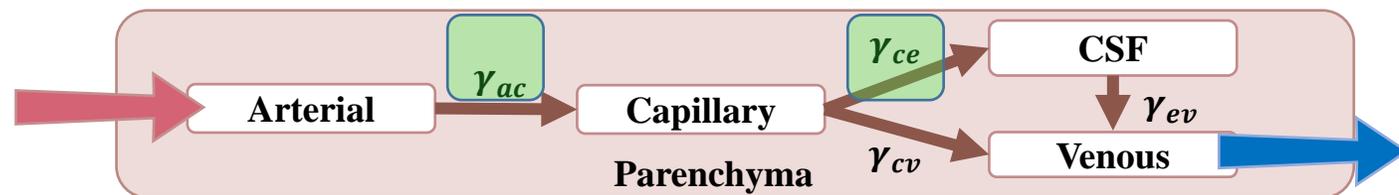
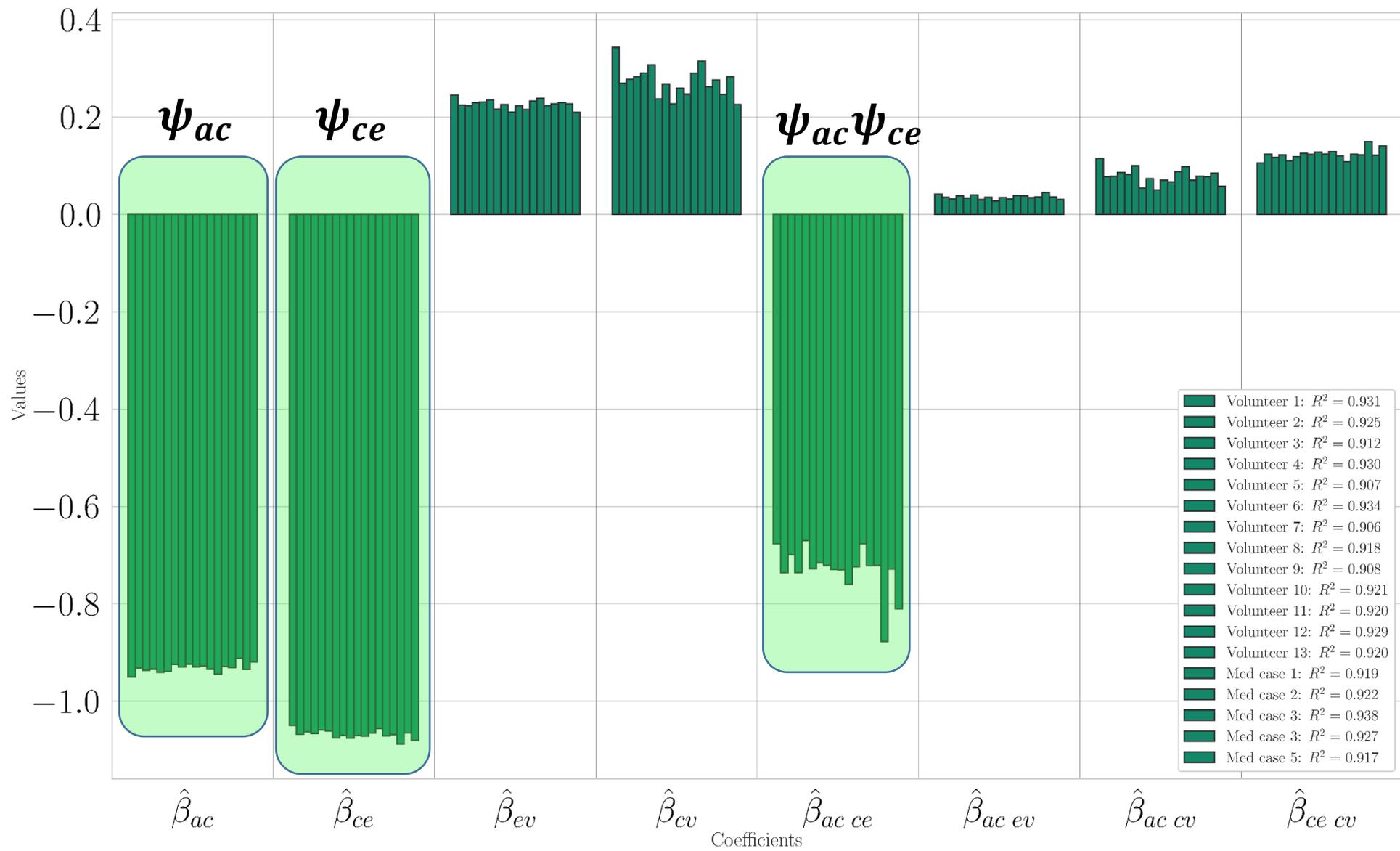


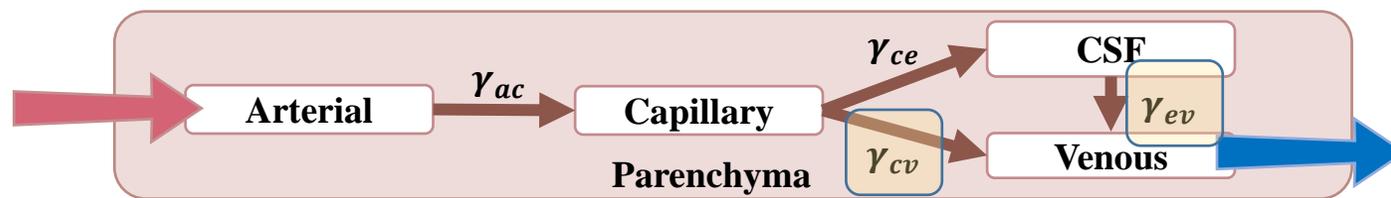
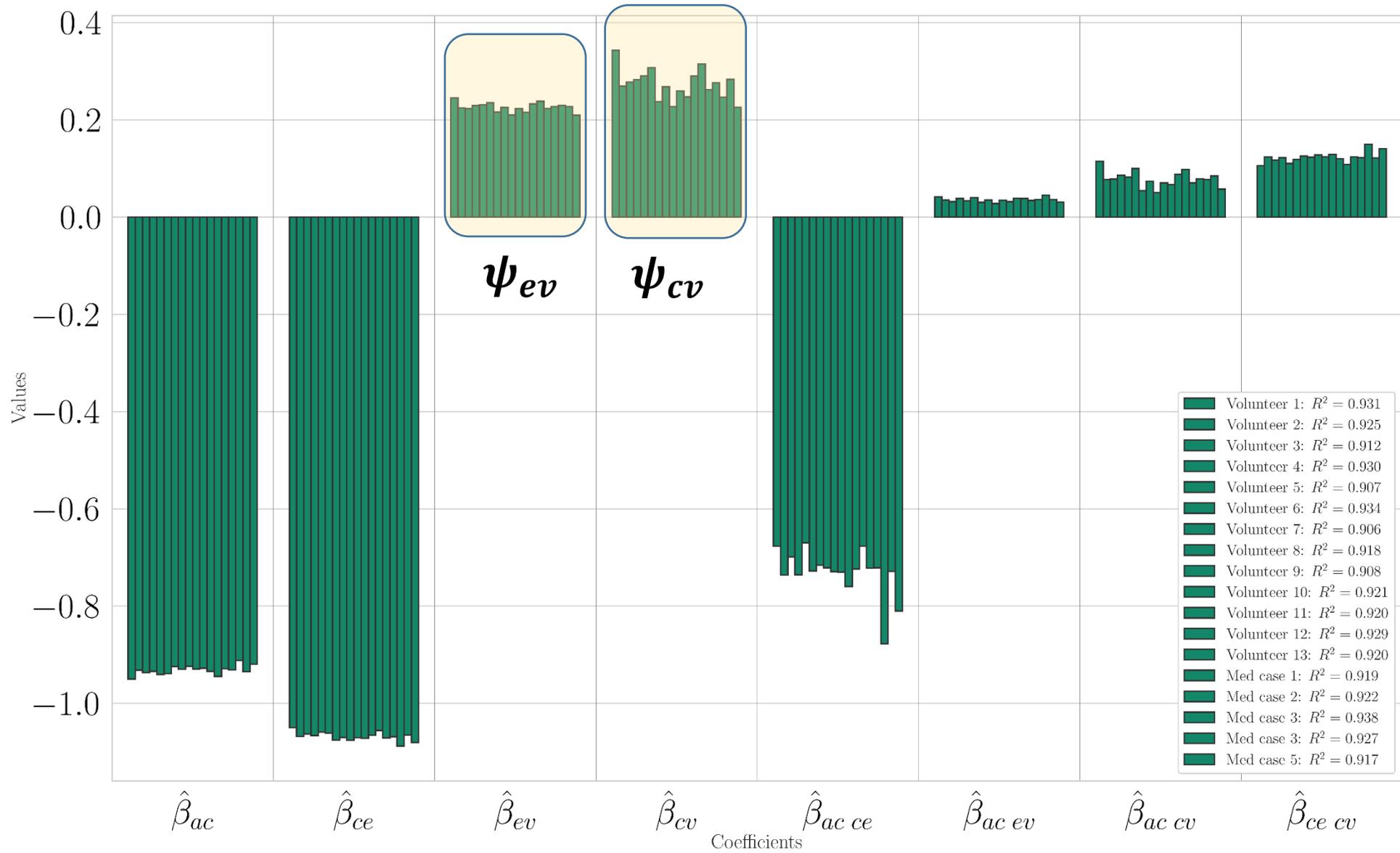
Аналитическая формула для  $\bar{u}$

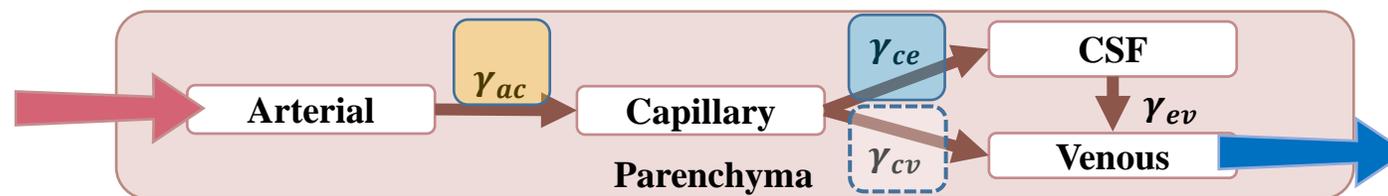
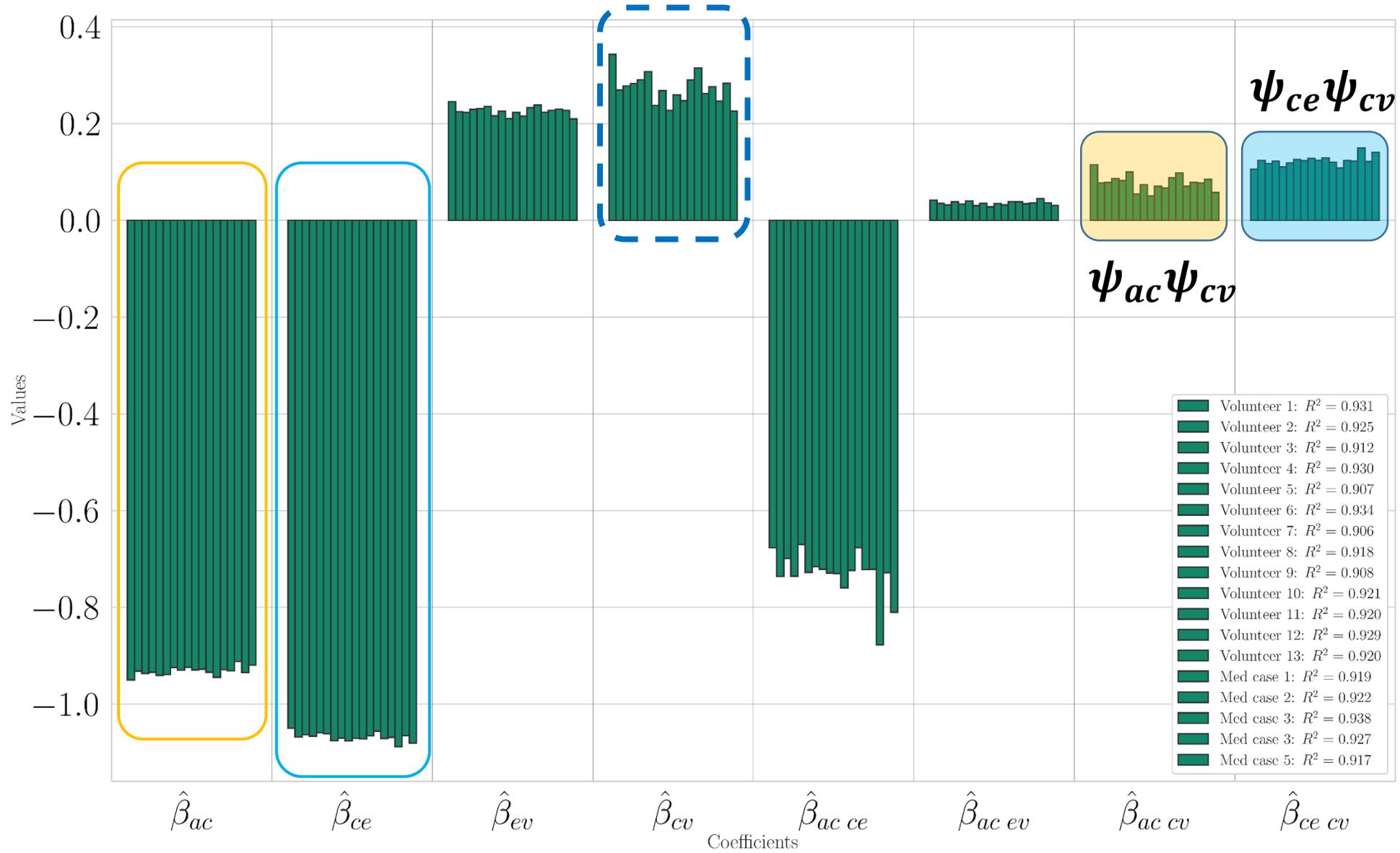


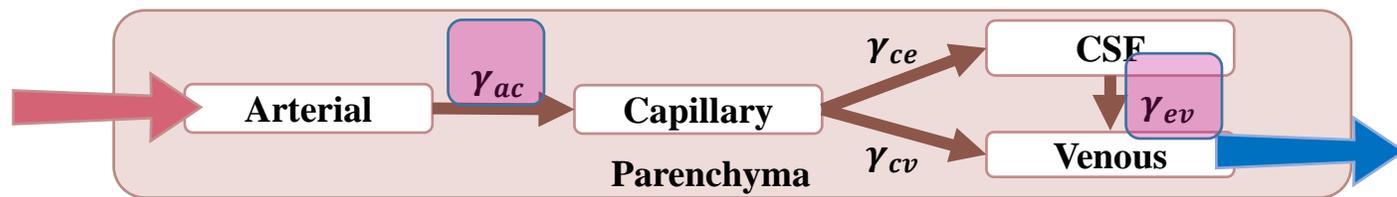
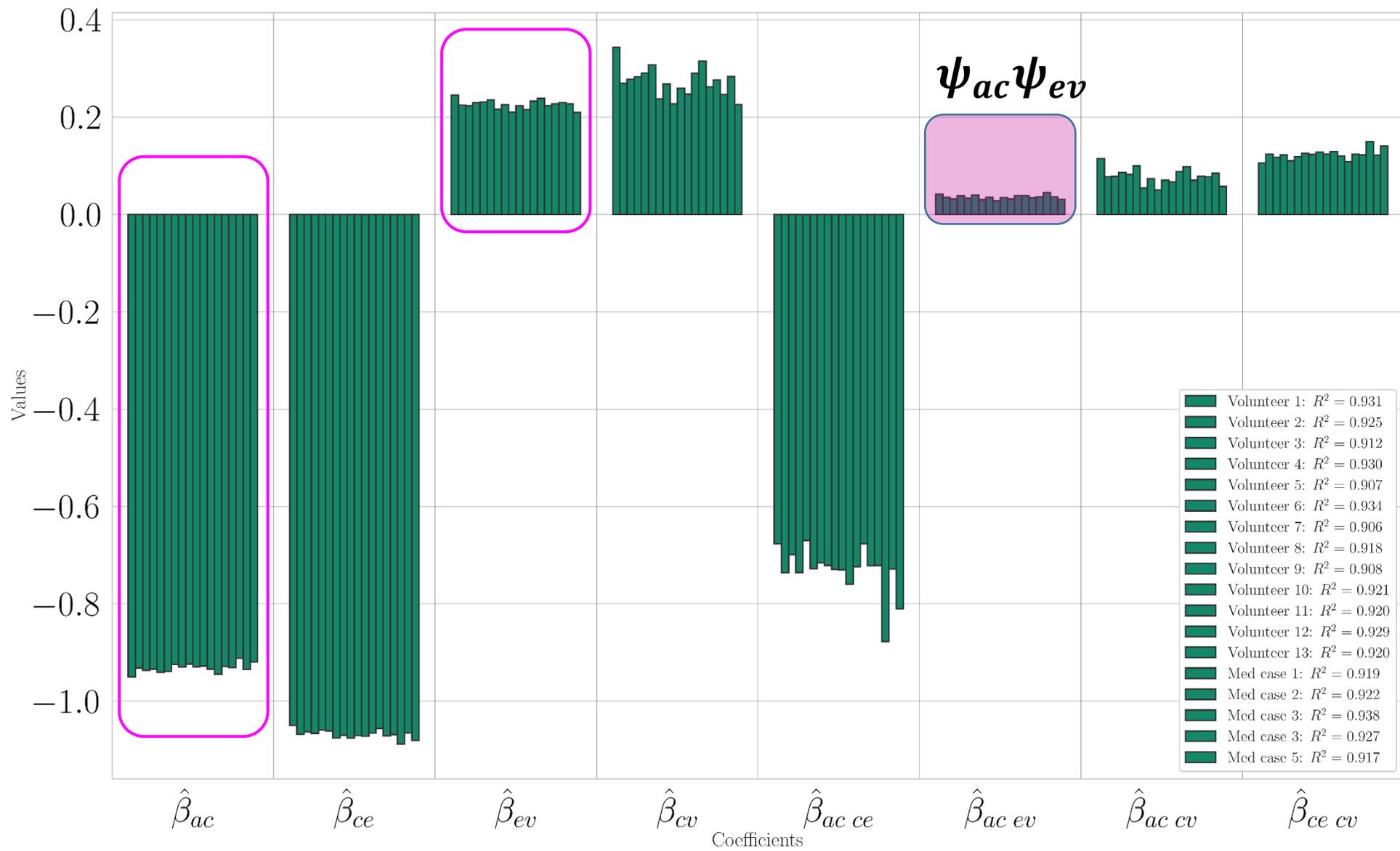
# Нормированные коэффициенты регрессии











# Поведение смещения и капиллярного давления на границе желудочка

$\gamma_{ac}$

При заданных  $\gamma_{ce}$  и  $\gamma_{ev}$   
движение вдоль прямой

$\gamma_{cv}$

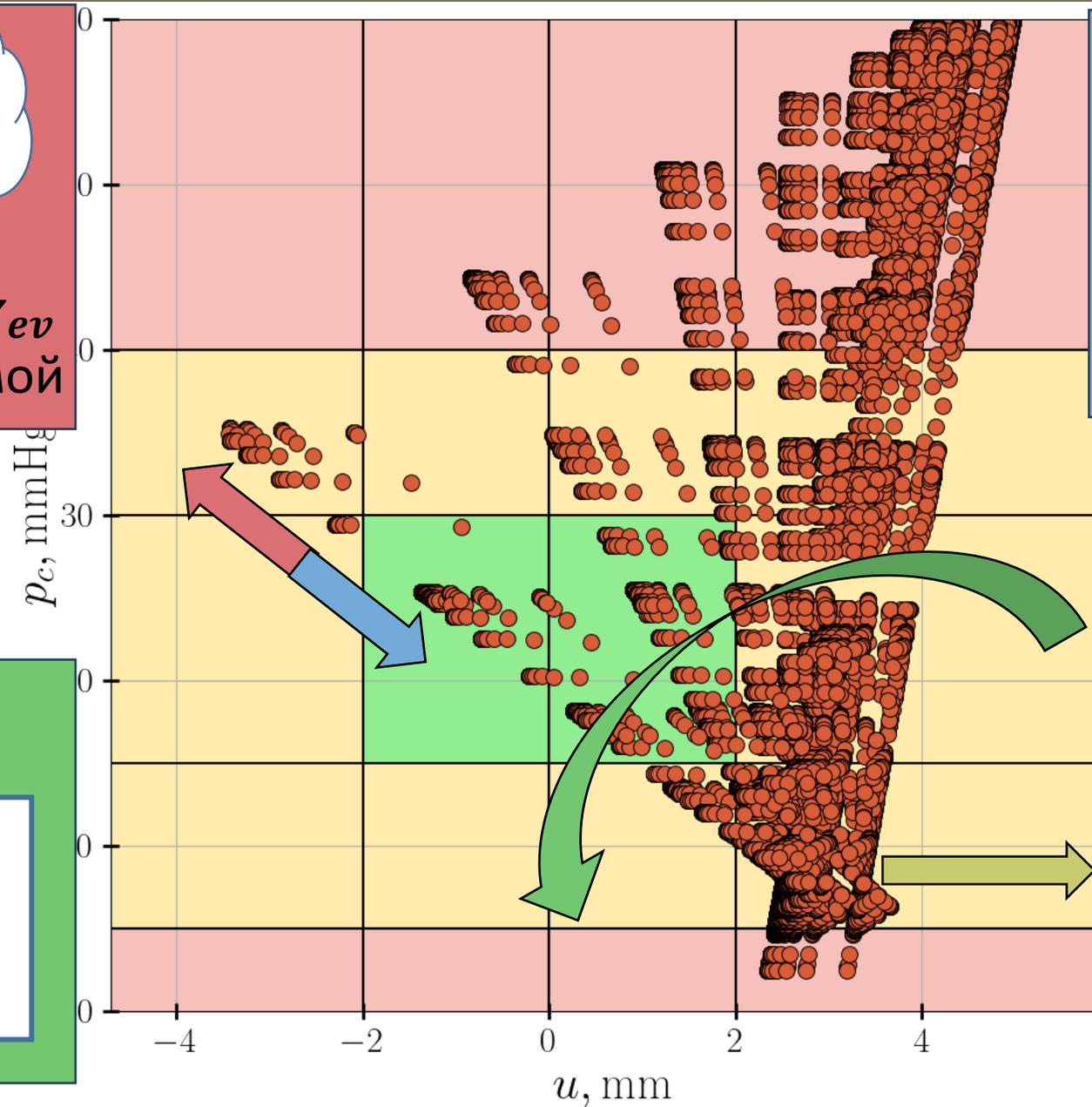
При заданных  $\gamma_{ce}$  и  $\gamma_{ev}$   
движение вдоль прямой

Вращение прямой  
образующей «веер»

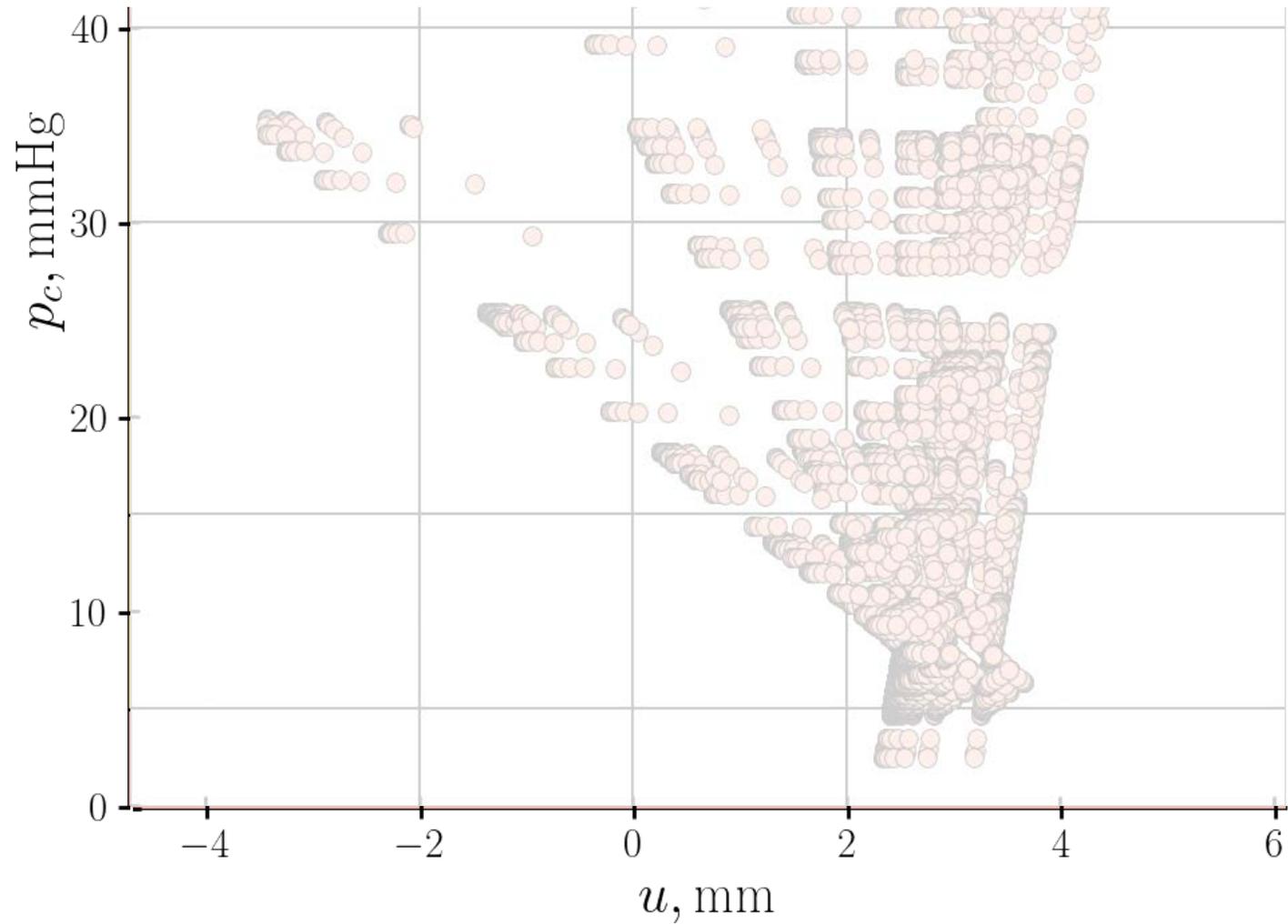
$\gamma_{ce}$

Смещение «веера»  
целиком вдоль отрезка

$\gamma_{ev}$

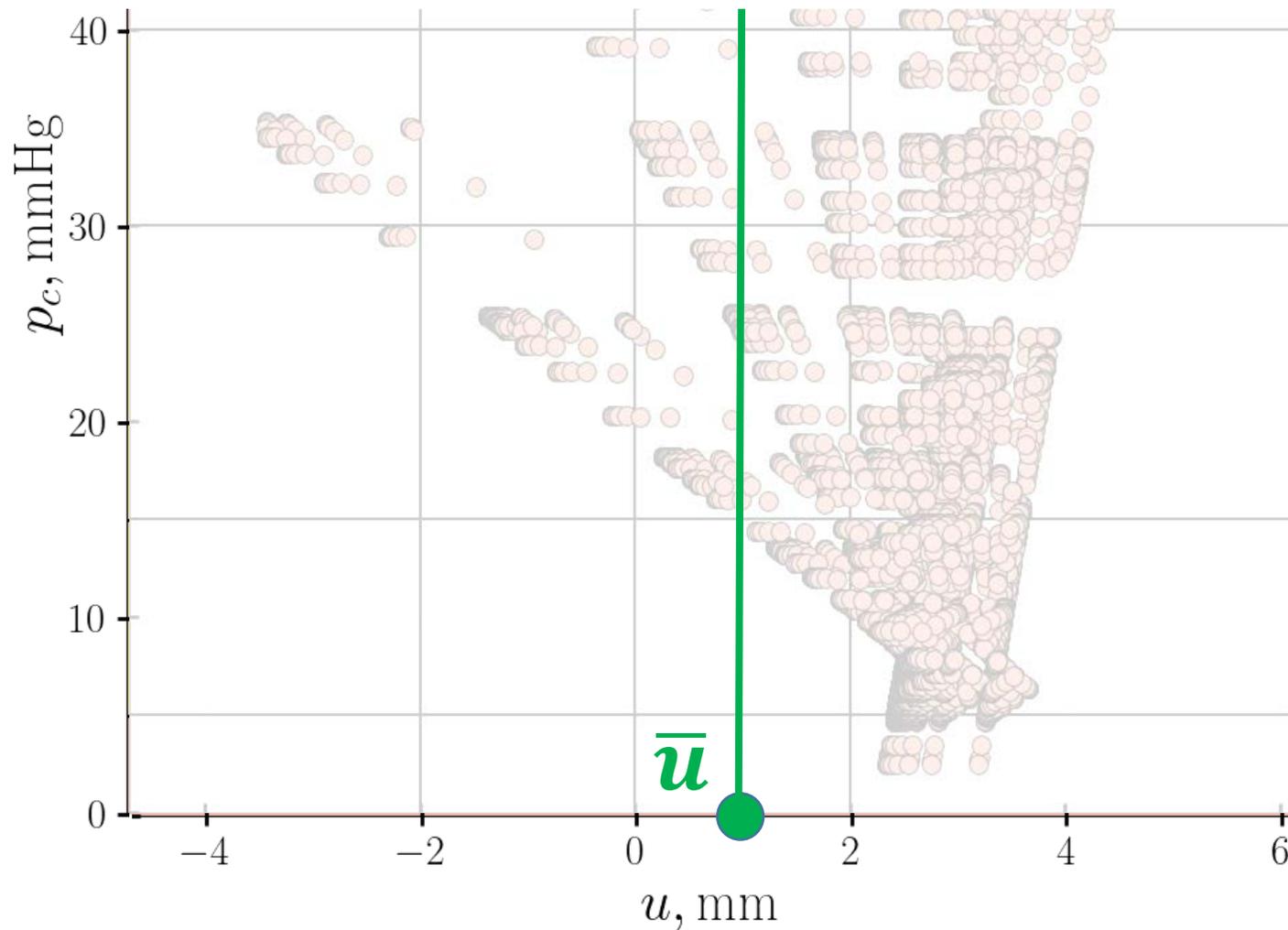


# Капиллярное давление на границе желудочка



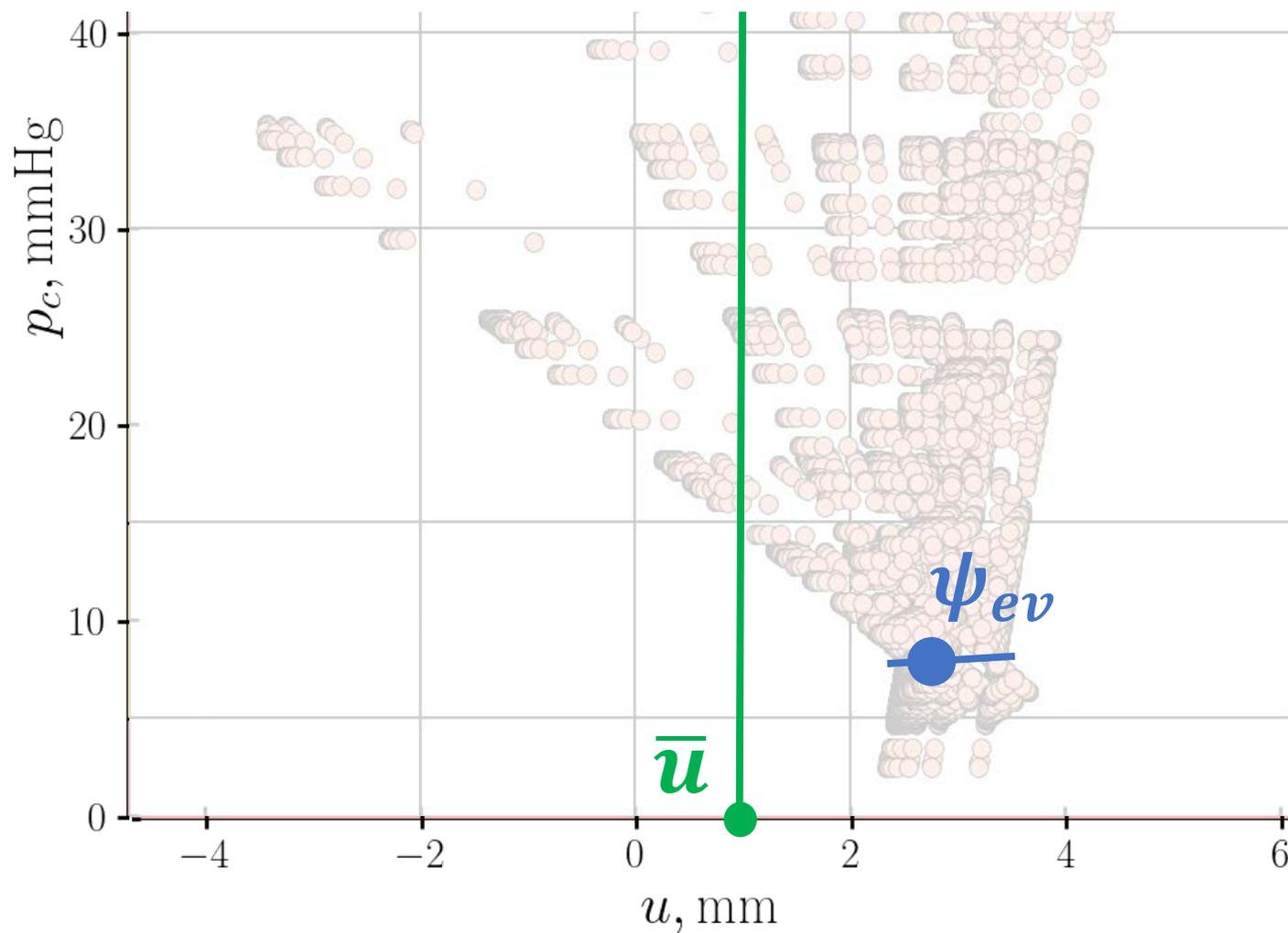
# Капиллярное давление на границе желудочка

$$(\gamma_{ce}, \gamma_{cv}, \gamma_{ac}, \gamma_{ev}) \longrightarrow \psi_{**} = \ln \left( \frac{\gamma_{**} - \min \gamma_{**}}{\max \gamma_{**} - \min \gamma_{**}} + b \right) \longrightarrow \bar{u}(\psi_{ce}, \psi_{cv}, \psi_{ac}, \psi_{ev})$$



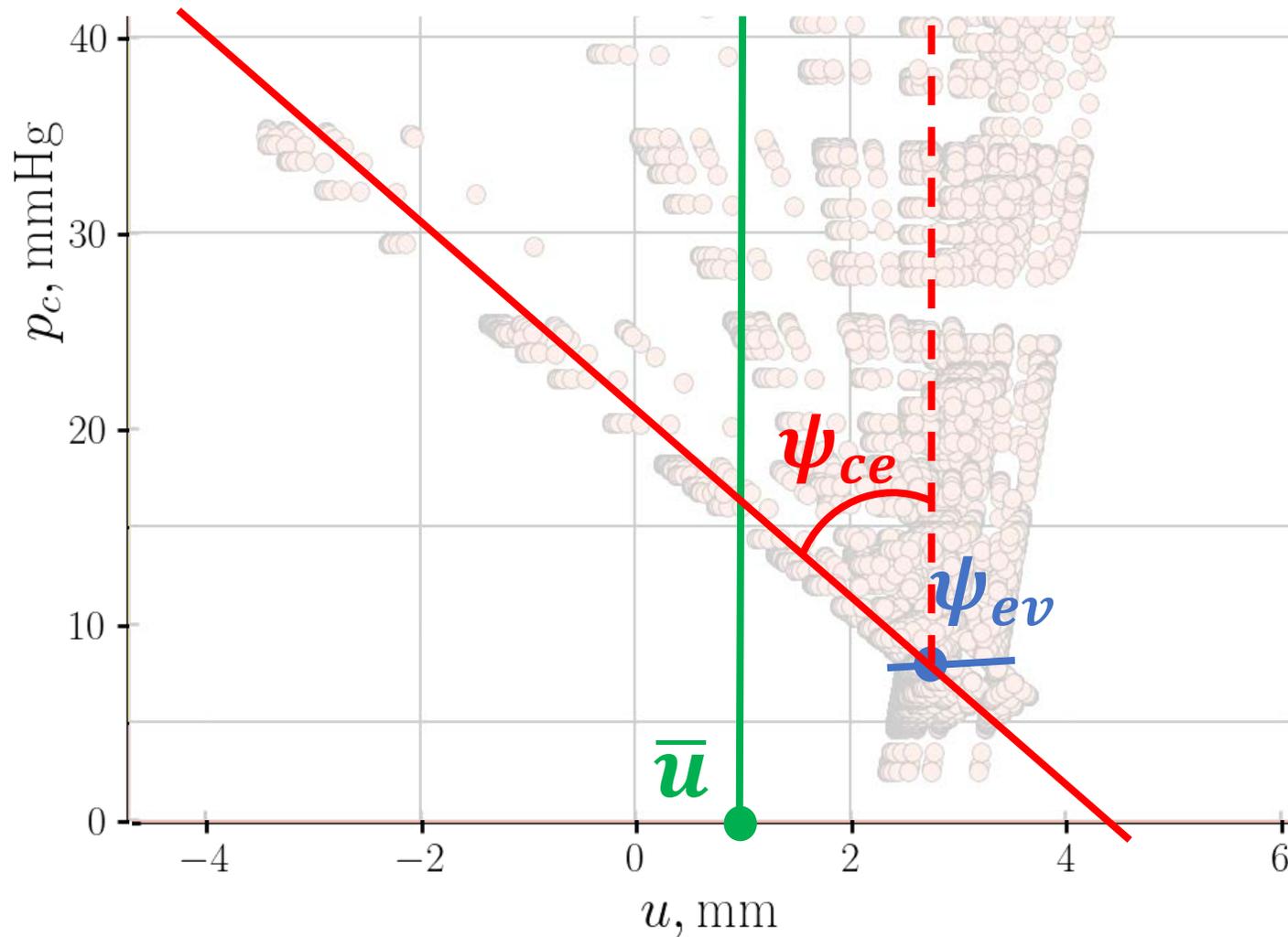
# Капиллярное давление на границе желудочка

$$(\gamma_{ce}, \gamma_{cv}, \gamma_{ac}, \gamma_{ev}) \longrightarrow \psi_{**} = \ln \left( \frac{\gamma_{**} - \min \gamma_{**}}{\max \gamma_{**} - \min \gamma_{**}} + b \right) \longrightarrow \bar{u}(\psi_{ce}, \psi_{cv}, \psi_{ac}, \psi_{ev})$$



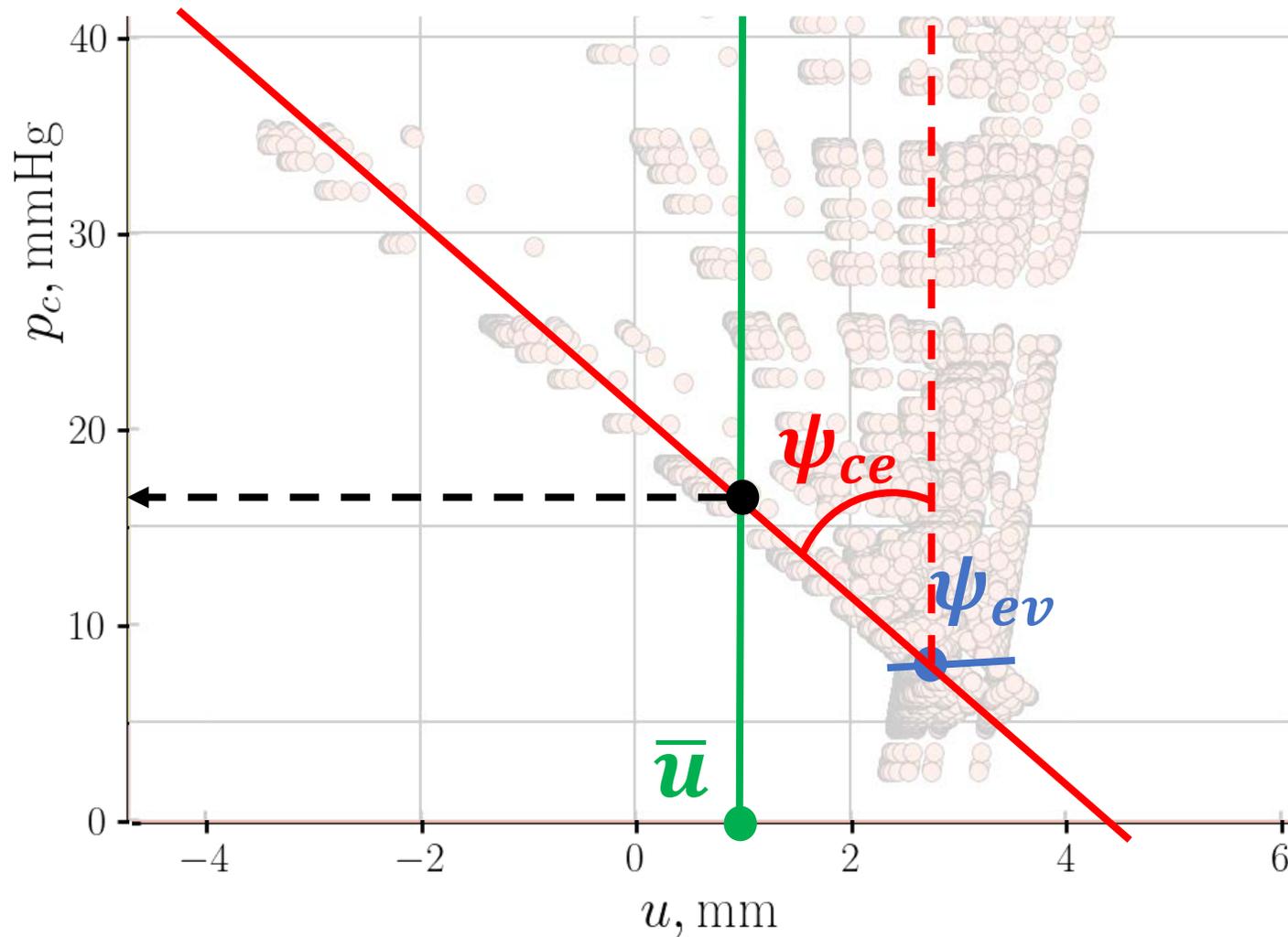
# Капиллярное давление на границе желудочка

$$(\gamma_{ce}, \gamma_{cv}, \gamma_{ac}, \gamma_{ev}) \longrightarrow \psi_{**} = \ln \left( \frac{\gamma_{**} - \min \gamma_{**}}{\max \gamma_{**} - \min \gamma_{**}} + b \right) \longrightarrow \bar{u}(\psi_{ce}, \psi_{cv}, \psi_{ac}, \psi_{ev})$$



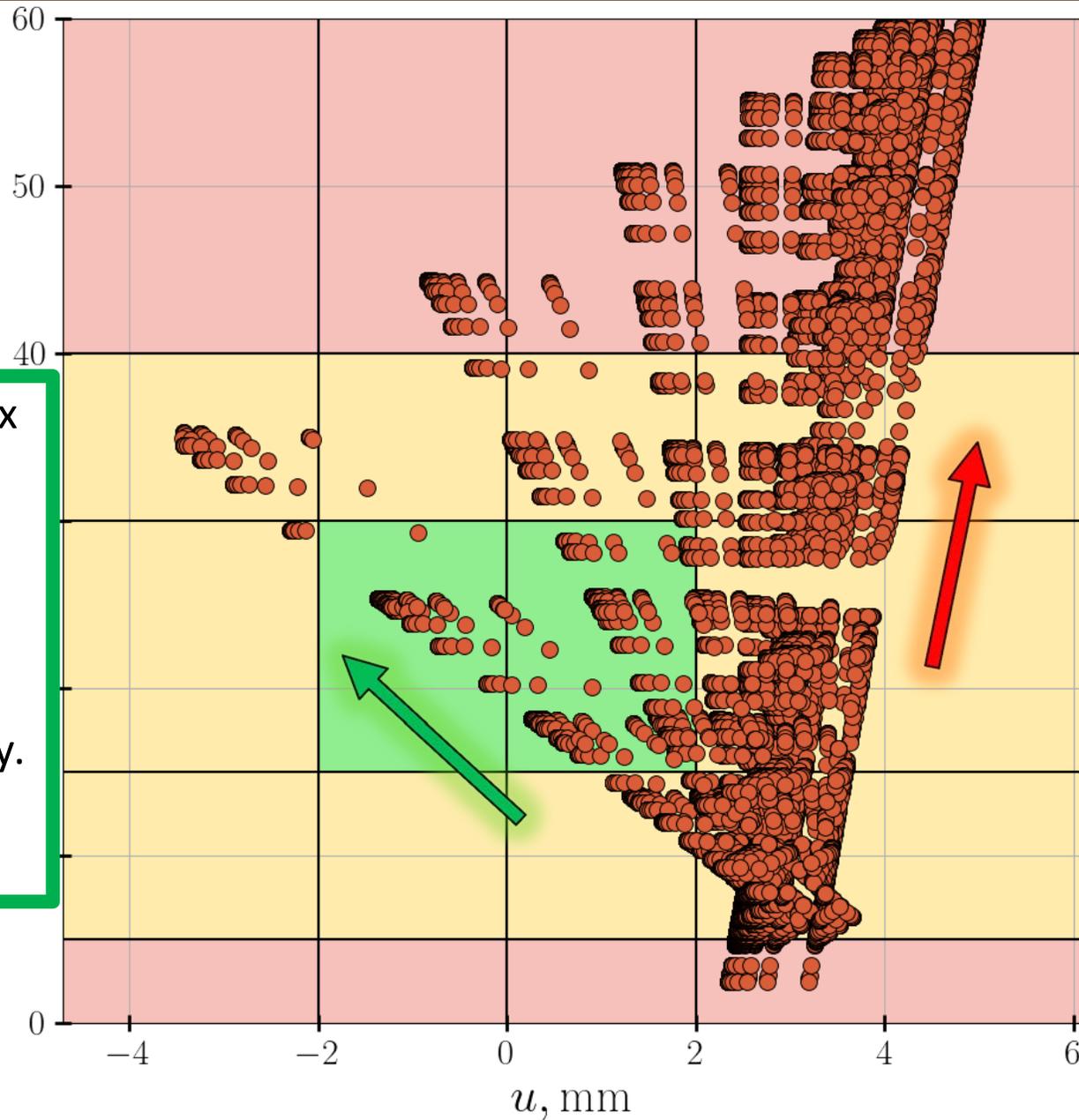
# Капиллярное давление на границе желудочка

$$(\gamma_{ce}, \gamma_{cv}, \gamma_{ac}, \gamma_{ev}) \longrightarrow \psi_{**} = \ln \left( \frac{\gamma_{**} - \min \gamma_{**}}{\max \gamma_{**} - \min \gamma_{**}} + b \right) \longrightarrow \bar{u}(\psi_{ce}, \psi_{cv}, \psi_{ac}, \psi_{ev})$$



# Гипотеза о развитии гидроцефалии

При нормальных параметрах ликворного звена работает сосудистая ауторегуляция. Она при увеличении желудочков поднимает капиллярное давление и желудочек приходит в норму.  
**Отрицательная обратная связь**



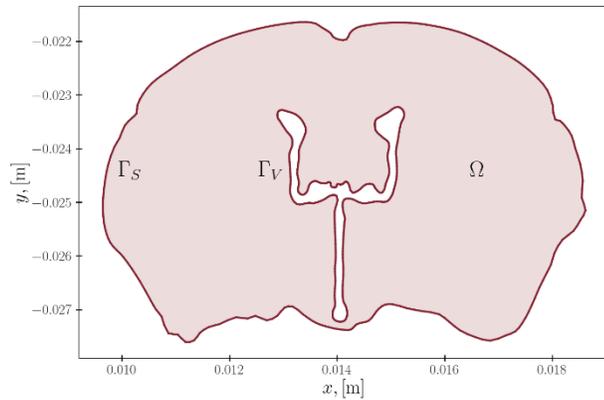
При смещенных параметрах ликворного звена такая же работа сосудистой ауторегуляции еще более раздувает желудочек.  
**Положительная обратная связь**

# Адаптация модели для мышей. Геометрия расчётной области

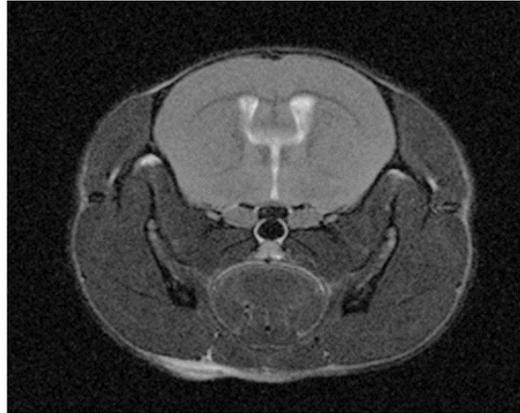
3 группы: 4 самца мышей генетической линии BALB/C (ИЦиГ СО РАН), 4 самца мышей генетической линии C57BL/6 (ИЦиГ СО РАН), 4 здоровых добровольца (МТЦ СО РАН)



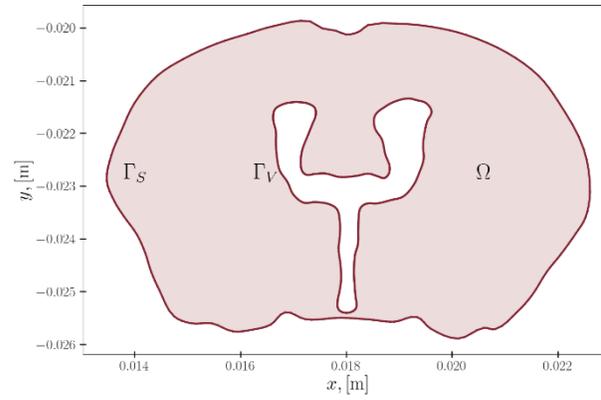
Данные МРТ мышей генетической линии BALB/C



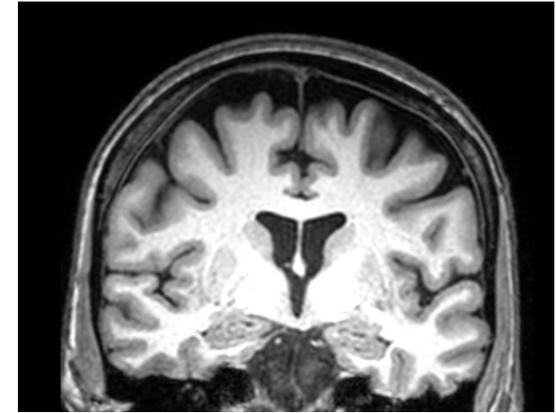
Двумерная геометрия расчетной области мышей генетической линии BALB/C



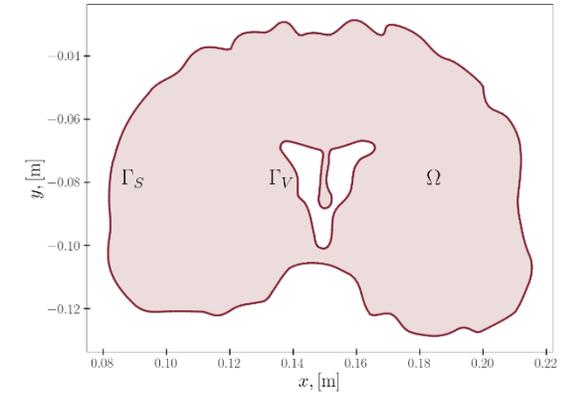
Данные МРТ мышей генетической линии C57BL/6



Двумерная геометрия расчетной области мышей генетической линии C57BL/6



Данные МРТ здорового добровольца

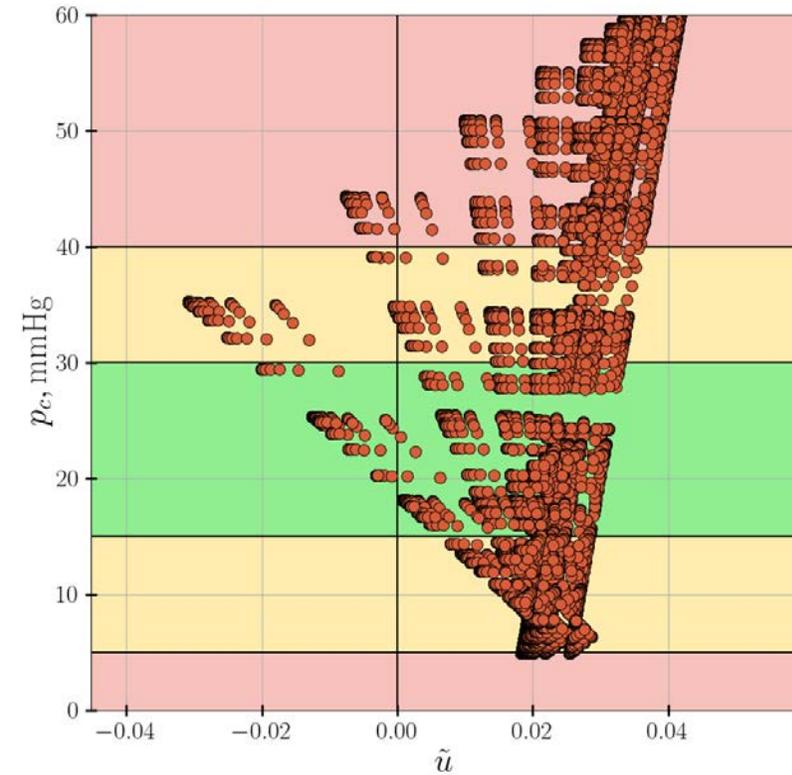


Двумерная геометрия расчетной области здорового добровольца

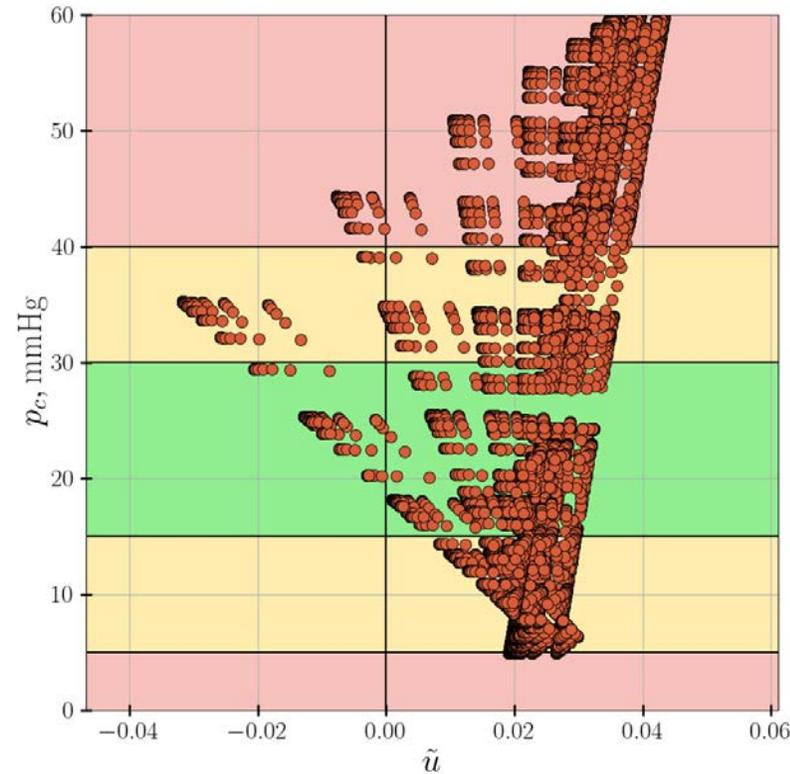
# Адаптация модели для мышей

- На основании сходства мозговой микроциркуляции человека и мыши **считалась одинаковой удельная скорость** образования ликвора у людей и мышей. Поэтому масштабный коэффициент выбран на основе известных значений **полного мозгового производства ликвора** для человека и мышей.
- Для параметров  $\gamma_{ac}, \gamma_{cv}, \gamma_{ce}, \gamma_{ev}$  коэффициент пересчета дополнительно уточнен: выбрано значение коэффициента пересчета, при котором величина отношения среднего смещения стенки растянутого желудочка к среднему смещению стенки нормального желудочка наиболее близка у людей и мышей.

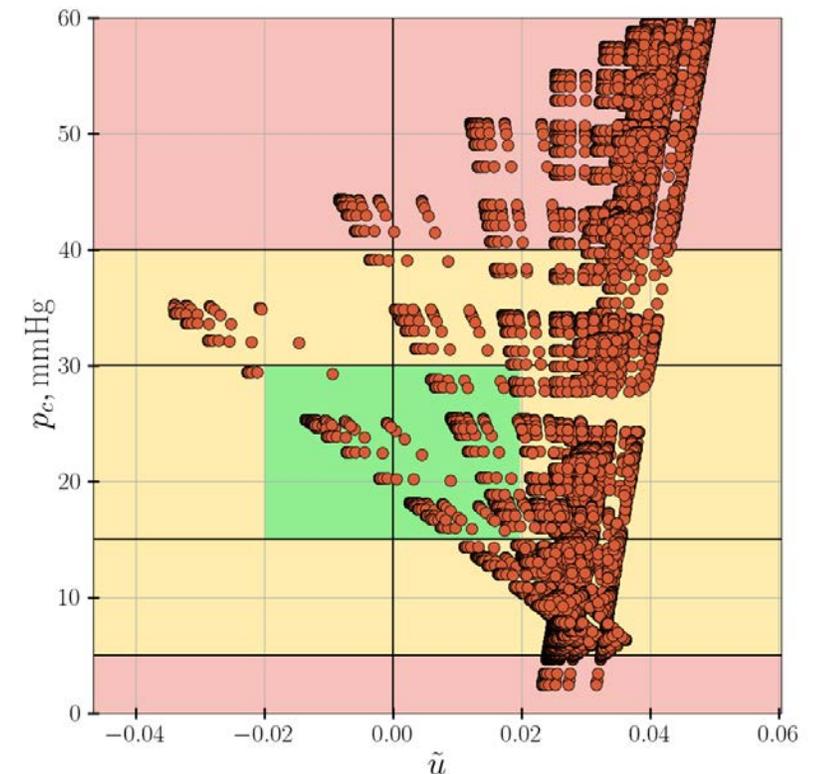
# Взаимосвязь капиллярного давления и среднего смещения стенки желудочков



**МЫШЬ** генетической линии  
BALB/C



**МЫШЬ** генетической линии  
C57BL/6



**здоровый доброволец**

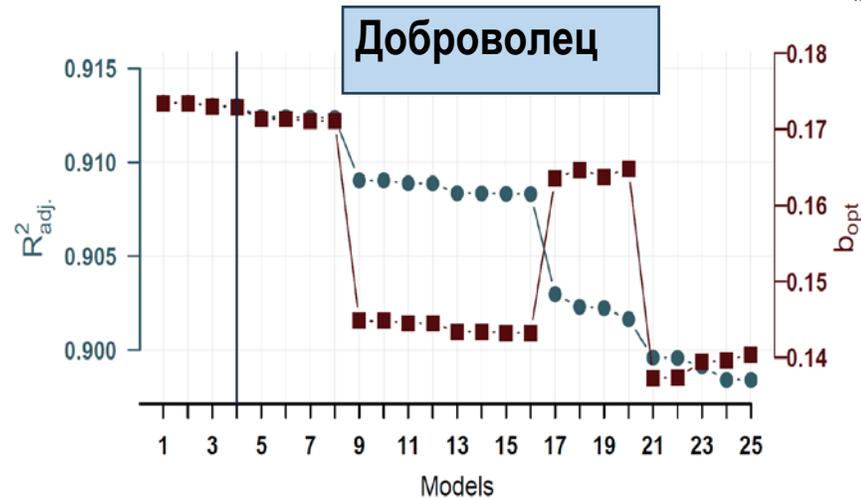
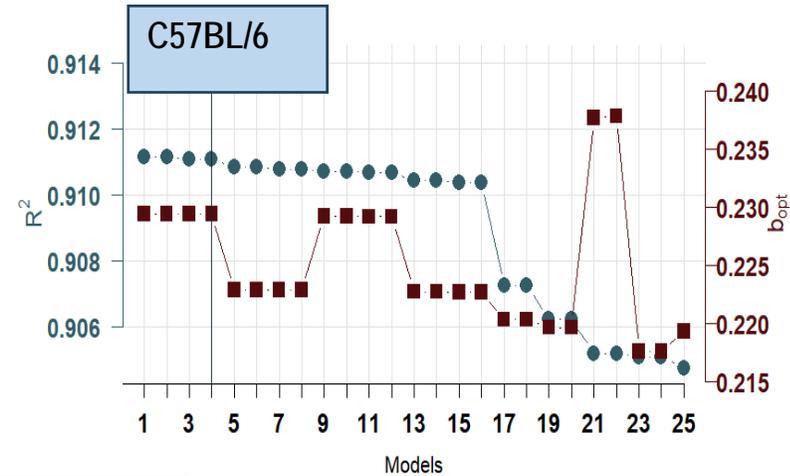
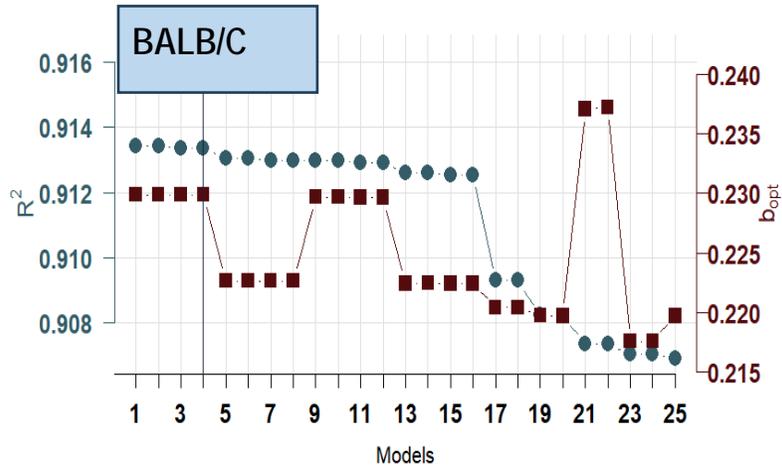
Видна одинаковая качественная картина взаимосвязи капиллярного давления и среднего смещения стенки желудочков

# Регрессия и на $\gamma_{ce}, \gamma_{cv}, \gamma_{ac}, \gamma_{ev}$ : выбор модели

Система уравнений в частных производных



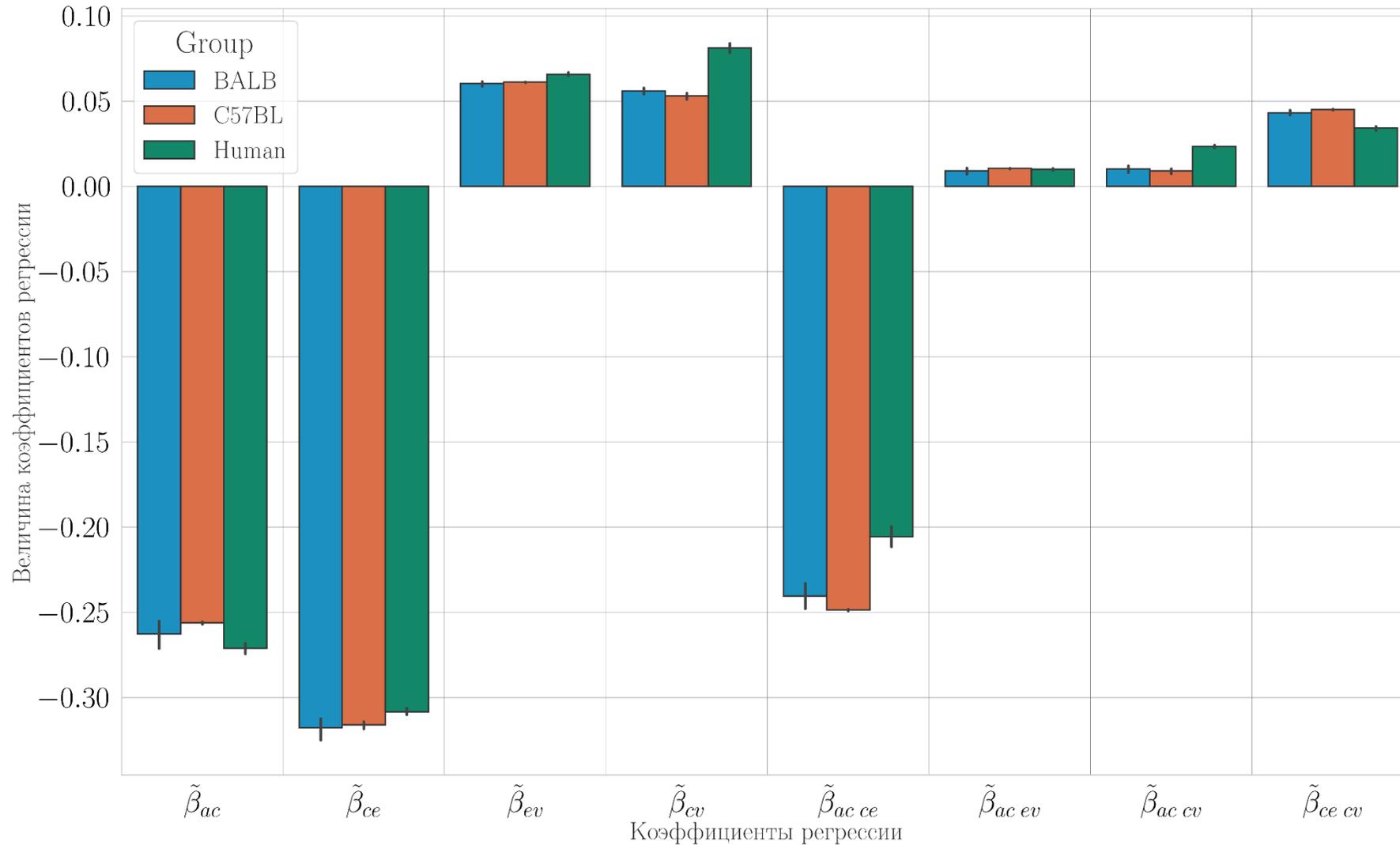
Аналитическая формула для  $\bar{u}(\gamma_{ce}, \gamma_{cv}, \gamma_{ac}, \gamma_{ev})$



Величины  $b_{opt}$  и  $R^2_{adj}$  для первых 25 из 1023 моделей

# Коэффициенты регрессии для 3 групп

Обезразмеривание коэффициентов регрессии:  $\tilde{\beta}_i = \frac{\hat{\beta}_i}{\sum_{j=1}^8 |\hat{\beta}_j|}$



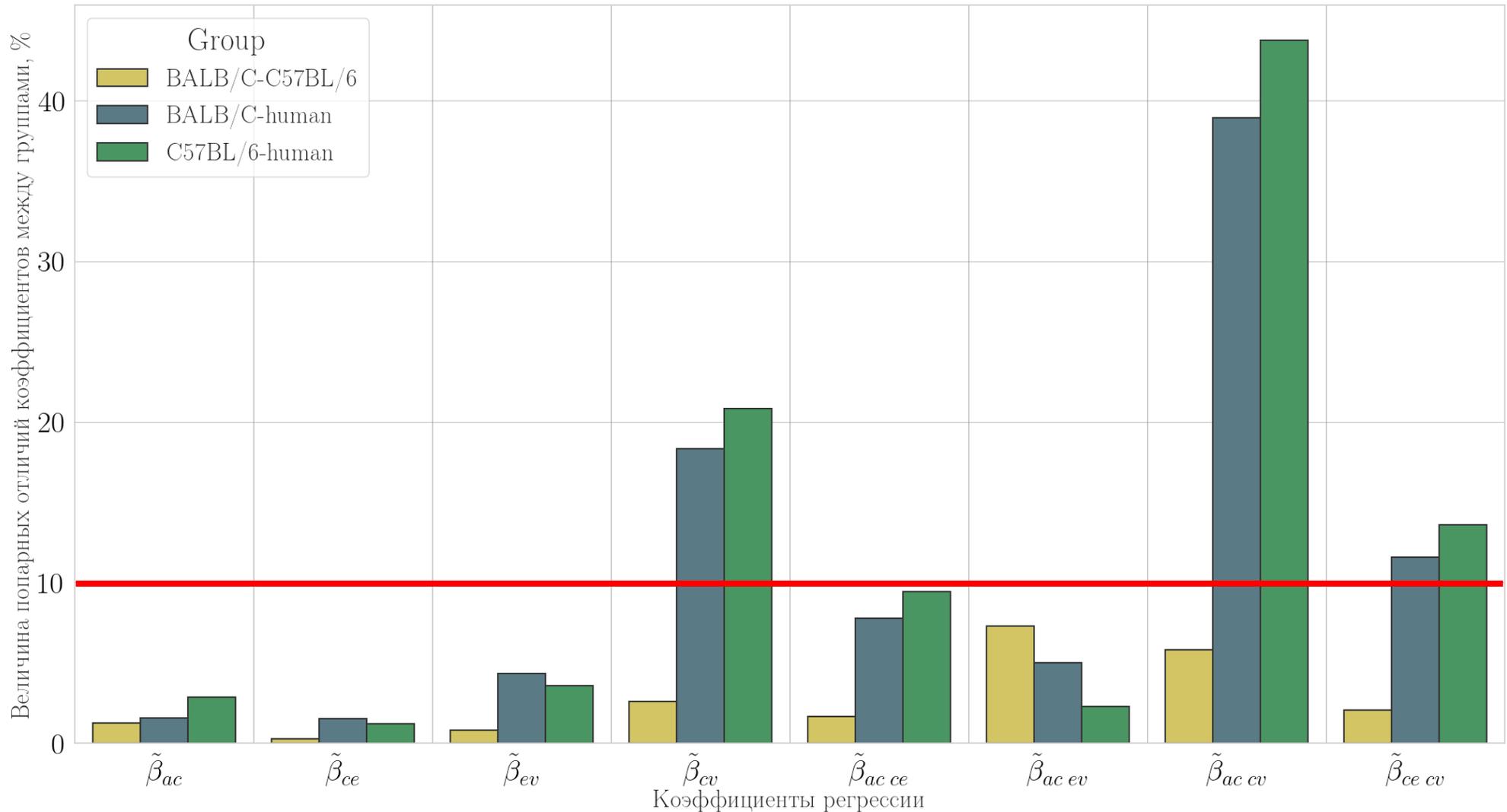
# Сравнение коэффициентов регрессии (относительные величины)

- Генетические линии мышей мало отличаются между собой по величине коэффициентов – от 0.3% до 7.3%.
- Сравнение мышей с людьми для большинства коэффициентов дает незначительные различия - от 1.2% до 9.5%.  
коэффициенты, описывающие капиллярно-венозное взаимодействие, различаются в диапазоне от 11.6% до 43.7%.

$$100\% * \frac{|\mu_1 - \bar{\mu}|}{\bar{\mu}}$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$$

$\mu_1, \mu_2$  - средние двух групп.



Спасибо за внимание!

## Опубликованные работы

---

- Янькова, Г. С., Черевко, А. А., Хе, А. К., Богомякова, О. Б., & Тулупов, А. А. (2020). Исследование развития гидроцефалии с использованием моделей пороупругости. *Прикладная механика и техническая физика*, 61(1), 17-29.
- Yankova, G., Bogomyakova, O., & Tulupov, A. (2021). The glymphatic system and meningeal lymphatics of the brain: new understanding of brain clearance. *Reviews in the Neurosciences*.
- Янькова, Г. С., Черевко, А. А., Хе, А. К., Богомякова, О. Б., & Тулупов, А. А. (2021). Математическое моделирование нормотензивной гидроцефалии при различном уровне детализации геометрии головного мозга. *Прикладная механика и техническая физика*, 62(4), 148-157.
- Valova, G., Bogomyakova, O., Tulupov, A., & Cherevko, A. (2022). Influence of interaction of cerebral fluids on ventricular deformation: A mathematical approach // *PLOS ONE*, 17(2), e0264395.