Об уравнении для вихря при течении вязкой жидкости в искривленном канале

С. А. Васюткин, А. П. Чупахин

Институт гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН, НГУ

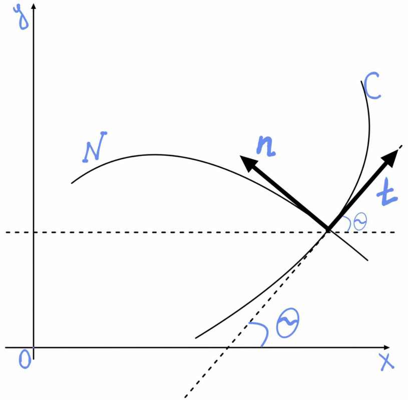
Ортогональная криволинейная система координат

[*Milne – Thomson L. N.*]

C – касательный вектор $\mathbf{t}$, элемент дуги ds, кривизна κ_s

N – касательный вектор $\mathbf{n}$, элемент дуги dn, кривизна κ_n

$$\kappa_s = \frac{\partial\theta}{\partial s}, \quad \kappa_n = \frac{\partial\theta}{\partial n},$$



Базис Френе - Серре:

$$\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial s} = \kappa_s \mathbf{n}, \qquad \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial n} = -\kappa_n \mathbf{t},$$

$$\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial n} = \kappa_n \mathbf{n}, \qquad \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial s} = -\kappa_s \mathbf{t}.$$

- Естеств. коорд. применяются при анализе движущихся кривых [*Dall′Acqua A.* (2014), *Lin C. C.* (2012), *P. I. Plotnikov* (2023)]

Уравнения Навье - Стокса

[Milne – Thomson L. N.]

установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости:

$$\langle \vec{q}, \nabla \rangle \vec{q} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta \vec{q}, \quad \langle \nabla, \vec{q} \rangle = 0,$$

$\rho = const$ – плотность жид., $\nu = const$ – кинемат. вязкость.

Вектор скорости:

$$\vec{q} = q_s \mathbf{t} + q_n \mathbf{n}.$$

Дифференциальные операторы:

$$\nabla = \mathbf{t} \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n}, \quad \langle \vec{q}, \nabla \rangle = q_s \frac{\partial}{\partial s} + q_n \frac{\partial}{\partial n}.$$

Вектор вихря: $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{q}$

Уравнения Навье - Стокса

[Milne – Thomson L. N.]

Если линия C – это линия тока, то $\vec{q} = q\mathbf{t}$. Тогда

Теорема (1)

Уравнения Навье – Стокса в координатах C, N имеют вид

$$q\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = \nu\left[\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial n^2} - \kappa_s\frac{\partial q}{\partial n} + \kappa_n\frac{\partial q}{\partial s} - q(\kappa_s^2 + \kappa_n^2)\right],$$

$$q^2\kappa_s + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \nu\left[2\kappa_s\frac{\partial q}{\partial s} + 2\kappa_n\frac{\partial q}{\partial n} + q\left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n}\right)\right],$$

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \kappa_n q = 0.$$

Вектор вихря: $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{q} = \left(q\kappa_s - \frac{\partial q}{\partial n}\right)\mathbf{t} \times \mathbf{n}$

$$\omega = \left(q\kappa_s - \frac{\partial q}{\partial n}\right)$$

Везде далее кривизны κ_s, κ_n заданные гладкие функции.

Теорема (1)

Уравнения Навье – Стокса в координатах C, N имеют вид

$$q\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = \nu\left[\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial n^2} - \kappa_s\frac{\partial q}{\partial n} + \kappa_n\frac{\partial q}{\partial s} - q(\kappa_s^2 + \kappa_n^2)\right],$$

$$q^2\kappa_s + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \nu\left[2\kappa_s\frac{\partial q}{\partial s} + 2\kappa_n\frac{\partial q}{\partial n} + q\left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n}\right)\right],$$

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \kappa_n q = 0.$$

Система 3-х уравнений Навье - Стокса для 2-х функций p и q является переопределенной, так как уравнений больше, чем искомых функций.

$$\omega = \left(q\kappa_s - \frac{\partial q}{\partial n}\right)$$

Дополняя уравнения Навье - Стокса выражением для вихря получаем переопределенную систему 4-х уравнений для 3-х функций p, q и ω.

Система ↑ порождает условия совместности.

[*Pommaret, J. F.*]

Теорема (1)

Уравнения Навье – Стокса в координатах C, N имеют вид

$$q\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = \nu\left[\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial n^2} - \kappa_s\frac{\partial q}{\partial n} + \kappa_n\frac{\partial q}{\partial s} - q(\kappa_s^2 + \kappa_n^2)\right],$$

$$q^2\kappa_s + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \nu\left[2\kappa_s\frac{\partial q}{\partial s} + 2\kappa_n\frac{\partial q}{\partial n} + q\left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n}\right)\right],$$

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \kappa_n q = 0.$$

$$\omega = \left(q\kappa_s - \frac{\partial q}{\partial n}\right)$$

Система ↑ порождает условия совместности.

[*Pommaret, J. F.*]

Наша цель – выписывание этих условий совместности, т.е. приведение системы ↑ в инволюцию.

Условия с-ти для NS в декарт. сист. координат – уравнения для вихря. Течение в более сложной геометрической конфигурации порождает и более сложные условия совместности, являющиеся также уравнениями для вихря в этом случае.

Из уравнения неразрывности и представления для вихря :

$$\frac{\partial q}{\partial s} = -\kappa_n q, \qquad \frac{\partial q}{\partial n} = \kappa_s q - \omega.$$

Лемма (1)

Условие совместности переопределённой системы $\nwarrow$*:*

$$q\left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n}\right) = \frac{\partial \omega}{\partial s} + \kappa_n \omega$$

Условия совместности

Первый этап: Скорость

Лемма (1)

Условие совместности переопределённой системы NS:

$$q\left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n}\right) = \frac{\partial \omega}{\partial s} + \kappa_n \omega$$

При условии

$$\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} = \Delta\theta \neq 0$$

Выражение скорости q только через вихрь ω:

$$q = \frac{1}{\Delta\theta}\left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial n}\omega\right)$$

Из представления производных скорости и второго уравнения импульсов имеем:

$$\kappa_s q^2 - \nu\left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n}\right) q + 2\nu\kappa_n\omega + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = 0.$$

Из $\nearrow$ при условии $\kappa_s \neq 0$ следует

Lemma (∗)

Решение уравнений NS существует при условии

$$(\nu\Delta\theta)^2 - 4\frac{\partial\theta}{\partial s}\left(2\nu\frac{\partial\theta}{\partial n}\omega + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\right) \geq 0.$$

Условия совместности

Второй этап: Давление

Из уравнений сохранения импульса:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = \kappa_n q^2 - \nu\left[\frac{\partial \omega}{\partial n} + (\kappa_s^2 + \kappa_n^2)q\right],$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = -\kappa_s q^2 + \nu\left[\left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n}\right)q - 2\kappa_n\omega\right].$$

Лемма (2)

Условие совместности переопределённой системы ↑:

$$\nu\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial s^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial n^2} + \kappa_n\frac{\partial\omega}{\partial s} - \omega(\kappa_s^2+\kappa_n^2) - \frac{\partial\kappa_n}{\partial s}\omega\right] +$$
$$+ q\left[\nu\kappa_s(\kappa_s^2+\kappa_n^2) + 2\nu\left(\kappa_s\frac{\partial\kappa_s}{\partial n} + \kappa_n\frac{\partial\kappa_n}{\partial n}\right) + \kappa_n\omega - \frac{\partial\omega}{\partial s}\right] = 0,$$

Условия совместности

Второй этап: Давление

Лемма (2)

Условие совместности переопределённой системы NS:

$$\nu\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial s^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}+\kappa_n\frac{\partial\omega}{\partial s}-\omega(\kappa_s^2+\kappa_n^2)-\frac{\partial\kappa_n}{\partial s}\omega\right]+$$
$$+q\left[\nu\kappa_s(\kappa_s^2+\kappa_n^2)+2\nu\left(\kappa_s\frac{\partial\kappa_s}{\partial n}+\kappa_n\frac{\partial\kappa_n}{\partial n}\right)+\kappa_n\omega-\frac{\partial\omega}{\partial s}\right]=0$$

При условии $\Delta\theta\neq 0$:

$$\nu\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial s^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}+\frac{\partial\theta}{\partial n}\frac{\partial\omega}{\partial s}-\omega\left(|\nabla\theta|^2+\frac{\partial^2\theta}{\partial n\partial s}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{\Delta\theta}\left(\frac{\partial\omega}{\partial s}+\frac{\partial\theta}{\partial n}\omega\right)\left[\nu\frac{\partial\theta}{\partial s}|\nabla\theta|^2+\nu\frac{\partial}{\partial n}|\nabla\theta|^2+\frac{\partial\theta}{\partial n}\omega-\frac{\partial\omega}{\partial s}\right]=0$$

Уравнение для вихря ω не включающее скорость q.

Уравнение для вихря

$$\langle \vec{q}, \nabla \rangle \vec{\omega} - \langle \vec{\omega}, \nabla \rangle \vec{q} = \nu \Delta \vec{\omega}$$

При условии $\Delta\theta \neq 0$:

$$\nu \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} + \frac{\partial \theta}{\partial n} \frac{\partial \omega}{\partial s} - \omega \left(|\nabla \theta|^2 + \frac{\partial^2 \theta}{\partial n \partial s} \right) \right] +$$
$$+ \frac{1}{\Delta\theta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial n} \omega \right) \left[\nu \frac{\partial \theta}{\partial s} |\nabla \theta|^2 + \nu \frac{\partial}{\partial n} |\nabla \theta|^2 + \frac{\partial \theta}{\partial n} \omega - \frac{\partial \omega}{\partial s} \right] = 0$$

Уравнение для вихря ω не включающее скорость q.

Условия совместности

Теорема (2)

Условиями совместности двумерных стационарных уравнений Навье – Стокса в естественных координатах, в которых линии тока совпадают с одной из координатных линий, являются уравнения:

$$q\left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n}\right) = \frac{\partial \omega}{\partial s} + \kappa_n \omega,$$

$$\nu\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} + \kappa_n \frac{\partial \omega}{\partial s} - \omega(\kappa_s^2 + \kappa_n^2) - \frac{\partial \kappa_n}{\partial s}\omega\right] +$$
$$+ q\left[\nu \kappa_s(\kappa_s^2 + \kappa_n^2) + 2\nu\left(\kappa_s \frac{\partial \kappa_s}{\partial n} + \kappa_n \frac{\partial \kappa_n}{\partial n}\right) + \kappa_n \omega - \frac{\partial \omega}{\partial s}\right] = 0.$$

Уравнения $\uparrow$ *являются уравнениями для вихря в указанных координатах.*

При условии $\Delta\theta \neq 0$

Решаем нелинейное дифф. уравнение и находим вихрь ω:

$$\nu\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial s^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}+\frac{\partial\theta}{\partial n}\frac{\partial\omega}{\partial s}-\omega\left(|\nabla\theta|^2+\frac{\partial^2\theta}{\partial n\partial s}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{\Delta\theta}\left(\frac{\partial\omega}{\partial s}+\frac{\partial\theta}{\partial n}\omega\right)\left[\nu\frac{\partial\theta}{\partial s}|\nabla\theta|^2+\nu\frac{\partial}{\partial n}|\nabla\theta|^2+\frac{\partial\theta}{\partial n}\omega-\frac{\partial\omega}{\partial s}\right]=0$$

Находим скорость:

$$q=\frac{1}{\Delta\theta}\left(\frac{\partial\omega}{\partial s}+\frac{\partial\theta}{\partial n}\omega\right)$$

Точное решение уравнений Навье - Стокса

Пусть
$\theta = \theta(s)$ и $q = q(s)$

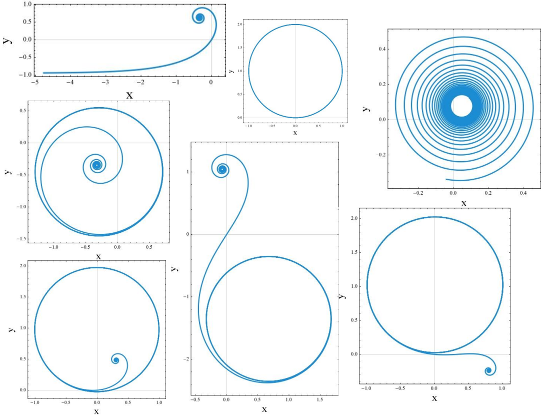
Тогда
$q = const$ и $\omega = q\kappa_s$

Из 2-го усл. сов-ти

$$\kappa_s'' - \frac{q}{\nu}\kappa_s = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\kappa_s = C_1 \frac{\nu}{q} \exp\left(\frac{q}{\nu}s\right) + C_2$$



Линии тока (траектории) жидкой частицы

$$q = const, \qquad \omega = q\left(C_1 \frac{\nu}{q} \exp\left(\frac{q}{\nu}s\right) + C_2\right),$$

- Milne - Thomson L. N., Theoretical Hydrodynamics. 1962.
- Pommaret, J. F. Differential Galois Theory // 1983.
- Pavel I. Plotnikov, Jan Sokolowski Geometric Aspects of Shape Optimization // 2023.
- Dall'Acqua, A., Pozzi, P., A Willmore-Helfrich L^2-flow of curves with natural boundary conditions // 2014. V. 22, N 4. P. 617 – 669.
- Lin C. C., L^2-flow of elastic curves with clamped boundary conditions // 2012. V. 252, N 12. P. 6414–6428.

Спасибо за внимание!