Моделирование сердечного выброса при дефекте межжелудочковой перегородки с помощью точечной динамической модели сердца

Рогов А.В.(Сеченовский унив.), Свободов А.А.(ФГБУ "НМИЦ ССХ им. А.Н. Бакулева"), Симаков С.С.(МФТИ)

Долгопрудный, 2022

Актуальность

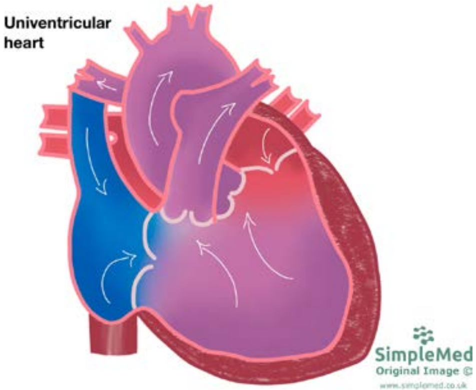


Рис. 1: Сердце с единственным функциональным желудочком. Источник: https://simplemed.co.uk/subjects/cardiovascular/congenital-heart-defects

Актуальность

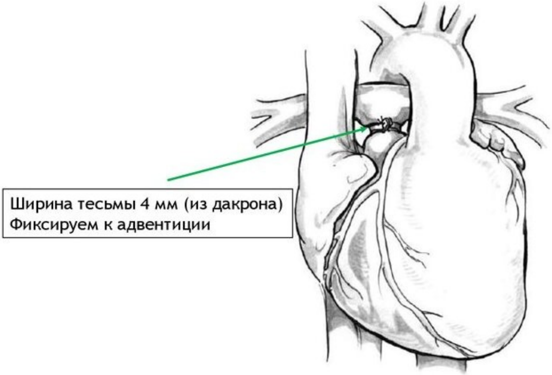


Рис. 2: Суживание легочной артерии по Мюллеру. Источник: https://ppt-online.org/649595

Цели и задачи работы

Цель: моделирование сердечного выброса при врожденном пороке сердца - дефекте межжелудочковой перегородки.

Задачи:

- Построение осредненной по объему модели трехкамерного сердца.
- Анализ полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на жесткость, подбор метода для ее численного решения.
- Создание прикладной программы для численного интегрирования системы.
- Анализ полученных результатов.

Уравнения, описывающие динамику объема камер

Проинтегрированный закон сохранения импульса для участка крупного сосуда:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{Q^2}{S}\right) + \frac{S}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = K_r u \qquad (1)$$

где $\alpha = \frac{\gamma+2}{\gamma+1}$ и $K_r = -2\pi(\gamma + 2)\nu$.

$$I\frac{d^2V}{dt^2} + R\frac{dV}{dt} + \Delta P = 0 \qquad (2)$$

где $I = \frac{\rho l^2}{V}$ - коэффициент инерции, $R = 2\pi\nu(\gamma + 2)\frac{\rho l^3}{V^2}$ - коэффициент гидравлического сопротивления.

Уравнения, описывающие динамику объема камер

Представим ΔP в виде

$$\Delta P = P_0 + E(t)(V - V_0) - P_{ch} \qquad (3)$$

где $E(t) = E^d + \frac{E^s - E^d}{2} e(t)$, $0 \leqslant e(t) \leqslant 1$, $e(t)$ - потенциал активации.
Итоговое уравнение динамики сердечных камер:

$$I_k \frac{d^2 V_k}{dt^2} + R_k \frac{dV_k}{dt} + E_k(t)(V_k - V_k^0) + P_k^0 = P_k \qquad k = la, ra, v \qquad (4)$$

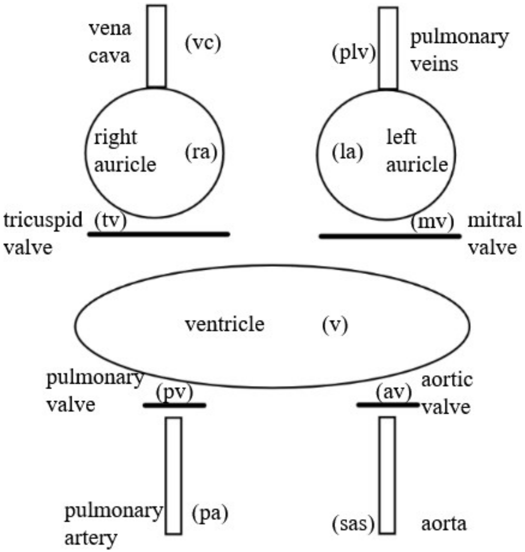


Рис. 3: Схематичное изображение модели сердца

Законы сохранения масс

Законы сохранения масс, связывающие потоки с изменениями объемов:

$$
\begin{aligned}
\frac{dV_{la}}{dt} &= Q_{plv} - Q_{mv} \\
\frac{dV_{ra}}{dt} &= Q_{vc} - Q_{tv} \\
\frac{dV_{v}}{dt} &= Q_{mv} + Q_{tv} - Q_{pv} - Q_{av}
\end{aligned} \tag{5}
$$

Законы Пуазейля

Аналоги законов Пуазейля, связывающие потоки с разницей давлений:

$$
\begin{aligned}
Q_{plv} &= \frac{P_{plv} - P_{la}}{R_{plv}} & Q_{vc} &= \frac{P_{vc} - P_{ra}}{R_{vc}} \\
Q_{mv} &= g_{mv}(\theta_{mv}) \frac{P_{la} - P_{v}}{R_{mv}} & Q_{tv} &= g_{tv}(\theta_{tv}) \frac{P_{ra} - P_{v}}{R_{tv}} \\
Q_{av} &= g_{av}(\theta_{av}) \frac{P_{v} - P_{sas}}{R_{av}} & Q_{pv} &= g_{pv}(\theta_{pv}) \frac{P_{v} - P_{pa}}{R_{pv}}
\end{aligned} \tag{6}
$$

Функция $g(\theta) = \{\theta^{min} \leqslant \theta \leqslant \theta^{max}, 0 \leqslant g(\theta) \leqslant 1\}$ - гладкую монотонную функцию, регулирующую степень открытия и закрытия определенного сердечного клапана в зависимости от угла раскрытия.

Уравнения, описывающие динамику клапанов

$$\frac{d^2\theta_{mv}}{dt^2} = (P_{la} - P_v)K^p_{mv} - K^f_{mv}\frac{d\theta_{mv}}{dt} + K^b_{mv}Q_{mv}\cos(\theta_{mv}) - K^v_{mv}\sin(2\theta_{mv})f_{mv}$$

$$\frac{d^2\theta_{tv}}{dt^2} = (P_{ra} - P_v)K^p_{tv} - K^f_{tv}\frac{d\theta_{tv}}{dt} + K^b_{tv}Q_{tv}\cos(\theta_{tv}) - K^v_{tv}\sin(2\theta_{tv})f_{tv} \tag{7}$$

$$\frac{d^2\theta_{av}}{dt^2} = (P_v - P_{sas})K^p_{av} - K^f_{av}\frac{d\theta_{av}}{dt} + K^b_{av}Q_{av}\cos(\theta_{av}) - K^v_{av}\sin(2\theta_{av})f_{av}$$

$$\frac{d^2\theta_{pv}}{dt^2} = (P_v - P_{pa})K^p_{pv} - K^f_{pv}\frac{d\theta_{pv}}{dt} + K^b_{pv}Q_{pv}\cos(\theta_{pv}) - K^v_{pv}\sin(2\theta_{pv})f_{pv} \tag{8}$$

где $f_k, k = mv, tv, av, pv$ функции, обеспечивающие плавную смену знака соответствующего слагаемого в зависимости от перепада давления у конкретного клапана.

$$f_k = \frac{1}{2}(1 + tanh10(P_{up} - P_{down})) \tag{9}$$

Результирующая система ОДУ

Предполагая, что P_{vc}, P_{plv}, P_{pa}, P_{sas} постоянны, получим системы вида:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

$$y = \left(V_{la} \quad \frac{dV_{la}}{dt} \quad V_{ra} \quad \frac{dV_{ra}}{dt} \quad V_v \quad \frac{dV_v}{dt} \quad \theta_{mv} \quad \frac{d\theta_{mv}}{dt} \quad \theta_{tv} \quad \frac{d\theta_{tv}}{dt} \quad \theta_{av} \quad \frac{d\theta_{av}}{dt} \quad \theta_{pv} \quad \frac{d\theta_{pv}}{dt}\right)^T \tag{10}$$

Анализ системы на жесткость

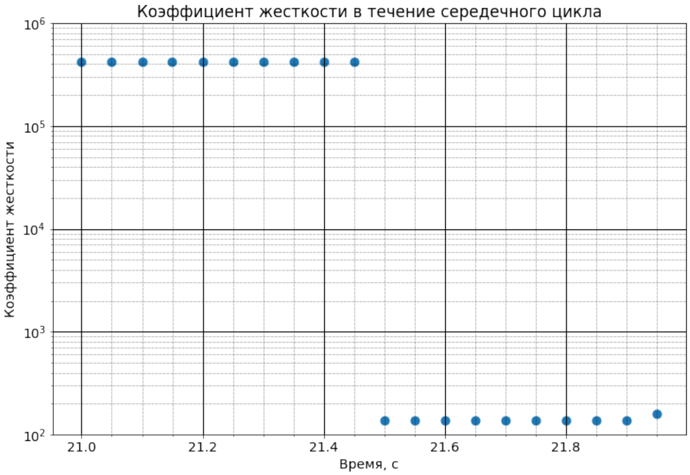


Рис. 4: График коэффициента жесткости

Численный метод

- S-стадийный метод Розенброка

$$k_i = \tau f\Big(t_n + \alpha_i\tau, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j\Big) + \gamma_i \tau^2 \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, y_n) + \tau \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y_n) \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} k_j,$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{S} \beta_i k_i, \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}, \quad \gamma_i = \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} \tag{11}$$

- Использовался метод, представленный Хайрером Э. и впервый реализованный автором. Доказано, что он имеет четвертый порядок аппрокимации и А-устойчив.
- Реализация взята из бибилиотеки *odeint* проекта **Boost**.

Результаты

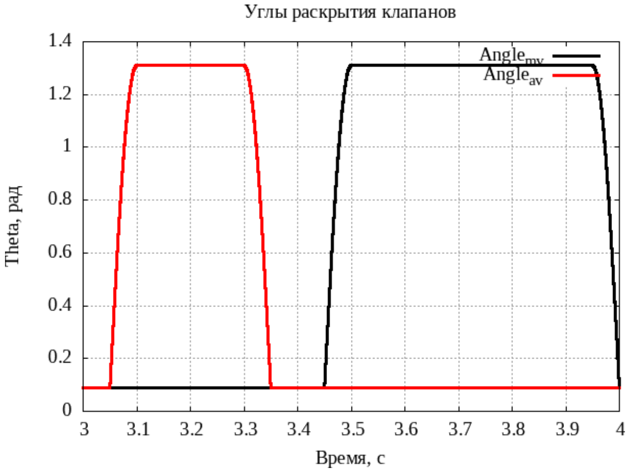
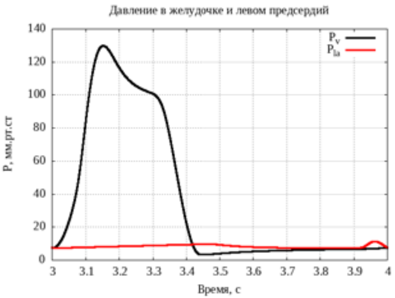


Рис. 5: Зависимость раскрытия угла клапанов от времени.

Результаты



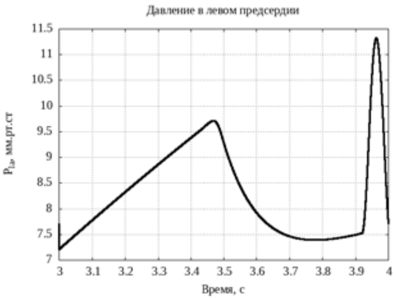


Рис. 6: Зависимость давления в камерах от времени.

Результаты

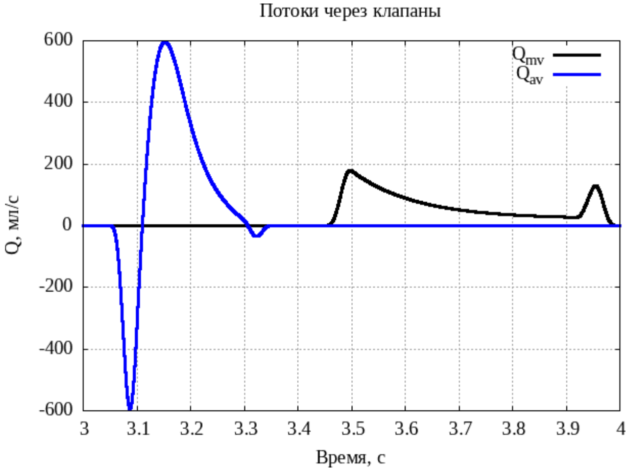


Рис. 7: Зависимость потоков через аортальный и митральный клапан от времени.

Результаты

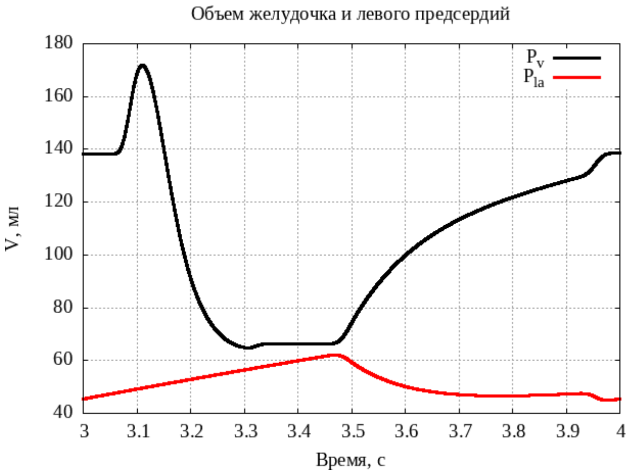


Рис. 8: Зависимость объемов желудочка и левого предсердия от времени.

Заключение

- Построена динамическая осредненная по объему модель сердца с дефектом межжелудочковой перегородки.
- Показано, что полученная система дифференциальных уравнений является жесткой.
- Протестирован библиотечный код метода Розеброка, использующегося для интегрирования системы.
- Полученые результаты можно назвать приемлемыми, но в некоторых моментах они отличаются от работ, описывающих четырехкамерное сердце. Это можно объяснить тем, что модель с единственным желудочком не рассматривалась ранее. Также неизвестно как именно будут вести себя физические величины для трехкамерного сердца.

- Спасибо за внимание!