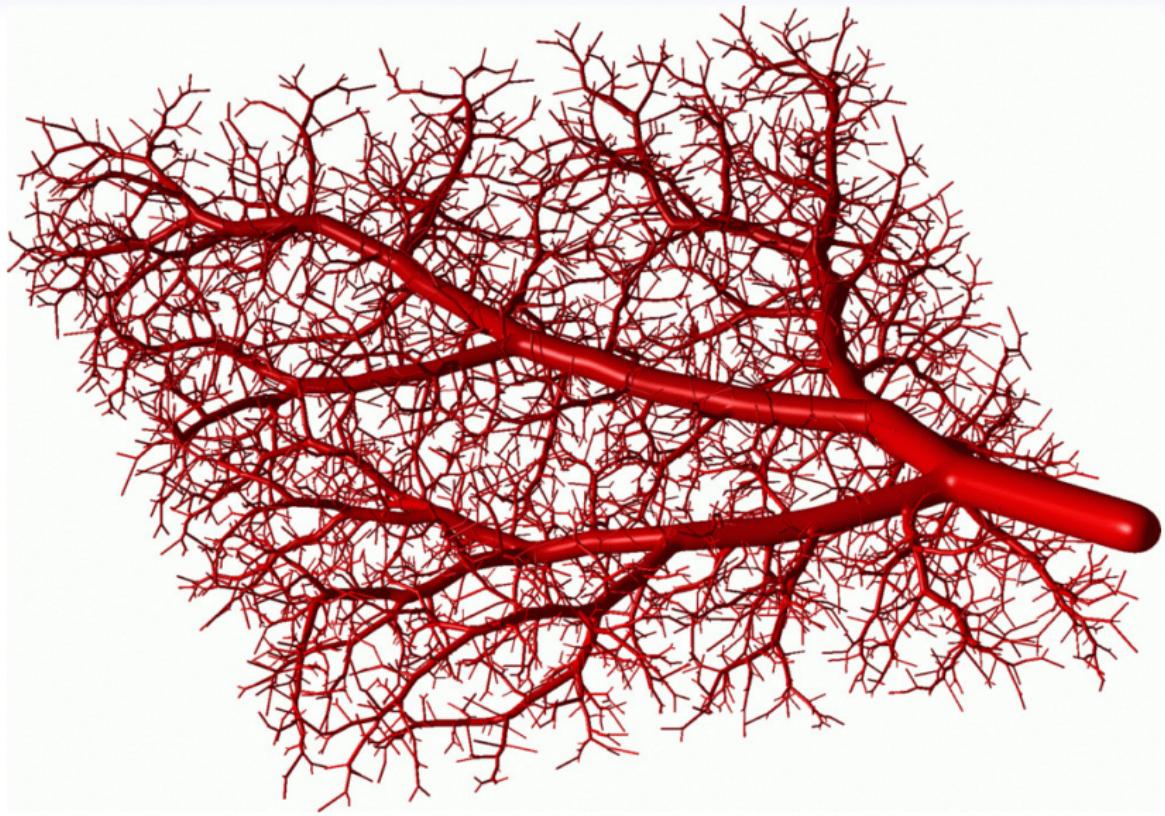


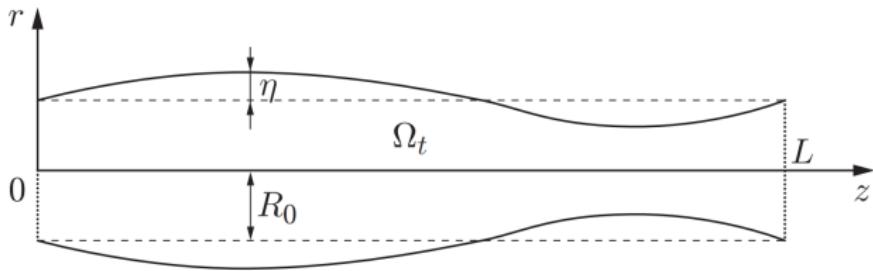
Бегущие волны в одной модели гемодинамики

А.П. Чупахин^{1,2}, С. А. Васюткин^{1,2}

1. Новосибирский государственный университет
2. Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН



Предположения



- цилиндрическая область Ω_t зависит от времени
- все задействованные величины осесимметричны
- перемещение стенки происходит только вдоль радиуса
- давление постоянно в каждом сечении
- вязкие эффекты имеют значение только вблизи границы стенки
- компонента скорости u_z преобладает по сравнению с u_x и u_y

Обозначения: $u = (u_x, u_y, u_z)$ – скорость, P – давление,
 ν – кинематическая вязкость, ρ - плотность жидкости.

Уравнения модели:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad (\text{Ур-е сохр-ия массы})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + K_R \frac{Q}{A} = 0, \quad (\text{Ур-е сохр-ия импульса})$$

$$\forall z \in [0, L], \forall t > 0.$$

Где неизвестные:

$A(t, z)$ – площадь сечения, $Q(t, z)$ – усредненный расход,
 $P(t, z)$ – среднее давление,

$$A(z, t) = \int_{S(z, t)} dz, \quad Q(z, t) = \int_{S(z, t)} u_z(x, y, z, t) dx dy,$$

$$P(z, t) = \frac{1}{A(z, t)} \int_{S(z, t)} P(x, y, z, t) dx dy.$$

Замыкание системы

$$P = \rho_w h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \tilde{\gamma} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \tilde{a} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \tilde{c} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial z^2} + G(\eta), \quad z \in (0, L), \quad t > 0.$$

Обозначения:

$R(t, z)$ – радиус сосуда в сечении z в момент времени t ;

R_0 – радиус сосуда в состоянии покоя;

$\eta = R - R_0$ – отклонение стенки сосуда от состояния покоя;

ρ_w – плотность стенки;

h_0 – толщина стенки;

$G(\eta)$ – функция, задающая упругую реакцию стенки.

Система ДУЧП

Перепишем уравнения в терминах отклонения η и масштабированного расхода $q = Q/\pi$:

$$\frac{\partial}{\partial t}[(\eta + R_0)^2] + \frac{\partial q}{\partial z} = 0, \quad (\text{УСМ})$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{q^2}{(\eta + R_0)^2} \right] + \frac{K_R}{\pi} \frac{q}{(\eta + R_0)^2} + \frac{(\eta + R_0)^2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (\text{УСИ})$$

$$P = \rho_w h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \tilde{\gamma} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \tilde{a} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \tilde{c} \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial z^2} + G(\eta).$$

Бегущие волны

Будем искать решения в виде

$$\eta = \eta(\lambda), \quad q = q(\lambda), \quad \lambda = z - c_0 t, \quad c_0 = \text{const.}$$

Подставляем в УСМ, интегрируем и получаем

$$q = q(\eta) = q_0 + c_0(\eta + R_0)^2, \quad \text{где} \quad q_0 = \text{const.}$$

Подставляем $q(\eta)$ в УСИ и получаем ОДУ

$$\eta''' + \beta_3 \eta'' + \beta_2 \eta'' + F_1(\eta)\eta' + F_0(\eta)\eta = 0.$$

Коэффициенты

$$\eta''' + \beta_3 \eta'' + \beta_2 \eta'' + F_1(\eta) \eta' + F_0(\eta) \eta = 0.$$

$$\beta_2 = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{c}},$$

$$\beta_3 = \frac{\rho_w h_0 c_0^2 - \tilde{a}}{c_0 \tilde{c}},$$

$$F_0(\eta) = \frac{K_R \rho}{\pi c_0 \tilde{c}} \frac{[q_0 + c_0(\eta + R_0)^2]}{(\eta + R_0)^4},$$

$$F_1(\eta) = \left[\frac{1}{c_0 \tilde{c}} \frac{dG(\eta)}{d\eta} - \frac{2c_0 \rho}{\tilde{c}} \frac{1}{(\eta + R_0)} + \frac{4\alpha \rho}{\tilde{c}} \frac{[q_0 + c_0(\eta + R_0)^2]}{(\eta + R_0)^3} - \frac{2\alpha \rho}{c_0 \tilde{c}} \frac{[q_0 + c_0(\eta + R_0)^2]^2}{(\eta + R_0)^5} \right].$$

Особые точки

Обозначим $\eta = x_0, \quad \eta' = x_1, \quad \eta'' = x_2, \quad \eta''' = x_3.$

Соответствующая система ОДУ

$$\begin{aligned}x'_0 &= x_1, & x'_1 &= x_2, & x'_2 &= x_3, \\x'_3 &= -\beta_3 x_3 - \beta_2 x_2 - F_1(x_0)x_1 - F_0(x_0).\end{aligned}$$

Найдем состояния равновесия

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad -\beta_3 x_3 - \beta_2 x_2 - F_1(x_0)x_1 - F_0(x_0) = 0.$$

Тогда

$$x^* = (x_0^*, x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \left(-R_0 \pm \sqrt{-\frac{q_0}{c_0}}, 0, 0, 0\right).$$

Из физических соображений $R = \eta + R_0 > 0$ выбираем +.

Линеаризация

Используя разложение в ряд Тейлора, сместив решение на особую точку приходим к линеаризованной системе $\dot{x}' = Ax$, где $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T$, A – матрица линеаризации системы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -F'_0(x_0^*) & -F_1(x_0^*) & -\beta_2 & -\beta_3 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы имеет вид

$$k^4 + \beta_3 k^3 + \beta_2 k^2 + F_1(x_0^*)k + F'_0(x_0^*) = 0.$$

Устойчивость нелинейного ОДУ

Утверждение

При выполнении следующих неравенств

$$\begin{aligned}\beta_3 &> 0, \quad F_1(x_0^*) > 0, \\ \beta_2\beta_3 F_1(x_0^*) - \beta_3^2 F'_0(x_0^*) - F_1^2(x_0^*) &> 0.\end{aligned}$$

решение нелинейного ОДУ

$$\eta''' + \beta_3\eta'' + \beta_2\eta'' + F_1(\eta)\eta' + F_0(\eta)\eta = 0$$

асимптотически устойчиво.

Численный эксперимент

Ищем решение **нелинейного ОДУ**

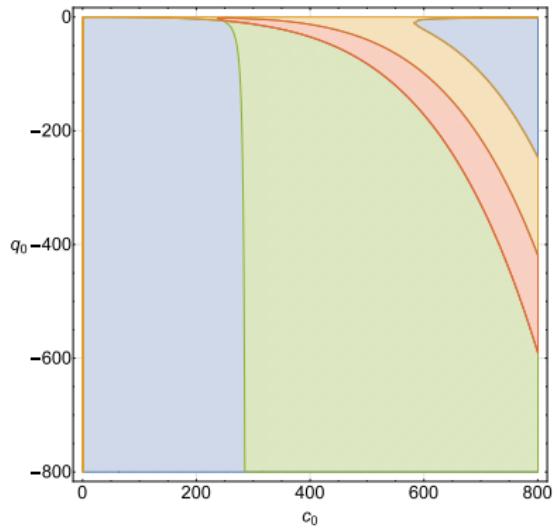
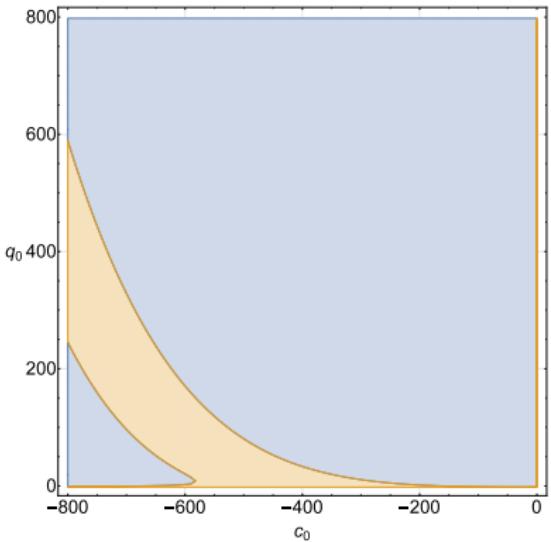
$$\eta''' + \beta_3 \eta'' + \beta_2 \eta'' + F_1(\eta) \eta' + F_0(\eta) \eta = 0.$$

Значения параметров выбираются для моделирования кровотока аорты из следующей таблицы

Параметр	Обозначение	Границы значений для сосуда
Радиус сосуда в состоянии покоя	R_0 (см)	0.6 – 1.2
Толщина стенки сосуда	h_0 (см)	0.1 – 0.2
Модуль Юнга	E (дин/см ²)	10^6 – 10^7
Коэффициент Пуассона	σ (-)	0.43 – 0.55
Плотность стенки	ρ_w (г/см ³)	1.1
Коэффициент вязкости стенки сосуда	C_v (дин·с/см ²)	12×10^3 – 240×10^3
Плотность крови	ρ (г/см ³)	1.05 – 1.06
Кинематическая вязкость	ν (см ² /с)	0.0282 – 0.0377
Коэффициент Кориолиса	α (-)	1 – 4/3
Среднее давление	P (дин/см ²)	50×10^3 – 270×10^3
Средняя скорость	\bar{u} (см/с)	20 – 50
Усредненный расход	$Q = \pi q$ (см ³ /с)	22 – 277

Таблица: общепринятые значения параметров

Карта режимов течения крови в сосуде (c_0, q_0)



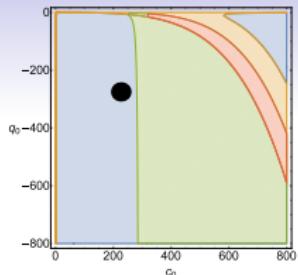
Решение, тип особой точки:

Голубое – неустойчивое, узло–фокус;

Зеленое – устойчивое, узло – фокус;

Красное – устойчивое, фокус – фокус;

Оранжевое – неустойчивое, фокус – фокус.

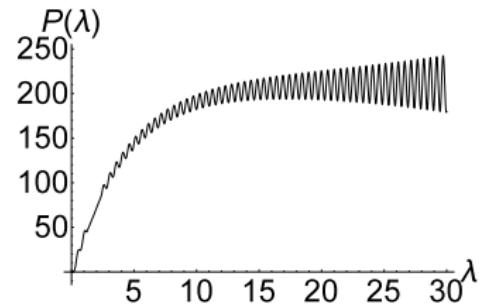
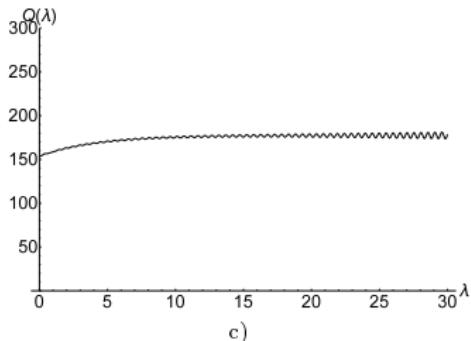
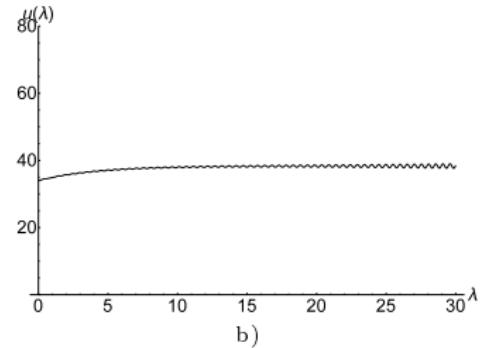
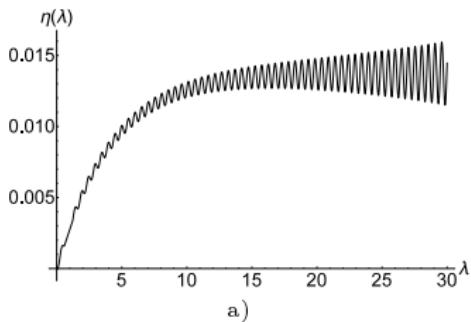


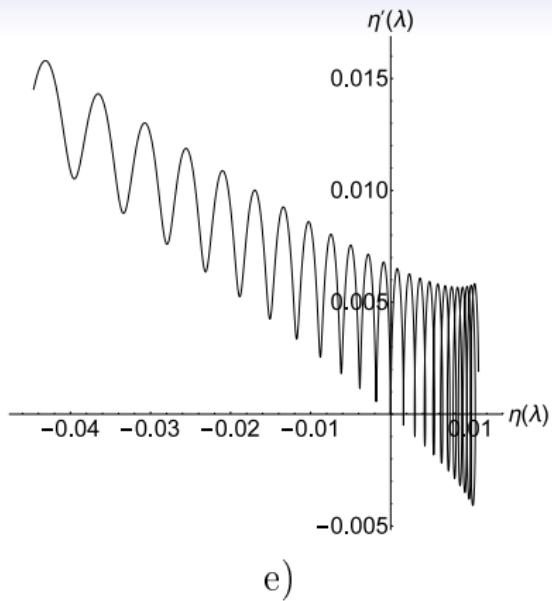
Значения параметров $c_0 = 225$, $q_0 = -275$.
 $\eta(0) = 0$, $\eta'(0) = 0$, $\eta''(0) = 0$, $\eta'''(0) = 0.5$.

Особая точка $x_0^* = -0.0944584$.

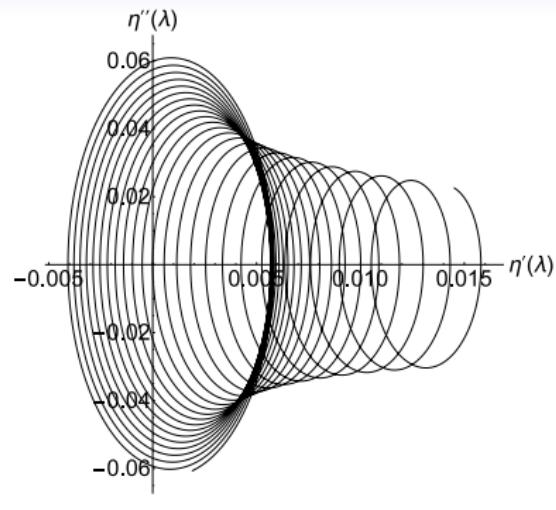
$$k_1 = -0.234012, \quad k_2 = -0.0000600973,$$

$$k_3 = 0.0673896 - 12.2627i, \quad k_4 = 0.0673896 + 12.2627i.$$





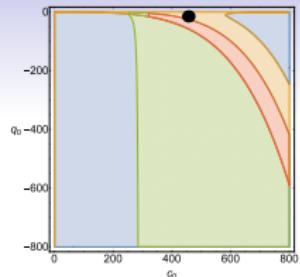
e)



f)

Рис.: Осциллирующее решение: а) интегральные кривые в плоскости $\mathbb{R}^2(x_0, x_1)$,
б) интегральные кривые в плоскости $\mathbb{R}^2(x_2, x_3)$.

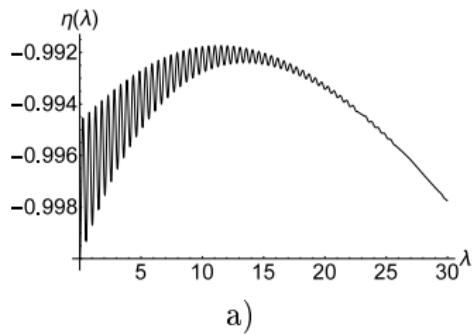
При малом изменении начальных данных или характеристик сосуда решение качественно не меняется.



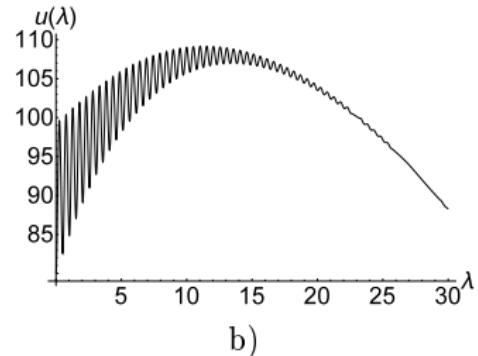
Значения параметров $c_0 = 455$, $q_0 = -15$.
 $\eta(0) = -1$, $\eta'(0) = 0$, $\eta''(0) = -0.4$, $\eta'''(0) = 0$.

Особая точка $x_0^* = -1.01843$.

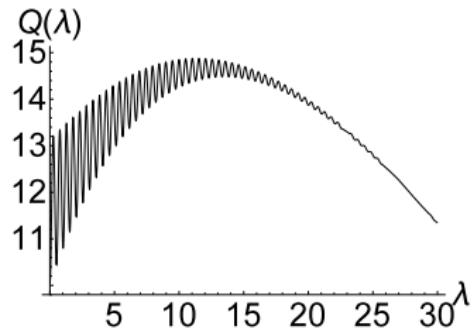
$k_1 = -0.212408 - 12.2603i$, $k_2 = -0.212408 + 12.2603i$,
 $k_3 = 0.017708 - 0.0534932i$, $k_4 = 0.01771 + 0.0534932i$.



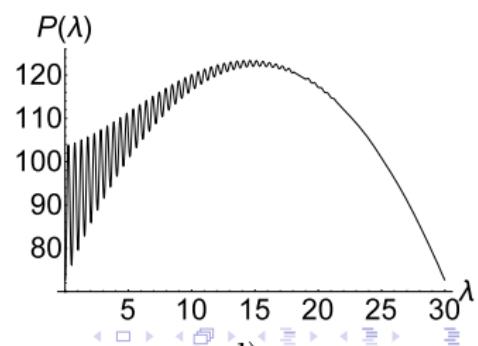
a)



b)

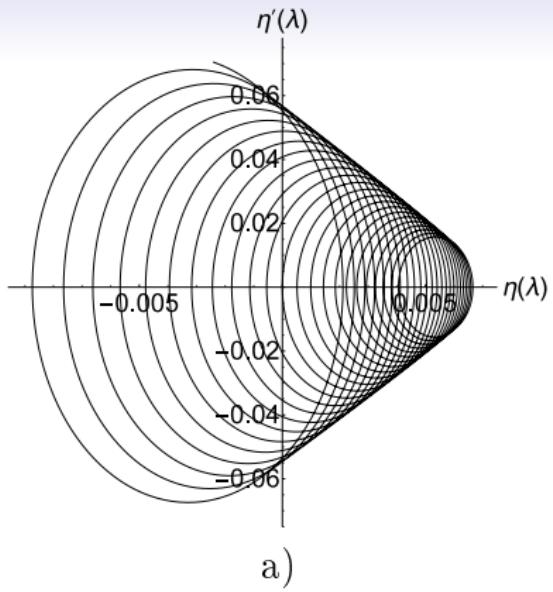


c)

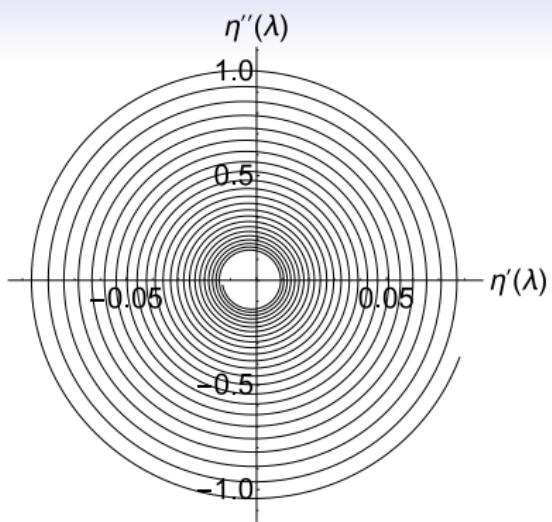


d)





a)

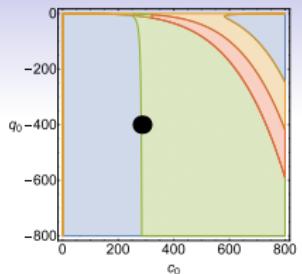


b)

Рис.: Осциллирующее решение: а) интегральные кривые в плоскости $\mathbb{R}^2(x_0, x_1)$,
б) интегральные кривые в плоскости $\mathbb{R}^2(x_2, x_3)$.

При малом изменении начальных данных решение не меняется.

При малом изменении характеристик сосуда решение претерпевает существенные изменения.

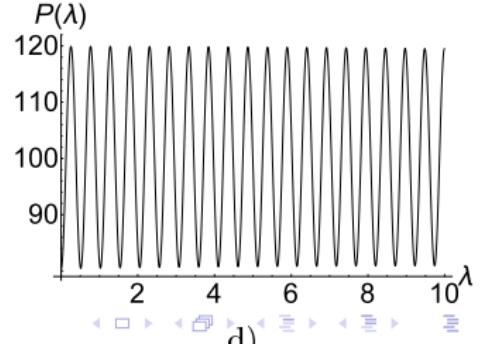
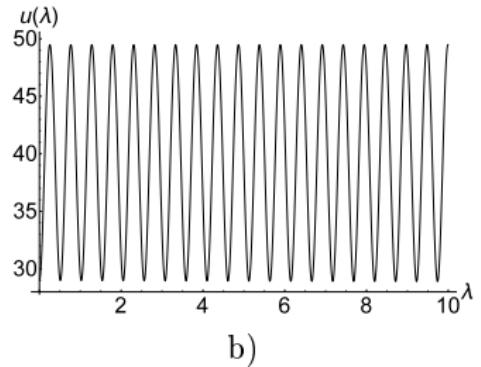
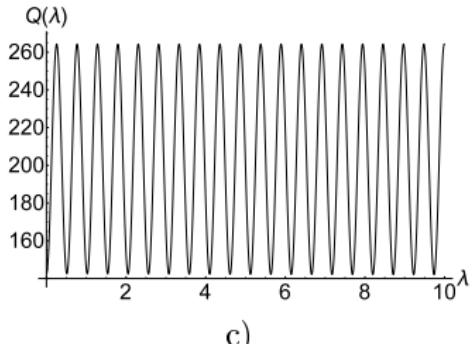
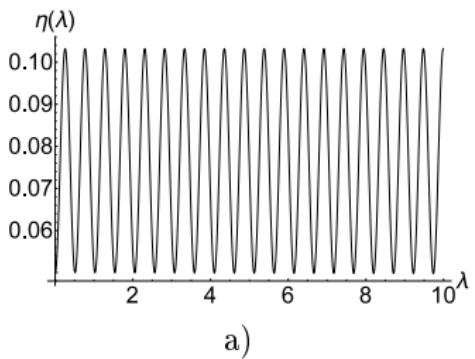


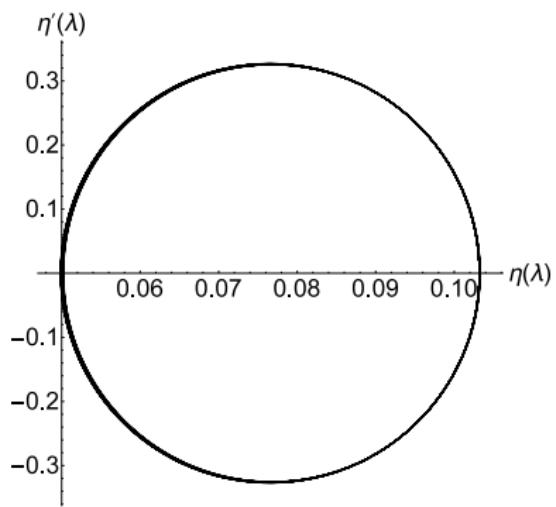
Значения параметров $c_0 = 285$, $q_0 = -400$.
 $\eta(0) = 0.05$, $\eta'(0) = 0$, $\eta''(0) = 4$, $\eta'''(0) = 0$

Особая точка $x_0^* = -0.0153022$.

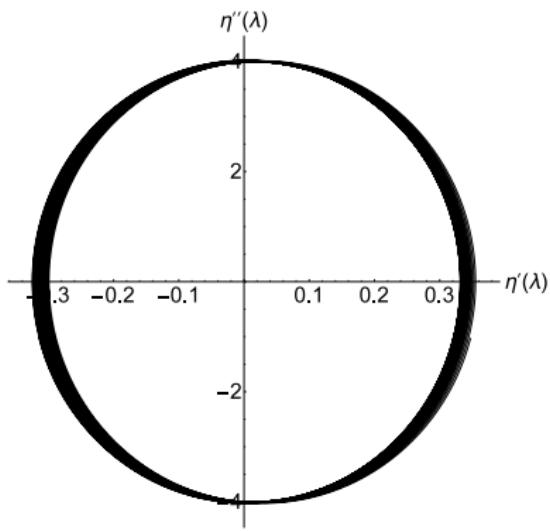
$$k_1 = -0.179748, \ k_2 = -0.0000635953,$$

$$k_3 = -0.002436 - 12.2616i, \quad k_4 = -0.002436 + 12.2616i.$$





a)



b)

Рис.: Осциллирующее решение: а) интегральные кривые в плоскости $\mathbb{R}^2(x_0, x_1)$,
б) интегральные кривые в плоскости $\mathbb{R}^2(x_2, x_3)$.

-  A. T. Il'ichev, V. A. Shargatov, Stability of an aneurysm in a membrane tube filled with an ideal fluid. *Theoret. and Math. Phys.* 211: 2 (2022), 642 - 652.
-  Quarteroni and L. Formaggia, Mathematical modelling and numerical simulation of the cardiovascular system. In *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. 12: Computational Models for the Human Body, Elsevier (2004), pp. 3–127.
-  Canich. S., Tambaca. J., Guidoboni. G., Mikelic. A., Hartlet. C.J., Rosenstrauch. D., Modeling viscoelastic behavior of arterial walls and their interaction with pulsating blood flow. *SIAM J. Appl. Math.* 2006; 67(1), 164–193.
-  Barlukova A.M., Cherevko A.A., Chupakhin A.P., Traveling waves in a one-dimensional model of hemodynamics. *J Appl Mech Tech Phy* 55, 917–926 (2014).

Спасибо за внимание!