

О методах построения определяющих соотношений для мягких тканей

Саламатова В.Ю.^{1,2,3}

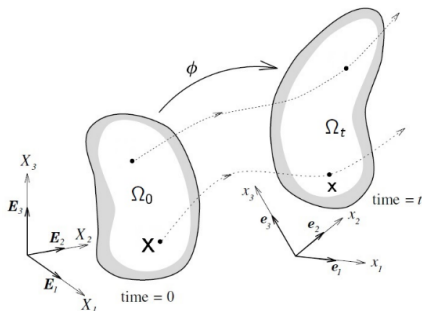
¹ИВМ РАН

²Сеченовский университет

³НТУ Сириус

Конференция по математическим моделям и численным методам в
биологии и медицине

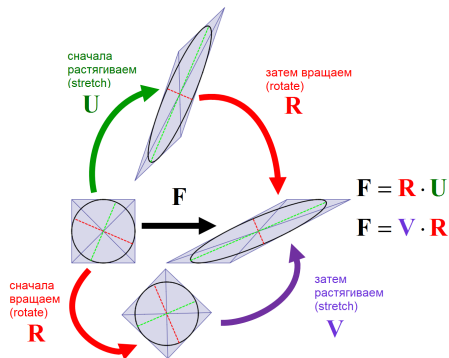




- $X \in \Omega_0$ - начальная конфигурация, $x \in \Omega_t$ - текущая конфигурация
- $x = \phi(X, t)$ - деформация
- $u = x - X$ - перемещение
- $\mathbb{F}$ - градиент деформации

$$\mathbb{F} = \frac{\partial \phi}{\partial X} = \mathbb{I} + \frac{\partial u}{\partial X}$$

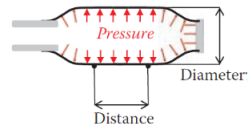
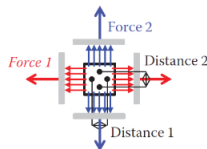
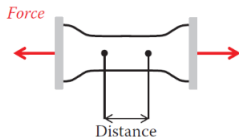
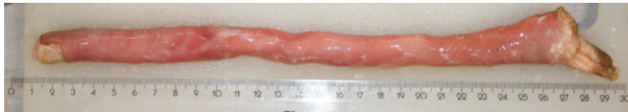
Меры деформации: полярное разложение



Изменение длин, углов: $\mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{U}^2$, $\mathbf{B} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{V}^2$.

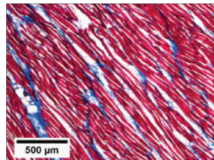
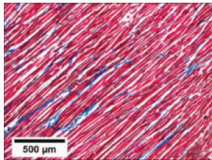
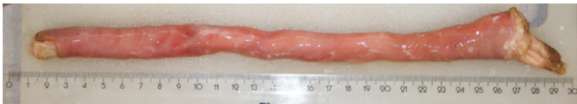
$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \sigma + \rho b = \rho \frac{d^2 u}{dt^2}, & x \in \Omega_t & \text{уравнения движения} \\ \frac{d\rho}{dt} = 0, & x \in \Omega_t & \text{несжимаемость} \\ \sigma = f(u, \dots) & & \text{определяющие соотношения} \\ u|_{\Gamma_u} = u^*, \quad \sigma n|_{\Gamma_\sigma} = T & & \text{граничные условия} \\ u|_{t=t_0} & & \text{начальные условия} \end{array} \right.$$

Экспериментальное исследование: макро¹



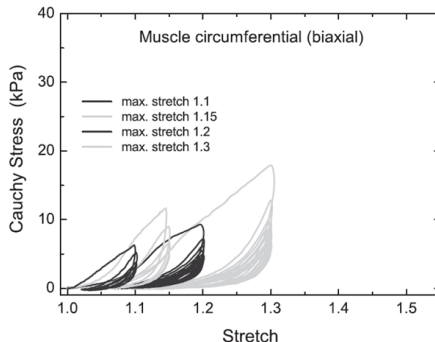
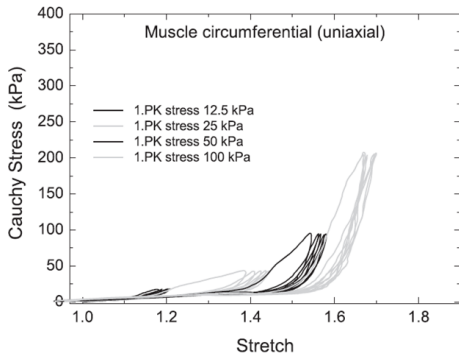
¹Sommer G. et al. Multiaxial mechanical response and constitutive modeling of esophageal tissues: impact on esophageal tissue engineering

Экспериментальное исследование: структура²



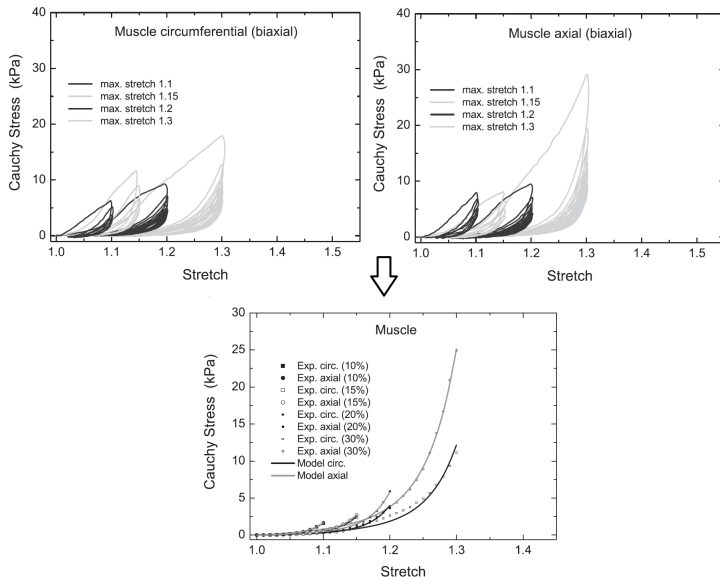
²Sommer G. et al. Multiaxial mechanical response and constitutive modeling of esophageal tissues: impact on esophageal tissue engineering

Кривые деформирования³



³Sommer G. et al. Multiaxial mechanical response and constitutive modeling of esophageal tissues: impact on esophageal tissue engineering

Кривые деформирования: что с ними делают⁴



Модель гиперупругого материала

- Существует упругий потенциал $\psi(\mathbb{F})$ такой, что тензор напряжений Коши имеет вид:

$$\sigma = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi(\mathbb{F})}{\partial \mathbb{F}} \mathbb{F}^T, \quad J = \det \mathbb{F}$$

- Потенциальная энергия U упругого тела:

$$U = \int_{\Omega_0} \psi(\mathbb{F}) d\Omega = \int_{\Omega_t} J^{-1} \psi(\mathbb{F}) d\Omega$$

- Не зависит от выбора системы отсчёта $\rightarrow \psi(\mathbb{F}) = \tilde{W}(\mathbb{F}^T \mathbb{F})^5$

⁵Ciarlet, P. Mathematical elasticity Vol. 1: Threedimensional elasticity. 1987.

Подходы к построению упругого потенциала

- ❶ **Феноменологический подход** Требует выбора феноменологической модели и подгонку параметров модели к данным экспериментов.

$$\psi(\mathbb{F}) = f(\mathbb{F}, a_1, \dots, a_n),$$

где f – известная функция, a_i – неизвестные скалярные параметры.

Достоинства: удобство для численной реализации; элегантные формулировки.

Недостатки: мало данных из независимых экспериментов, много параметров; несколько десятков видов потенциалов

Подходы к построению упругого потенциала

1 Феноменологический подход

2 Микроструктурный подход Суммируется вклад основных структурных компонентов.

$$\psi(\mathbb{F}) = \sum_{i=1}^N f_i \psi_i, \quad \psi_i = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \mathcal{R}_i(\theta) w_i(e) d\theta$$

f_i — объемная доля компонента, θ — ориентация волокна; $\mathcal{R}_i(\theta)$ — функция распределения θ ; $w_i(e)$ — функция энергии деформации одного волокна; e — деформация волокна.

Достоинства: учет микроструктуры; исследование напряженно-деформированного состояния микроструктуры;

Недостатки: сложность численных реализаций; необходимость экспериментальных данных о микроструктуре; нет взаимодействия волокон; механические свойства волокон.

Подходы к построению упругого потенциала

1 Феноменологический подход

2 Микроструктурный подход

3 Data-driven подход: Вид определяющего соотношения зависит от меры деформации:

- инварианты $\mathbb{C} = \mathbb{F}\mathbb{F}^T$: $I_1 = \text{tr}\mathbb{C}$, $I_2 = ((\text{tr}\mathbb{C})^2 - \text{tr}\mathbb{C}^2)/2$, $I_3 = \det \mathbb{C}$,
 $\psi = \tilde{\psi}(I_1, I_2, I_3)$, доп. инварианты для анизотропии
- $\mathbb{E} = (\mathbb{C} - \mathbb{I})/2$, $\psi = \hat{\psi}(\mathbb{E})$

$$\psi(\mathbb{F}) = f(\xi_1(\mathbb{F}), \dots, \xi_n(\mathbb{F})) \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{F}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbb{F}},$$

где f – неизвестная функция, $\xi_i(\mathbb{F})$ – заданные (известные) меры деформации, $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ – **функции отклика**, response functions

- меры, основанные на полярном разложении $\mathbb{F}$
- меры, основанные на верхнетреугольном разложении $\mathbb{F}$ (Laplace stretch)

Достоинства: использование full-field measurement; не надо априорного задавать вид потенциала

Недостатки: экстраполяция данных

- QR разложение $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{Q}^T \mathbb{F} = \tilde{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} \\ 0 & \tilde{F}_{22} \end{pmatrix}$$

- Разложение Холецкого $\mathbb{C} = \mathbb{F}^T \mathbb{F} = \tilde{\mathbb{F}}^T \tilde{\mathbb{F}}$:

$$\tilde{F}_{11} = \sqrt{C_{11}}, \quad \tilde{F}_{12} = \frac{C_{12}}{\tilde{F}_{11}}, \quad \tilde{F}_{22} = \sqrt{C_{22} - \tilde{F}_{12}^2}$$

- Мера деформации (Laplace stretch) :

$$\xi_1 = \ln \tilde{F}_{11}, \quad \xi_2 = \ln \tilde{F}_{22}, \quad \xi_3 = \frac{\tilde{F}_{12}}{\tilde{F}_{11}}.$$

- Гиперупругий материал, $\tilde{\sigma} = \mathbb{Q}^T \sigma \mathbb{Q}$:

$$\tilde{\sigma}_{11} = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1}, \quad \tilde{\sigma}_{22} = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}, \quad \tilde{\sigma}_{12} = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_3}$$

- Обработка эксперимента:

$$\begin{array}{c} (\mathbb{F}, \sigma) \\ \Downarrow \boxed{\mathbb{F} = \mathbb{Q} \tilde{\mathbb{F}}, \quad \tilde{\sigma} = \mathbb{Q}^T \sigma \mathbb{Q}} \\ (\tilde{\mathbb{F}}_{ij}, \tilde{\sigma}) \\ \Downarrow \\ \left(\xi_i, \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \right) \end{array}$$

Достаточность данных и виртуальный эксперимент

