

**СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЛОКАЛЬНЫХ ПО ВРЕМЕНИ И МЕСТОПОЛОЖЕНИЮ
КОНТАКТОВ ИНДИВИДУУМОВ
В ЭПИДЕМИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ**

Н.В. Перцев, В.А. Топчий, К.К. Логинов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

**Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН,
проект FWNF-2022-0003**

Москва, ИВМ РАН, 1–2 ноября 2022 г.

1. Введение.

Одна из ключевых проблем любой математической модели эпидемического процесса

- описание контактов восприимчивых и заразных индивидуумов, приводящих к появлению латентно-инфицированных индивидуумов.

ЦЕЛЬ настоящей работы: построение стохастической модели, описывающей локальные по времени и местоположению прямые и опосредованные контакты восприимчивых и заразных индивидуумов.

Модель строится на основе совмещения популяционного и индивидуум-ориентированного подходов.

2. Обозначения и постулаты модели.

W – объект, который посещают индивидуумы,

A_1 – когорта восприимчивых индивидуумов,

A_2 – когорта заразных индивидуумов,

$U_{\gamma_1, \gamma_2} = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2$ – совокупность индивидуумов,

состоящая из γ_1 индивидуумов когорты A_1 и γ_2 индивидуумов когорты A_2 , $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 \geq 1$,

т.е. совокупность может включать от одного до нескольких индивидуумов,

t – текущее время, $[0; T_{mod}]$ – промежуток моделирования,

$x_1(t)$, $x_2(t)$ – численность когорт индивидуумов A_1 , A_2 ,

$x_3(t)$ – количество совокупностей индивидуумов U_{γ_1, γ_2} .

ПОСТУЛАТЫ Н1, Н2 (приток и отток индивидуумов).

Н1. Поток совокупностей индивидуумов U_{γ_1, γ_2} на объект W задается пуассоновским процессом с интенсивностью $\rho > 0$.

Пара величин (γ_1, γ_2) – количество индивидуумов когорт A_1, A_2 в составе поступившей на объект W совокупности U_{γ_1, γ_2} задается распределением

$$q_{i,j} = P\{(\gamma_1, \gamma_2) = (i, j)\}, i, j = 0, 1, \dots, m, q_{0,0} = 0.$$

Индивидуумы могут поступать на объект W по одному или группами.

Н2. Длительность пребывания совокупности индивидуумов U_{γ_1, γ_2} на объекте W описывается случайной величиной $\omega_{\gamma_1, \gamma_2}$ с функцией распределения F_{γ_1, γ_2} , параметрически зависящей от γ_1, γ_2 .

Если индивидуумы поступили на объект W в составе некоторой группы, то они покидают объект все вместе в составе этой же группы.

ПОСТУЛАТ НЗ (прямые контакты индивидуумов).

Зафиксируем t и примем, что $x_1(t) = u_1$, $x_2(t) = u_2$ — целочисленные неотрицательные константы.

В течение промежутка времени $(t; t + h)$ с вероятностью $g(u_1, u_2)h + o(h)$ происходит контакт некоторой пары индивидуумов когорт A_1, A_2 ; указанный контакт не происходит с вероятностью $1 - g(u_1, u_2)h + o(h)$, $h \rightarrow +0$.

Вещественная функция $g(u_1, u_2) \geq 0$ от целочисленных аргументов $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$ задает интенсивность контактов индивидуумов когорт A_1, A_2 ,

- 1) $g(u_1, u_2)$ не убывает по u_1, u_2 ,
- 2) если $u_1 u_2 = 0$, то $g(u_1, u_2) = 0$.

3. Формализация модели и алгоритм моделирования.

Модель рассматривается в форме случайного процесса

$$Z(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), y_1(t), \nu(t), \Omega(t)), t \in [0; T_{mod}], \quad (1)$$

$y_1(t)$ – количество индивидуумов когорты A_1 , поступивших на объект W за промежуток $[0; t]$,

$\nu(t)$ – число контактов индивидуумов когорты A_1 с индивидуумами когорты A_2 за промежуток $[0; t]$,

$\Omega(t) = \left\{ (t_U^{(k)}, \omega_{\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}}^{(k)}), 1 \leq k \leq x_3(t) \right\}$ – семейство случайных величин, отражающее поступление в момент $t_U^{(k)}$ на объект W совокупности индивидуумов $U_{\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}}$, их пребывание на объекте длительностью $\omega_{\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}}^{(k)}$, такие, что

$$t_U^{(k)} \leq t < t_U^{(k)} + \omega_{\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq x_3(t). \quad (2)$$

Для каждого фиксированного $t_U^{(k)}$ распределения пары $(\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)})$ и величины $\omega_{\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}}^{(k)}$ задаются вероятностями $q_{i,j}$ и функцией F_{γ_1, γ_2} .

Для описания динамики $Z(t)$ используются соотношения:

$$t_0 = 0, Z(t_0) = Z^{(0)}, \quad (3)$$

$$t_{n+1} = \min\{t_n + \xi_n^{(1)}, t_n + \xi_n^{(2)}, \psi_n\}, \quad (4)$$

$$Z(t_{n+1}) = Z(t_n) + \Delta(Z(t_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$Z^{(0)}$ – неслучайный, заданный набор компонент изучаемого процесса,

$t_n + \xi_n^{(1)}$ – момент поступления очередной совокупности индивидуумов U_{γ_1, γ_2} ,
 $\xi_n^{(1)} \sim \text{Exp}(\rho)$,

$t_n + \xi_n^{(2)}$ – момент очередного контакта индивидуумов когорт A_1, A_2 между собой,
 $\xi_n^{(2)} \sim \text{Exp}(g(x_1(t_n), x_2(t_n)))$,

ψ_n – ближайший справа к t_n момент ухода с объекта W ранее поступившей совокупности индивидуумов U_{γ_1, γ_2} ,

$$\psi_n = \min \left\{ t_U^{(k)} + \omega_{\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}}^{(k)}, (t_U^{(k)}, \omega_{\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}}^{(k)}) \in \Omega(t_n) \right\},$$

$\Delta(Z(t_n))$ – набор случайных приращений компонент $Z(t_n)$, законы изменения которых зависят от величин, входящих в (3), (4).

Соотношения (3)–(5) применяются для моделирования реализаций $Z(t)$ с помощью метода Монте–Карло.

4. Вычислительный эксперимент.

- Изучалось математическое ожидание

$$E_{\nu/y_1} = E\left(\frac{\nu(T_{mod})}{y_1(T_{mod})}\right), \quad (6)$$

случайной величины

$$\frac{\nu(T_{mod})}{y_1(T_{mod})}, \quad (7)$$

отражающей число контактов индивидуумов когорт A_1 , A_2 в расчете на одного индивидуума когорты A_1 за период времени $[0; T_{mod}]$, при условии $y_1(T_{mod}) > 0$, $T_{mod} = 24$ часа.

При проведении вычислений использована функция

$$g(u_1, u_2) = \frac{g_0 u_1 u_2}{1 + u_1 + u_2}, \quad g_0 = const > 0. \quad (8)$$

Рассматривались совокупности U_{γ_1, γ_2} для следующих пар:

$$P\{(\gamma_1, \gamma_2) = (i, j)\} = q_{i,j} \geq 0, \quad i, j = 0, 1, 2, 3, \quad q_{0,0} = 0,$$

$$\sum_{i,j=0}^3 q_{i,j} = 1. \quad (9)$$

Вероятности $q_{i,j}$ в (9) варьировались для пяти вариантов.

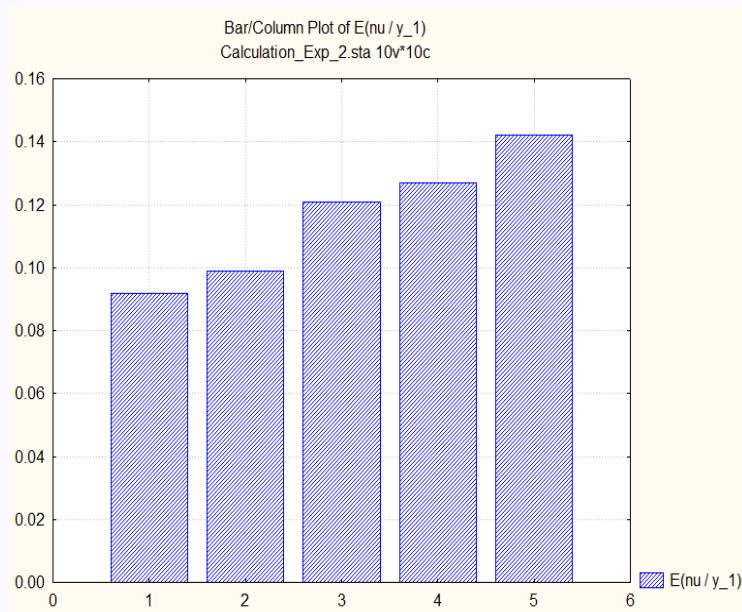
Использовано равномерное распределение F_{γ_1, γ_2} величины $\omega_{\gamma_1, \gamma_2}$ на промежутке $[0; \hat{\omega}_{\gamma_1, \gamma_2}]$. Константы $\hat{\omega}_{\gamma_1, \gamma_2}$ таковы:

$$\hat{\omega}_{1,0} = \hat{\omega}_{0,1} = 1, \quad \hat{\omega}_{2,0} = \hat{\omega}_{0,2} = \hat{\omega}_{1,1} = 1.5 \text{ (час)},$$

$$\hat{\omega}_{2,1} = \hat{\omega}_{1,2} = 2, \quad \hat{\omega}_{2,2} = \hat{\omega}_{1,3} = \hat{\omega}_{3,1} = 2.5 \text{ (час)}. \quad (10)$$

Точечные и интервальные оценки математического ожидания E_{ν/y_1} находились по выборкам объемом $N = 1000$.

На рисунке представлены точечные оценки $\bar{E}_{\nu/y_1}$ для пяти вариантов состава совокупностей индивидуумов U_{γ_1, γ_2} , поступающих на объект W . Стандартная ошибка точечных оценок $\bar{E}_{\nu/y_1}$ во всех вариантах не превосходит 0.00027.



Интерпретация. Если совокупность U_{γ_1, γ_2} включает три–четыре индивидуума и среди них имеется хотя бы один заразный индивидуум (варианты 3, 4, 5), то заразного индивидуума можно рассматривать как супер-распространителя инфекции.

5. Некоторое развитие модели.

5.1. Учет неоднородности когорт индивидуумов по интенсивности контактов с другими индивидуумами.

Пусть когорты A_1, A_2 представлены когортами

$$A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}, \quad (11)$$

индивидуумы которых являются умеренно активными – $A_{1,1}, A_{2,1}$ и высоко активными – $A_{1,2}, A_{2,2}$ с точки зрения контактов между собой.

Численности когорт (11) обозначим через

$$x_{1,1}(t), x_{1,2}(t), x_{2,1}(t), x_{2,2}(t).$$

Зафиксируем t и численности когорт (11):

$$x_{1,i}(t) = u_{1,i} \geq 0, x_{2,j}(t) = u_{2,j} \geq 0, i, j = 1, 2.$$

Положим: $u_1 = u_{1,1} + u_{1,2}, u_2 = u_{2,1} + u_{2,2}.$

Интенсивность контактов индивидуумов зададим так:

$$\hat{g}(u_{1,1}, u_{1,2}, u_{2,1}, u_{2,2}) = \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 r_{i,j} u_{1,i} u_{2,j}}{1 + u_1 + u_2},$$

где $r_{i,j} > 0$ – константы, такие, что $r_{1,1} < r_{1,2} = r_{2,1} < r_{2,2}$.

Если принять, что $r_{2,2} \leq g_0$ или $r_{1,1} \geq g_0$, то соответственно

$$\hat{g}(u_{1,1}, u_{1,2}, u_{2,1}, u_{2,2}) \leq g(u_1, u_2) = \frac{g_0 u_1 u_2}{1 + u_1 + u_2},$$

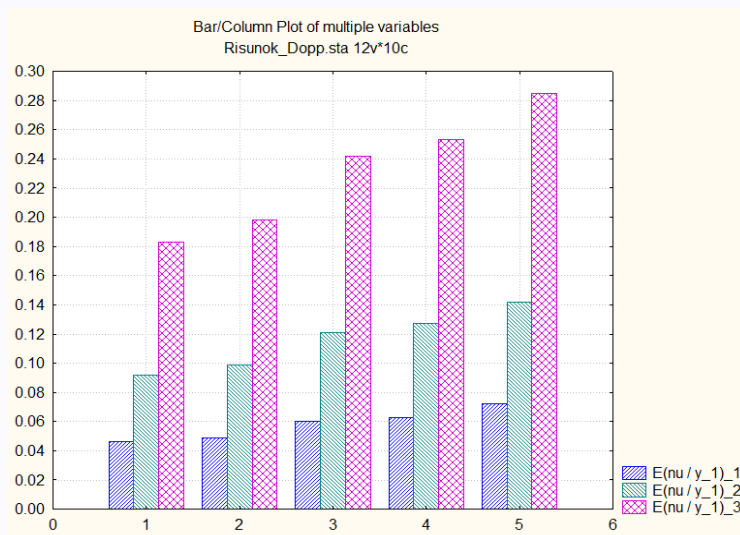
$$\hat{g}(u_{1,1}, u_{1,2}, u_{2,1}, u_{2,2}) \geq g(u_1, u_2) = \frac{g_0 u_1 u_2}{1 + u_1 + u_2}.$$

Следовательно, результаты моделирования для однородных когорт A_1 , A_2 можно рассматривать как верхнюю или нижнюю оценки E_{ν/y_1} , не привлекая прямые вычисления в модели, включающей когорты $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $A_{2,1}$, $A_{2,2}$.

● Продолжение вычислительного эксперимента.

Пусть, как и ранее, $g(u_1, u_2) = g_0 u_1 u_2 / (1 + u_1 + u_2)$.

На рисунке представлены точечные оценки $\bar{E}_{\nu/y_1}$ для пяти вариантов состава совокупностей индивидуумов U_{γ_1, γ_2} , поступающих на объект W , и значений $g_0 = 0.15, 0.3, 0.6$ (час⁻¹). Стандартная ошибка точечных оценок $\bar{E}_{\nu/y_1}$ в зависимости от g_0 не превосходит 0.00018, 0.00027, 0.00039.



Интерпретация. Представлены возможные верхние и нижние оценки E_{ν/y_1} для модели, включающей набор когорт $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}$.

5.2. Учет опосредованных контактов индивидуумов.

● Обозначим: C – зараженная вирусными частицами поверхность общедоступных мест объекта W , возникающая при оседании воздушно-капельной смеси, выделяемой индивидуумами когорты A_2 ,

$c(s)$ – площадь C в момент времени $s \in [0; T_{mod}]$.

Примем, что для фиксированного $[t; t + \xi) \subset [0; T_{mod}]$ функция $c(s)$ является решением задачи Коши

$$c(t) = c_t, \quad \frac{dc(s)}{ds} = \sigma u_2 - \lambda c(s), \quad s \in [t; t + \xi), \quad (12)$$

константа $\sigma > 0$ – скорость увеличения площади поверхности C в расчете на одного заразного индивидуума,

константа u_2 – фиксированная численность индивидуумов когорты A_2 ,

константа $\lambda > 0$ – интенсивность уменьшения площади поверхности C за счет естественной гибели находящихся там вирусных частиц,

c_t – заданная константа.

Пусть в момент времени $t + \xi$ проводится мгновенная санитарная обработка общедоступных мест объекта W . Тогда

$$c(t + \xi) = (1 - \delta)\hat{c}(t + \xi), \quad (13)$$

$$\hat{c}(t + \xi) = \lim_{s \rightarrow t + \xi - 0} c(s), \quad (14)$$

где $c(s)$ – решение задачи (12), константа $0 < \delta < 1$ – доля поверхности C , уменьшаемой при однократной санитарной обработке.

Пусть в момент времени $t + \xi$ произошел контакт индивидуума когорты A_1 или A_2 с поверхностью C (интенсивность контакта $\beta = \text{const} > 0$). Тогда

$$c(t + \xi) = \max\{0, \hat{c}(t + \xi) - \varphi\}, \quad (15)$$

константа $\varphi > 0$ – средняя площадь ладони индивидуума, например, 150 см^2 .

Вероятность контакта индивидуума когорты A_1 с поверхностью C в момент времени $t + \xi$ равна $u_1/(u_1 + u_2)$.

Если $\hat{c}(t + \xi) \geq \varphi_*$, то контакт индивидуума когорты A_1 с поверхностью C может приводить к его инфицированию,

$0 < \varphi_* < \varphi$ – пороговое значение, например, $\varphi_* = 0.25 \varphi$.

Введем математическое ожидание

$$E_{\mu/y_1} = E\left(\frac{\mu(T_{mod})}{y_1(T_{mod})}\right) \quad (16)$$

случайной величины $\frac{\mu(T_{mod})}{y_1(T_{mod})}$, отражающей число контактов индивидуумов когорты A_1 с поверхностью C в расчете на одного индивидуума когорты A_1 за период времени $[0; T_{mod}]$, при условии $y_1(T_{mod}) > 0$.

Пусть p_{ν/y_1} , p_{μ/y_1} – вероятности инфицирования восприимчивого индивидуума при контакте с заразным индивидуумом и с зараженной вирусами поверхностью. Тогда, если

$$p_{\nu/y_1} E_{\nu/y_1} \approx p_{\mu/y_1} E_{\mu/y_1}, \quad (17)$$

то прямые и опосредованные контакты индивидуумов в среднем дают сопоставимый вклад в формирование когорты новых инфицированных индивидуумов.

Список публикаций.

1. Перцев Н.В., Логинов К.К., Топчий В.А. Анализ стадия-зависимой модели эпидемии, построенной на основе немарковского случайного процесса // Сиб. журн. инд. мат. 2020. Т. 23, № 3. С. 105–122.
2. Логинов К.К., Перцев Н.В. Прямое статистическое моделирование распространения эпидемии на основе стадия-зависимой стохастической модели // Мат. биология и биоинформатика. 2021. Т. 16, № 2. С. 169–200.
3. Перцев Н.В., Логинов К.К., Лукашев А.Н., Вакуленко Ю.А. Стохастическое моделирование динамики распространения Ковид-19 с учетом неоднородности населения по иммунологическим, клиническим и эпидемиологическим критериям // Мат. биология и биоинформатика. 2022. Т. 17, № 1. С. 43–81.
4. Перцев Н.В., Топчий В.А., Логинов К.К. Численное стохастическое моделирование динамики взаимодействующих популяций // Сиб. журн. инд. мат. 2022. Т. 25, № 3. С. 135–153.
5. Перцев Н.В., Пичугин Б.Ю., Логинов К.К. Статистическое моделирование динамики популяций, развивающихся в условиях воздействия токсичных веществ // Сиб. журн. инд. мат. 2011. Т. 14. № 2. С. 84–94.
6. Перцев Н.В., Логинов К.К. Стохастическая модель динамики биологического сообщества в условиях потребления особями вредных пищевых ресурсов // Мат. биология и биоинформатика. 2011. Т. 6. № 1. С. 1–13.