

Исследование устойчивости течения вязкой жидкости над двухслойным податливым покрытием

Александр Чупахин, ИГиЛ СО РАН, НГУ

Андрей Бойко, ИТПМ СО РАН

При участии А.Э.Даржаина (НГУ) и В.М.Кулика (ИТ СО РАН)

Введение

В работе исследуется устойчивость течения вязкой несжимаемой жидкости в приближении пограничного слоя Блазиуса над двухслойным податливым покрытием конечной толщины.

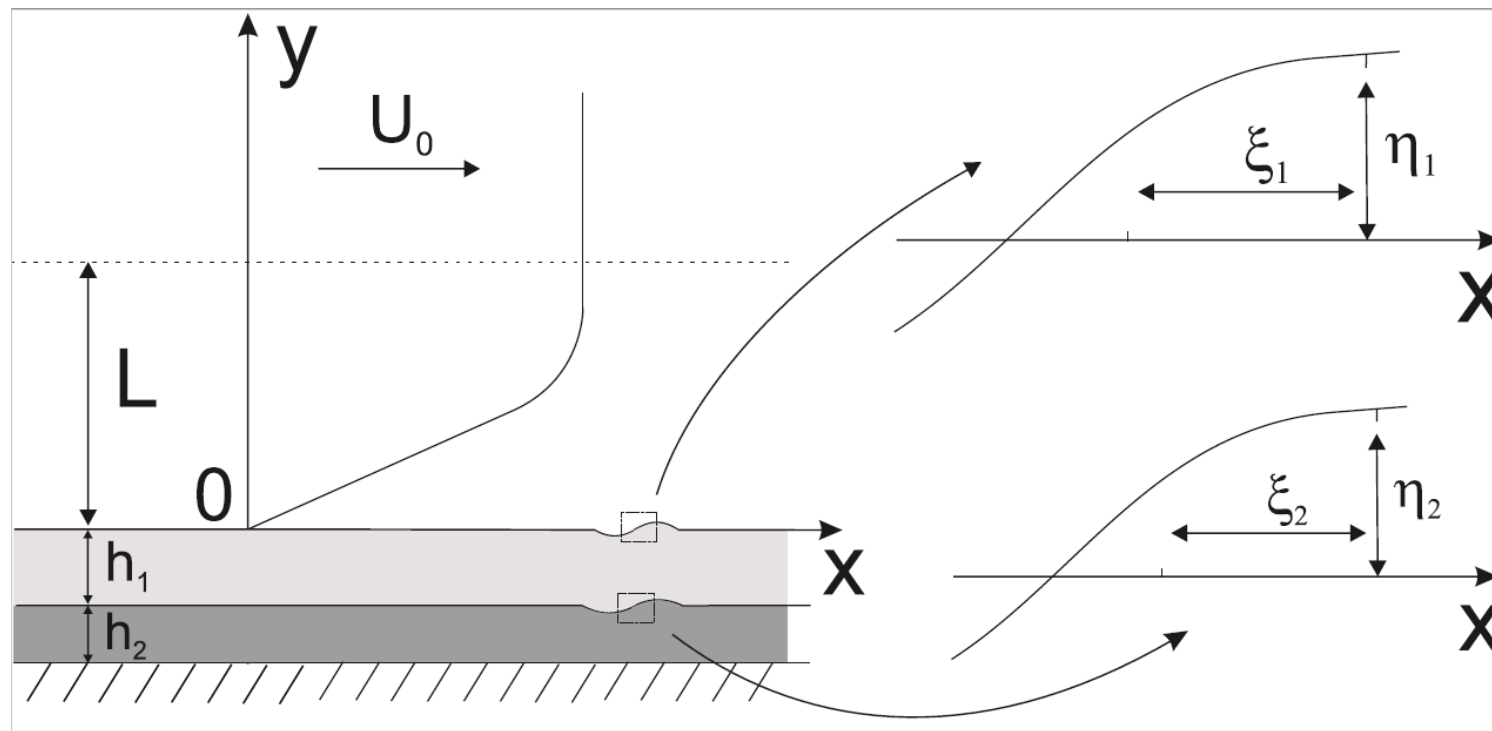
Практические задачи:

- Уменьшение турбулентного трения
- Динамика крови в кровеносных сосудах, стенки которых имеют многослойную структуру.

Исследования устойчивости с податливыми стенками интенсивно проводятся в последнее время.

Зависимости параметров (модуль упругости, коэффициент Пуассона, коэффициент потерь) от частот для реальных покрытий были экспериментально получены только в 2011 г. (Бойко А.В., Кулик В.М.).

Постановка задачи



Особенности:

- Развитие возмущений вниз по потоку
- Большое количество определяющих параметров (плотности покрытий, скорость внешнего потока, вязкоупругие параметры, толщина покрытий)
- Малые гармонические возмущения
- Предполагается, что решение можно представить в виде бегущих волн

Вязкоупругие покрытия

Модель Кельвина – Фойгта:

$$\tau = E\varepsilon(t) + d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

τ – деформация, E – модуль упругости, ε – напряжение,
 d – вязкость.

Рассматриваем гармонические возмущения $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-i\omega t}$,
 $\frac{\tau}{\varepsilon} = E(1 - i\mu)$, $\mu = \frac{\omega d}{E}$ – коэффициент потерь, ω – круговая частота.

Эмпирические зависимости $E(\omega)$, $\mu(\omega)$ взяты для реальных покрытий
из экспериментальных расчетов (В.М. Кулик, 2019г)

Нижний слой – пористая резина Пента 740:

$$E = 0.0385 \cdot \log f + 0.0987 \text{ МПа}, \quad \mu = 0.15, \quad \rho = 600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

Коэффициент Пуассона $\sigma_k = 0.47$

Верхний слой – резина Пента 710:

$$E = 0.1004 \cdot \log f + 0.0511 \text{ МПа},$$

$$\mu = 0.0016 \cdot \log f + 0.0511, \quad \rho = 1120 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Коэффициент Пуассона $\sigma_k = 0.47$ f – частота, диапазон от 50 Гц до 2.5 кГц

Гидродинамические уравнения

Уравнения Навье – Стокса.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta U,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

где x и y — продольная и поперечная к покрытию декартовы координаты, (U, V) — продольная и поперечная к покрытию компоненты скорости потока, P — давление, ρ_f — плотность жидкости, ν — кинематическая вязкость жидкости, Δ — двумерный оператор Лапласа.

Линеаризация

Предполагаем квазипараллельность линий тока – на периоде волны U меняется мало по оси x , V меняется мало. Пограничный слой

Блазиуса:

$$\tilde{U} = U + u, \quad \tilde{V} = V + v, \quad \tilde{P} = P + p,$$

Малые возмущения:

U, V, P – решение уравнений Н. – С., которое описывает пограничный слой.

После линеаризации уравнения Н. – С. примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta U, & \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V, & \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

Обезразмеривание

Вводя характерные масштабы длины L и скорости U_0 , обезразмерим переменные.

$$x = Lx', y = Ly', u = U_0u', v = U_0v', p = \rho_f U_0^2 p'$$

В дальнейшем используем те же обозначения для безразмерных переменных, что и в размерных (без штрихов).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, & \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, & \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

$\text{Re} = LU_0/\nu$ — число Рейнольдса

Линейные уравнения движения возмущений в вязкоупругой среде

Уравнения Навье для малых возмущений:

$$\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t^2} = C_{Tk}^2 \left(\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial y^2} \right) + (C_{Tk}^2 - C_{Lk}^2) \left(\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x \partial y} \right), \quad k = 1, 2.$$

$$\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial t^2} = C_{Tk}^2 \left(\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial y^2} \right) + (C_{Tk}^2 - C_{Lk}^2) \left(\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x \partial y} \right), \quad k = 1, 2.$$

k – номер слоя, 1 – верхний слой,
2 – нижний слой

ξ_k, η_k – деформации в k – ом слое

$$C_{Tk}^2 = \frac{E_k^*}{2\rho_k(1 + \sigma_k)}, \quad C_{Lk}^2 = \frac{E_k^*}{\rho_k} \cdot \frac{1 - \sigma_k}{(1 + \sigma_k)(1 - 2\sigma_k)}, \quad E_k^* = E_k(1 - i\mu_k)$$

Скорость распространения продольных возмущений в неограниченной среде
 Скорость распространения поперечных возмущений в неограниченной среде
 Плотность
 Коэффициент Пуассона
 Модуль упругости
 Коэффициент потерь

Возмущения в потоке

Возмущения в потоке ищем в классе бегущих волн:

$$(u, v, p, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)^T(x, y, t) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{\xi}_1, \hat{\eta}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\eta}_2)^T(y) e^{i(\alpha x - \omega t)}$$

ω – частота, α – продольное волновое число.

Мнимая часть α определяет скорость нарастания ($Im(\alpha) < 0$) или затухания ($Im(\alpha) > 0$) возмущений вниз по потоку.

Система ОДУ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t^2} = C_{Tk}^2 \left(\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial y^2} \right) + (C_{Tk}^2 - C_{Lk}^2) \left(\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x \partial y} \right), \quad k = 1, 2.$$

$$\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial t^2} = C_{Tk}^2 \left(\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial y^2} \right) + (C_{Tk}^2 - C_{Lk}^2) \left(\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x \partial y} \right), \quad k = 1, 2.$$

$$i(\alpha U - \omega) \hat{u} + U' \hat{v} + i\alpha \hat{p} - \frac{1}{\text{Re}} (\hat{u}'' - \alpha^2 \hat{u}) = 0,$$

$$i(\alpha U - \omega) \hat{v} + \hat{p}' - \frac{1}{\text{Re}} (\hat{v}'' - \alpha^2 \hat{v}) = 0,$$

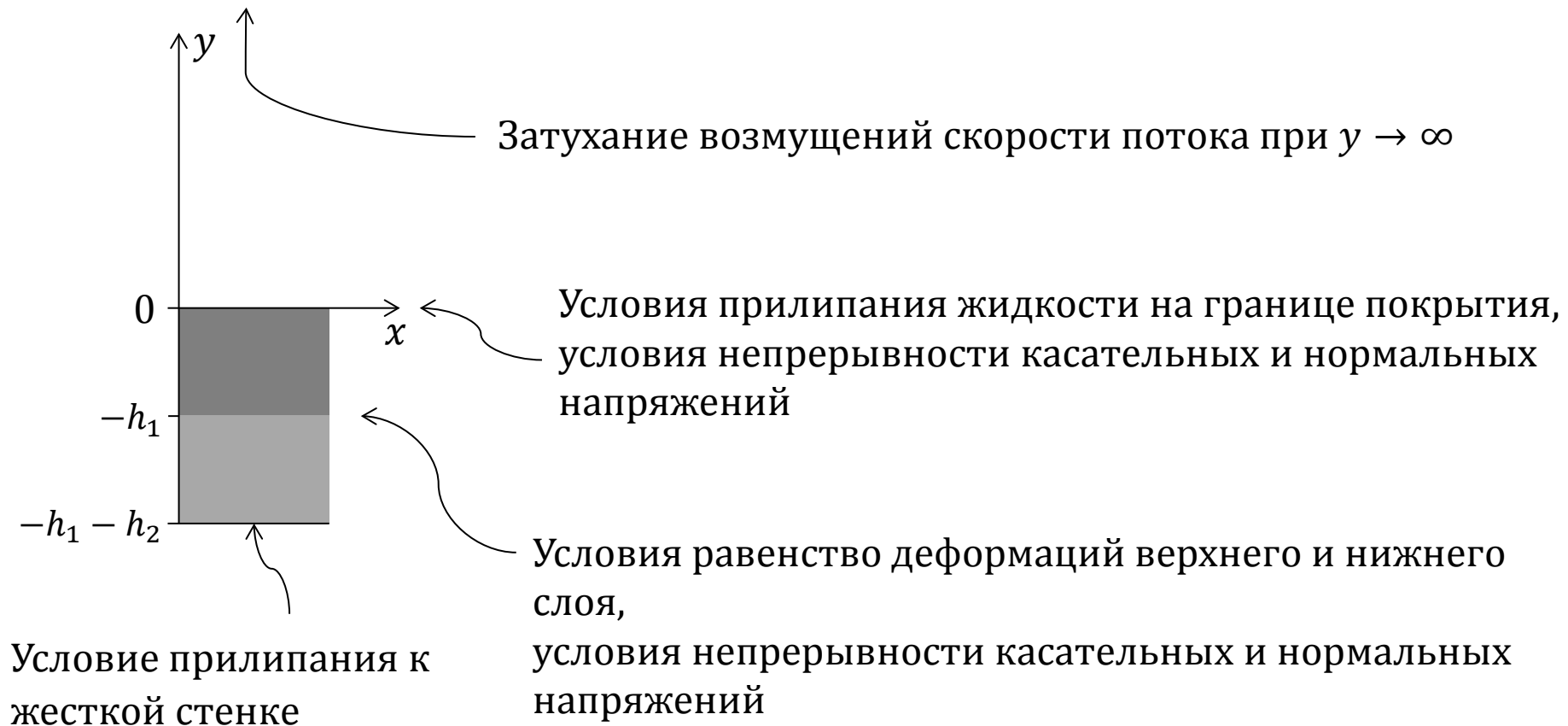
$$i\alpha \hat{u} + \hat{v}' = 0,$$

$$\omega^2 \hat{\xi}_k + C_{Tk}^2 (-\alpha^2 \hat{\xi}_k + \hat{\xi}_k'') + (C_{Lk}^2 - C_{Tk}^2) (-\alpha^2 \hat{\xi}_k + i\alpha \hat{\eta}_k') = 0,$$

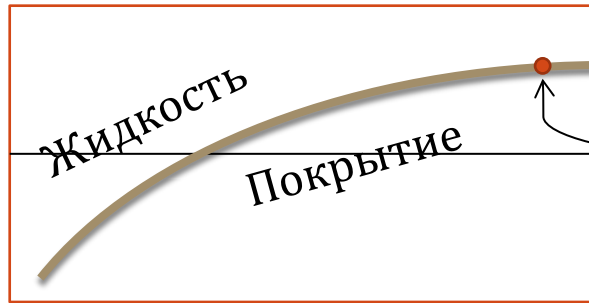
$$\omega^2 \hat{\eta}_k + C_{Tk}^2 (-\alpha^2 \hat{\eta}_k + \hat{\eta}_k'') + (C_{Lk}^2 - C_{Tk}^2) (\hat{\eta}_k'' + i\alpha \hat{\xi}_k') = 0,$$

Штрихи – дифференцирование по y .

Граничные условия



Пример: Условие прилипания на границе между жидкостью и покрытием



$(x + \xi_1, \eta_1, t)$

$$\left. \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \right|_{(x,0)} = \tilde{U}(x + \xi_1, \eta_1, t),$$

$$\left. \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \right|_{(x,0)} = \tilde{V}(x + \xi_1, \eta_1, t)$$

$$\tilde{U} = U + u, \quad \tilde{V} = V + v$$

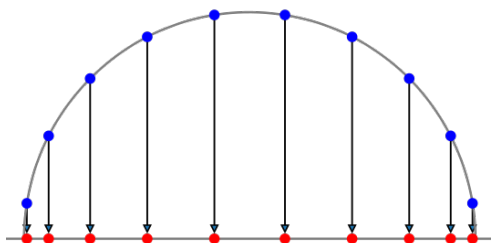
$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \tilde{U}(x, 0, t) + \xi_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}(x, 0, t) + \eta_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y}(x, 0, t) + \dots \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial t} = \tilde{V}(x, 0, t) + \xi_1 \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x}(x, 0, t) + \eta_1 \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y}(x, 0, t) + \dots \end{cases}$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = u + \eta_1 U', \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial t} = v \quad \longrightarrow \quad -i\omega \hat{\xi}_1 = \hat{u} + \eta_1 U', \quad -i\omega \hat{\eta}_1 = \hat{v}.$$

Численный метод

Метод коллокаций.

Узлы интерполяции – корни полиномов Чебышева второго рода:



$$\zeta_j = \cos(\pi j / (N - 1)), \quad j = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Базисные функции – многочлены Лагранжа:

$$h_i(\zeta) = \prod_{j=0, j \neq i}^{N-1} \frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta_i - \zeta_j}, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1,$$

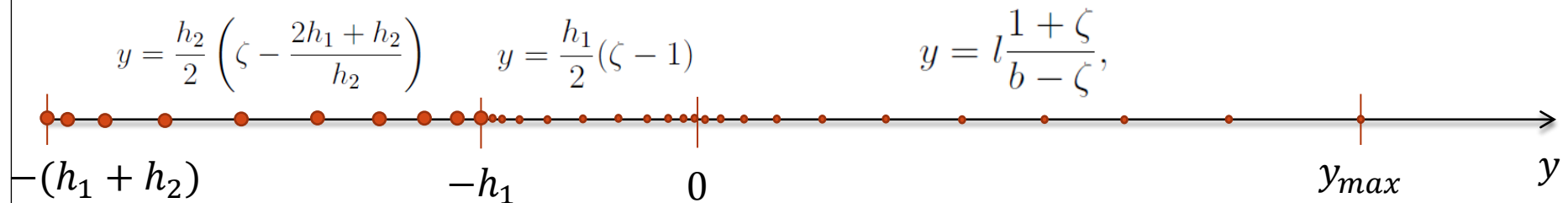
Произвольная функция:

$$\phi_N(\zeta) = \sum_{i=0}^{N-1} \phi(\zeta_i) h_i(\zeta). \quad \longrightarrow \quad \phi'_N(\zeta_j) = \sum_{i=0}^{N-1} h'_i(\zeta_j) \phi(\zeta_i) = \sum_{i=0}^{N-1} d_{ji} \phi(\zeta_i),$$

Элементы d_{ij} формируют матрицу производных

Численный метод

Три отрезка $[-1,1]$ отображаются на физическую область, занятую потоком и слоями покрытия:



l – масштабный множитель, b – константа, необходимая для контроля распределения узлов дискретизации

Количество узлов: поток – 60, верхний слой – 20, нижний слой – 40.

$$y_{max} = 20.$$

Основной поток U – решение уравнения Блазиуса:

$$\Phi'''(y) + \Phi\Phi''(y) = 0, \quad \Phi(0) = \Phi'(0) = 0, \quad \Phi(\infty) = 1, \quad \text{где } \Phi' = U.$$

Спектральная задача

После дискретизации системы ОДУ, получим нелинейную обобщенную спектральную задачу:

$$(\alpha^2 A + \alpha B + C)\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}^T = (u, v, p, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$$

A, B, C – матрицы размера $7N \times 7N$.

N – общее количество точек в покрытии и в потоке

Задача сводится к линейной спектральной задаче, путем введения вспомогательных переменных: $\tilde{v} = \alpha v, \tilde{\xi}_k = \alpha \xi_k, \tilde{\eta}_k = \alpha \eta_k$.

$$F\mathbf{s} = \alpha G\mathbf{s}, \quad \mathbf{s}^T = (u, v, p, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \tilde{v}, \tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\eta}_2)$$

F, G – матрицы размера $12N \times 12N$.

Решение находится с помощью QZ – алгоритма в среде MATLAB.

Из спектра выбирается ведущая мода (дискретная мода, с минимальной мнимой частью). Она определяет возрастание или затухание возмущений

Преимущества и недостатки метода

- Преимущества:
 - a. Высокая плотность точек вблизи границ, что важно при больших перепадах скоростей, давления и пр.
 - b. Экспоненциальная сходимость с увеличением числа узлов
 - c. Позволяет избегать таких явлений, как феномен Рунге
- Недостатки:
 - a. Не работает с разрывными функциями
 - b. Матрицы – плотные, требует больших вычислительных ресурсов для матрицы больших размерностей.

Определяющие параметры

Гидродинамические параметры:

Скорость внешнего потока

$$U_0 \sim 10 - 15 \text{ м/с}$$

Кинематическая вязкость

$$\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$$

Плотность жидкости

$$\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$$

Геометрические параметры:

Толщина вытеснения

пограничного слоя

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_0}\right) dy$$

Толщина покрытия

$$h_1 = 0.1 - 1 \text{ мм}, h_2 = 1.5 - 2 \text{ мм.}$$

Параметры покрытия:

Модуль упругости E_k

Коэффициент Пуассона σ_k

Коэффициент потерь μ_k

Плотность покрытия

$$\rho_1 = 1120 \text{ кг/м}^3, \rho_2 = 600 \text{ кг/м}^3$$

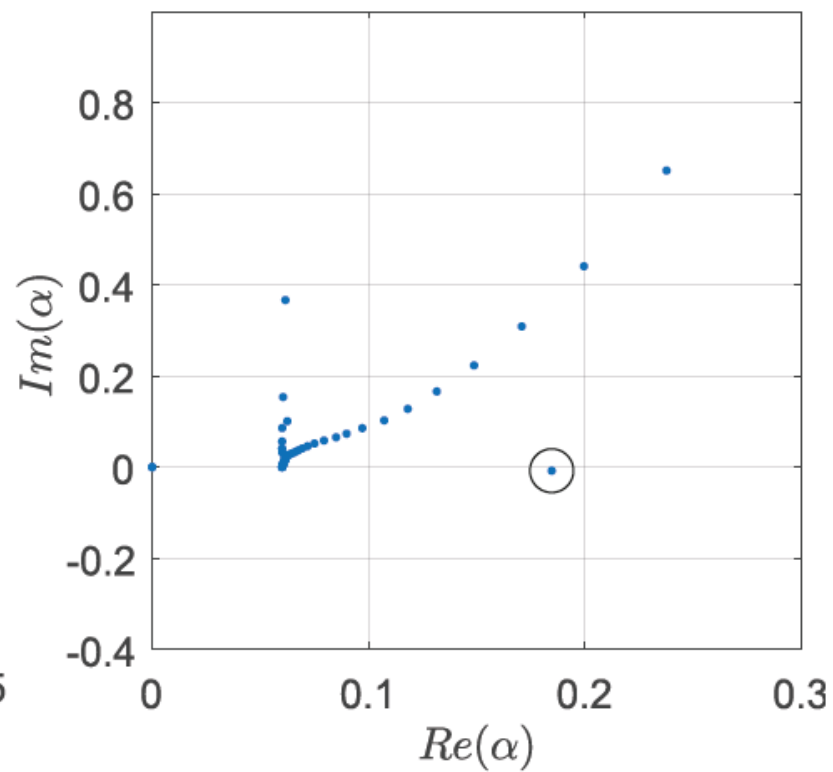
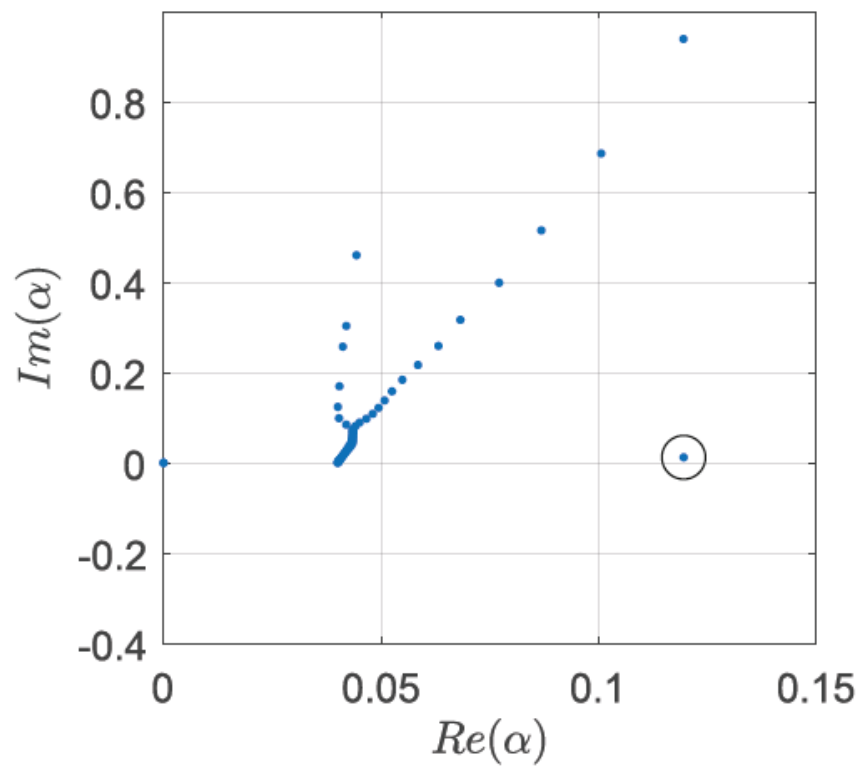
Параметры возмущений:

Частота $f \sim 30 - 1000 \text{ Гц}$,

Безразмерная круговая частота: $\omega = 2\pi f \frac{\delta^*}{U_0}$

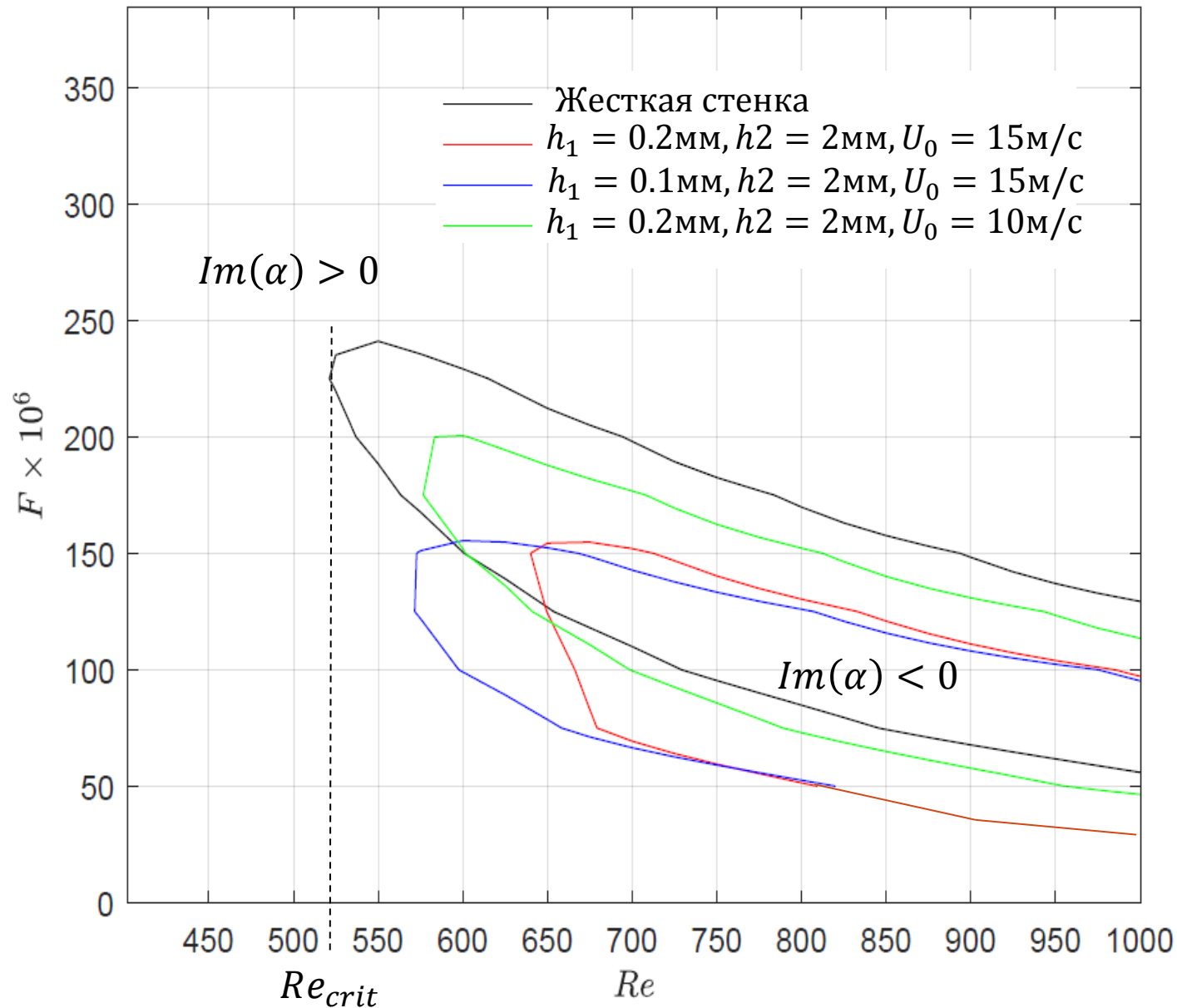
$$\text{Число Рейнольдса: } Re = \frac{\delta^* U_0}{\nu} \sim 200 - 1000$$

Спектр



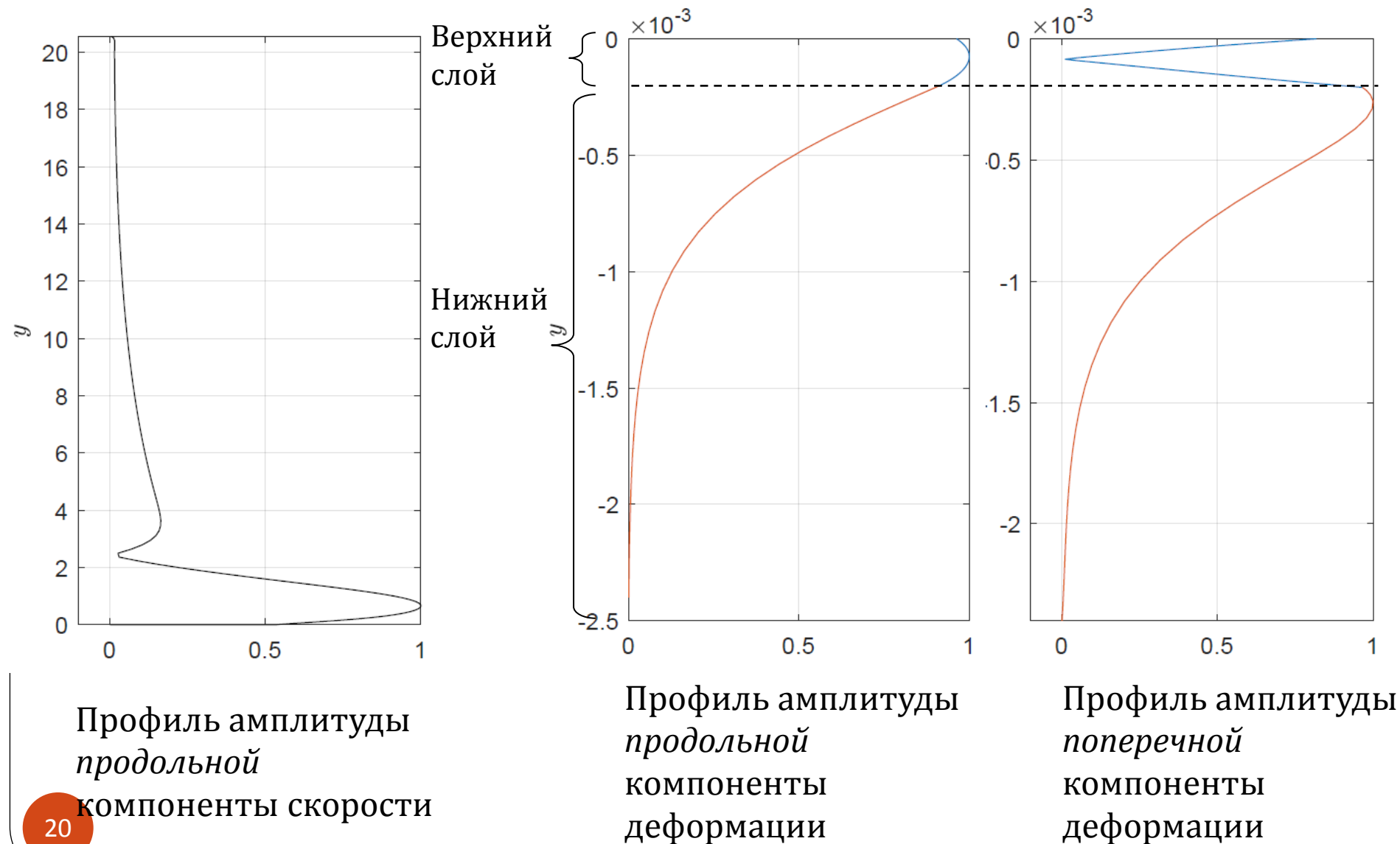
Кривые нейтральной устойчивости

$$F = \frac{\omega}{Re}$$

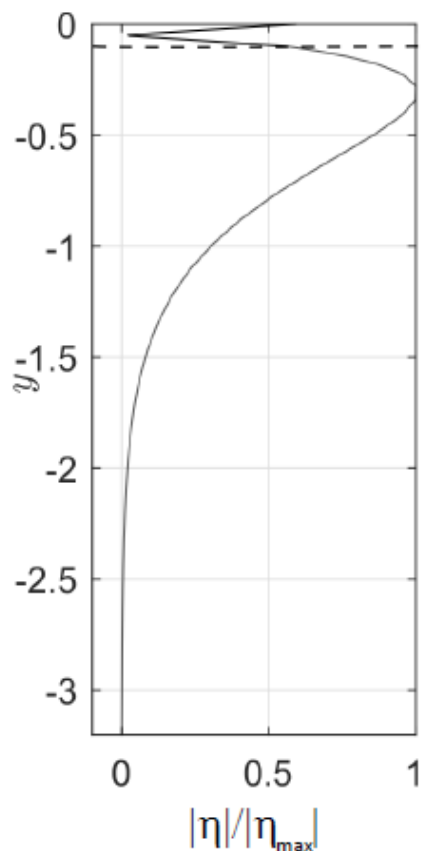


Профили амплитуды для ведущей моды, соответствующей неустойчивому течению

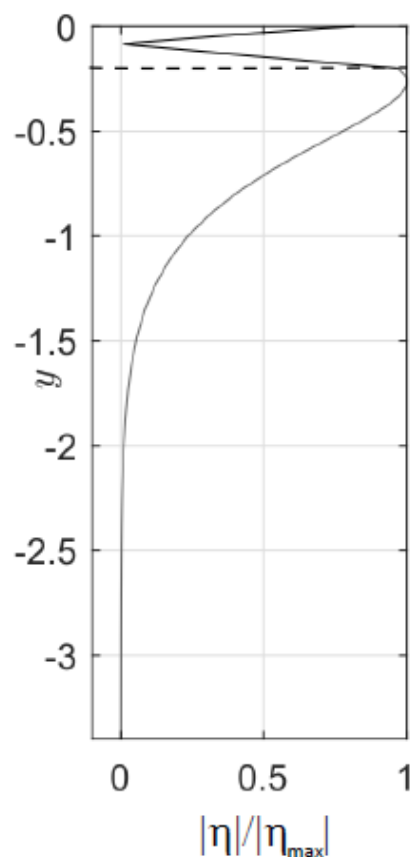
$$h_1 = 0.15\text{мм}, h_2 = 2\text{мм}$$
$$Re = 630, \omega = 0.07$$



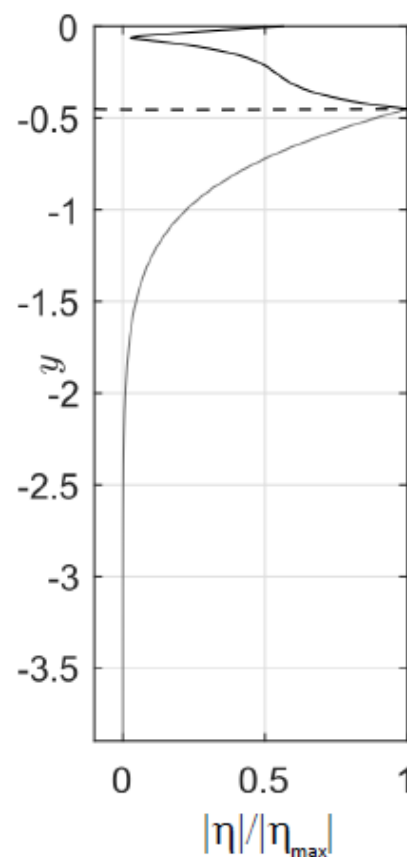
Профили амплитуды поперечной компоненты деформации



$$h_1 = 0.1 \text{ мм}$$



$$h_1 = 0.2 \text{ мм}$$



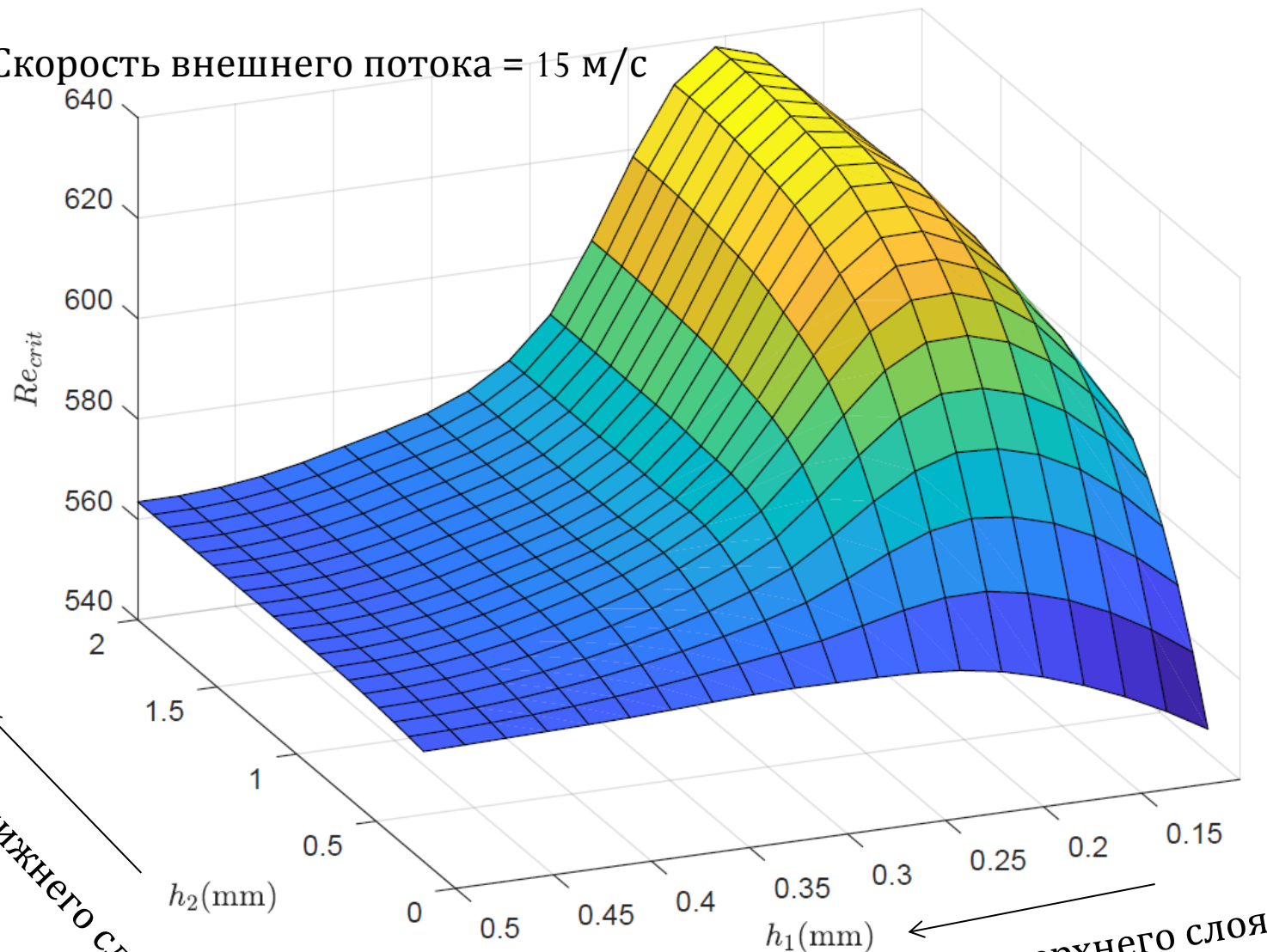
$$h_1 = 0.45 \text{ мм}$$

$$h_2 = 3 \text{ мм}, U_0 = 15 \text{ м/с.}$$

Критическое число Рейнольдса Re_{crit}

Зависимость критического Re от толщины верхнего и нижнего слоя

Скорость внешнего потока = 15 м/с

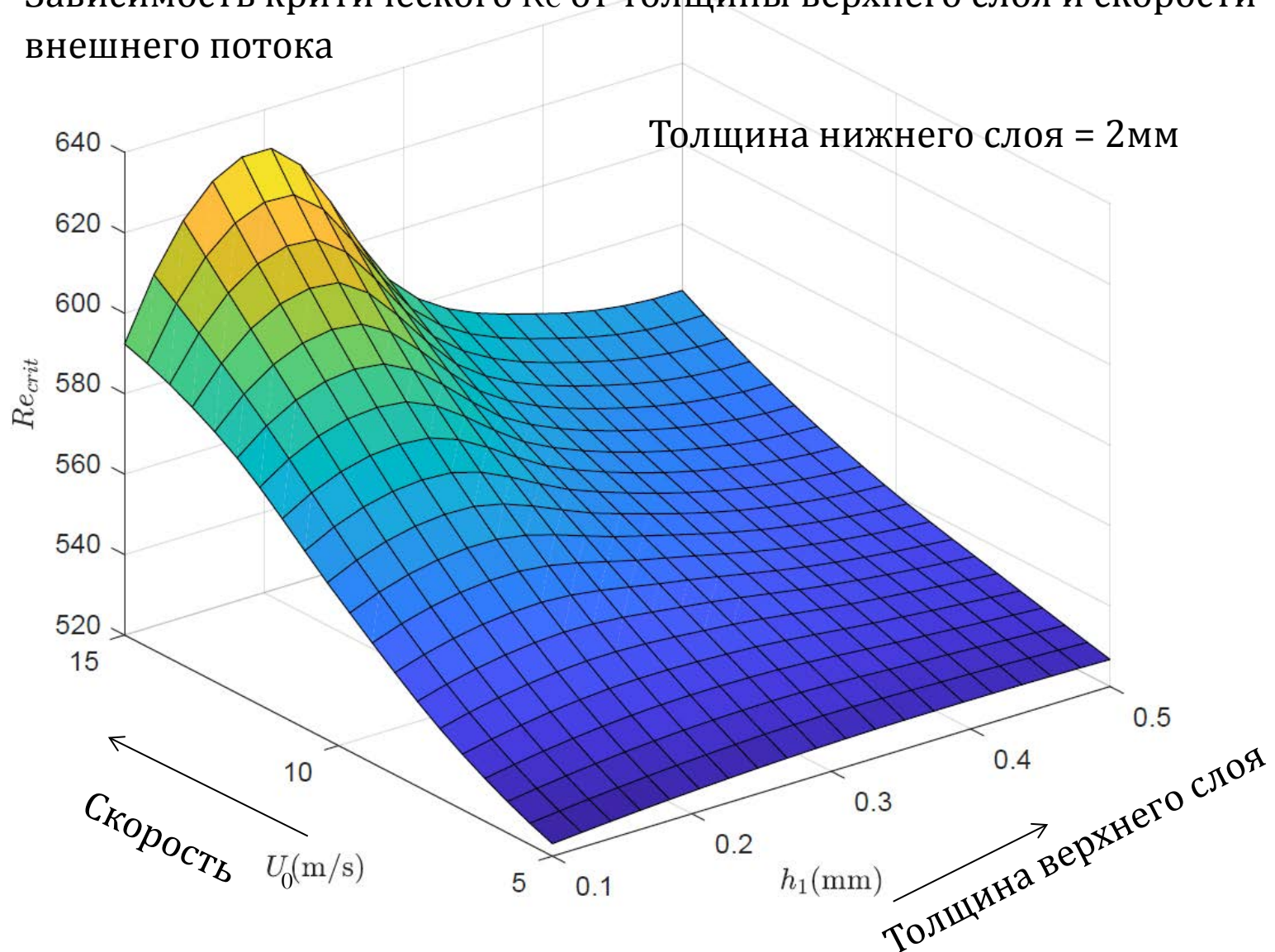


Толщина нижнего слоя

Толщина верхнего слоя

Критическое число Рейнольдса Re_{crit}

Зависимость критического Re от толщины верхнего слоя и скорости внешнего потока



Выводы

- Исследована устойчивость в линейной постановке пограничного слоя Блазиуса над двухслойным податливым покрытием. Расчет ведется для экспериментальных данных реальных вязкоупругих покрытий
- Выполнены параметрические исследования влияния толщин слоев и скорости потока на устойчивость-критическое число Рейнольдса (Yeо K.S. 1988г., Бойко А.В., Кулик В.М. 2011г.)
- Расчеты показывают:
 - для широкого класса материалов покрытий существуют области не монотонности Re_{crit} в зависимости от толщины верхнего покрытия,
 - увеличение скорости внешнего потока оказывает существенное влияние на Re_{crit} ,
 - эффекты связанные с податливостью перестают зависеть от толщины нижнего слоя при увеличении ее от 2мм. Для заданных пар материалов можно определять параметры оптимального “сэндвича”
 - Публикации: ПМТФ.2019 ,59 (4) ; Т и А2020 (27), 2