В.Н. Разжевайкин

Индикаторы устойчивости сильно разреженных матриц

$n \times n$ матрица $A = \left(a_{ij}\right)$,
$a_{ij} \geq 0$

Решаемые задачи

1. Построение биологического потенциала популяции. Содержательный смысл – среднее число потомков у одной особи. Пример – модель Лесли [1]

2. Построение функционалов отбора в задачах эволюционной оптимальности, см. [2, 3].

Индикаторы устойчивости

M_n – множество вещественных $n \times n$ матриц $A = \left(a_{ij}\right)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\mathsf{M}_n^+ = \{A \in \mathsf{M}_n : A \geq 0\}$, $I = \left(\delta_{ij}\right)$ – единичная матрица, $\sigma(A)$ – спектр матрицы $A \in \mathsf{M}_n$, $n = \dim A$, $r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ – спектральный радиус,

$P(\lambda, A) = \mathrm{det}(\lambda I - A)$ – характеристический полином, $\|\cdot\|$ – норма (вектора, оператора).

Две функции $f_{1,2} : \Omega \to \mathrm{M}_{n_{1,2}}$ с одной и той же областью определения Ω *r-эквивалентны*, если $\forall \omega \in \Omega$

$$\mathrm{sign}\ (r\,(f_1\,(\omega)) - 1) = \mathrm{sign}\ (r\,(f_2\,(\omega)) - 1)\,.$$

В случае $n_2 = 1$ функцию f_2, r-эквивалентную функции f_1 с областью определения Ω, назовем ее *индикатором устойчивости* (или матрицы f_1 на Ω).

Теорема 1. (см., например, [4]). Тождественная функция $f_k : A_k \to A_k \in \mathsf{M}_k^+$, $A_k = \left(a_{ij}^k\right)$, с областью определения

$$\mathsf{M}_k^+ \cap \left\{A_k : a_{kk}^k < 1\right\}$$

r-эквивалентна функции $f_{k-1} : A_k \to A_{k-1} \in \mathsf{M}_{k-1}^+$ с $A_{k-1} = \left(a_{ij}^{k-1}\right) \in \mathsf{M}_{k-1}^+$ и

$$a_{ij}^{k-1} = a_{ij}^k + \frac{a_{ik}^k a_{kj}^k}{1 - a_{kk}^k}. \qquad (1)$$

$$A_k = \left(\begin{array}{ccccc} \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots \\ \cdots & a_{ij}^k & \cdots & | & a_{ik}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots \\ -- & -- & -- & -|- & -- \\ \cdots & a_{kj}^k & \cdots & | & a_{kk}^k \end{array} \right).$$

$$A = A_n \to A_{n-1} \to \ldots \to A_1 = \left(a^1_{11}\right).$$

Возможные препятствия

1. Очередное $a^k_{kk} > 1 \Rightarrow$
$r(A_k) > 1 \Rightarrow r(A_n) > 1$.

2. Очередное
$a^k_{kk} = 1 \& \exists i < k : a^k_{ii} \neq 1$.
Подходящей перенумерацией
в A_k, переводится в нижний
правый угол.

В случае $a^k_{ii} < 1$ –
продолжение процедуры

В случае $a_{ii}^k > 1$ выполнения условия теоремы.

3. Все $a_{ii}^k = 1$, $i \leq k$. Два варианта.

3.1. Существует неразложимая главная подматрица $J \subseteq A_k$ $\dim A_k > 1$. Тогда $r(A_k) \geq r(J) > 1$, $r(A_n) > 1$.

3.2. Перенумерацией в A_k можно привести ее к треугольному виду с единицами на главной диагонали. $r(A_k) = 1$, $r(A_n) = 1$.

Разреженные матрицы

Из (1) из $a_{ik}^{k} a_{kj}^{k} = 0$ следует $a_{ij}^{k-1} = a_{ij}^{k}$, т.е. на $(n-k+1)$-м шаге элемент на (i,j)-й позиции, не меняется.

S_k - число ненулевых элементов матрицы A_k,

$p_k = \frac{S_k}{k^2} \leq 1$ – доля таковых, т.е. вероятность того, что $a_{ij}^{k} > 0$ для позиции (i,j).

$$S_{k-1} = S_k - p_k\,(2k-1) + p_k\,(k-1)\,R_k, \tag{2}$$

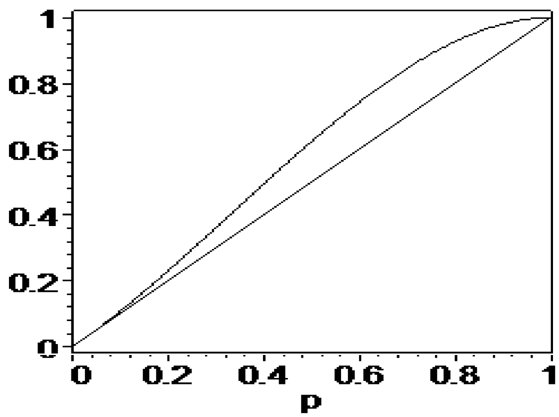
$R_k = p_k\,(k-1)\,q_k$, $q_k = 1 - p_k$. Сомножитель $p_k\,(k-1)$ – это число ненулевых недиагональных элементов последней строки матрицы A_k, т.е. $a^k_{kj} > 0$ с $j < k$.

То же для последнего столбца матрицы A_k, т.е. $a^k_{ik} > 0$ с $i < k$, в R_k, q_k – вероятность того, что на этом же месте в матрице A_k стоял нулевой элемент.

Собирая выражения в (2), находим

$$p_{k-1} = p_k + p_k^2 \left(1 - p_k\right). \quad (3)$$

Функция $f(p) = p + p^2\,(1-p)$



Итерационная процедура (3)
с $p_n \in (0,1)$ дает
$p_n < p_{n-1} < \ldots < p_{n-i} < \ldots < 1,$

Оценка числа итераций для выхода последовательности на значения порядка единицы для сильно разреженных матриц.

$S_n \approx (1+\varepsilon)\,n$, $p_n \approx \frac{1+\varepsilon}{n}$.
Аппроксимируя при малых p_k дискретную последовательность (3) решением ДУ $\frac{dP}{dt} = P^2$ с $P(t) = p_k$ при $t = n-k$, находим $P(t) = \frac{1}{T-t}$ для некоторого T.

Начальное условие $P(0) = p_n$. $T \approx \frac{n}{1+\varepsilon}$ – время выхода решения ДУ на бесконечность. Число итераций в (3) для выхода на значения порядка единицы. В случае $\varepsilon \ll 1$ получим $T \approx n\,(1-\varepsilon)$. К моменту заполнения матрицы A_k, ее размер сократится до $k \approx \varepsilon n$.

Число арифметических операций для вычисления индикатора устойчивости по формулам (1), оценивается для матрицы размера k величиной $\frac{4}{3}k^3$. Поправка на время на этапе достижения заполнения матрицы в случае использования специальных алгоритмов для разреженных матриц, исчезающе мала при $n \to \infty$. Например, при $p = \frac{1+\varepsilon}{n}$ для $\varepsilon \ll 1 \ll n$ поправка не превышает $\sim O(n^2)$. Реальное время для вычисления индикатора оценивается величиной $C\,(\varepsilon n)^3 + O(n^2)$ с C порядка единицы.

Список литературы

1. *P. H. Leslie.* On the use of matrices in certain population mathematics// Biometrica. V. 33, 1945. P. 183–212.
2. *В. Н. Разжевайкин.* Функционалы отбора в автономных моделях биологических систем с непрерывной возрастной и пространственной структурой// Ж. Вычисл. Матем. и Математич. Физ. Т. 50, № 2, 2010. С. 338–346.
3. *В. Н. Разжевайкин.* Анализ моделей динамики популяций. М., МФТИ, 2010. 174 с.
4. *В. Н. Разжевайкин, Е. Е. Тыртышников.* О построении индикаторов устойчивости неотрицательных матриц// Математические заметки. Т. 109, № 3, 2021. С. 407–418.