

# Моделирование деформации гиперупругой мембраны в случае таблично заданных определяющих соотношений

Легкий А.А.<sup>1,2</sup>  
Саламатова В.Ю.<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>МФТИ(ГУ)

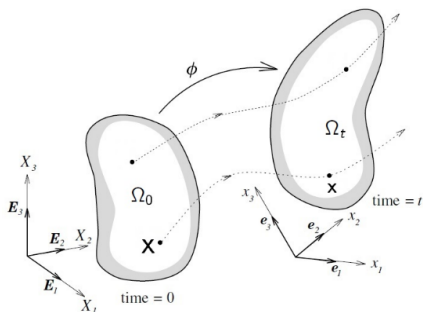
<sup>2</sup>ИВМ РАН

<sup>3</sup>Сеченовский университет

3 ноября 2020



СЕЧЕНОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ



- $X \in \Omega_0$  - начальное состояние,  $x \in \Omega_t$  - текущее состояние
- $x = \phi(X, t)$  - деформация
- $u = x - X$  - перемещение
- $\mathbb{F}$  - градиент деформации

$$\mathbb{F} = \frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial x}{\partial X}$$

- Существует упругий потенциал  $\psi(\mathbb{F})$  такой, что тензор напряжений Коши принимает вид:

$$\sigma = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi(\mathbb{F})}{\partial \mathbb{F}} \mathbb{F}^T, \quad J = \det \mathbb{F}$$

- Потенциальная энергия  $U$  упругого тела:

$$U = \int_{\Omega_0} \psi(\mathbb{F}) d\Omega = \int_{\Omega_t} J^{-1} \psi(\mathbb{F}) d\Omega$$

- Не зависит от выбора системы отсчёта  $\rightarrow \psi(\mathbb{F}) = \tilde{W}(\mathbb{F}^T \mathbb{F})$

# Решаемая задача и её актуальность

- Гиперупругие материалы очень широко применяются в описании мягких тканей
- Гиперупругость и конечно-элементный подход является стандартным методом вычисления напряжений-деформаций мягких тканей
- Существует огромное множество, "зоопарк", уравнений гиперупругих материалов
- Зачастую не легко выбрать уравнение гиперупругости правильно описывающее реальные мягкие ткани
- Мы ставим своей задачей разработать метод нахождения напряжённо-деформированного состояния гиперупругого тела в случае таблично заданных функций отклика и без предположений относительно формы потенциала

- 1 **Феноменологический подход:** Требуется выбор феноменологической модели и подгонка параметров модели к данным экспериментов

$$\psi(\mathbb{F}) = f(\mathbb{F}, a_1, \dots, a_n),$$

где  $f$  - известная функция,  $a_i$  - неизвестные скалярные параметры

- 2 **Задание частных производных потенциала:** Требуется выбора измеряемых мер деформации

- инварианты правого тензора Коши-Грина (классические меры) [1], [2]
- неклассические меры [3], [4]

$$\psi(\mathbb{F}) = f(\xi_1(\mathbb{F}), \dots, \xi_n(\mathbb{F})) \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{F}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbb{F}},$$

где  $f$  - неизвестная функция,  $\xi_i(\mathbb{F})$  - заданные (известные) меры деформации,  $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}(\xi_1, \dots, \xi_n)$  - **функции отклика**, response functions

# Мера деформации основанная на QR разложении $\mathbb{F}$

- По теореме о верхне-треугольном разложении матрицы существует ортогональная матрица  $Q$  и верхне-треугольная  $\tilde{F}$ :

$$Q^T \mathbb{F} = \tilde{F} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} & \tilde{F}_{13} \\ 0 & \tilde{F}_{22} & \tilde{F}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{F}_{33} \end{pmatrix}$$

- Из правого тензора Коши-Грина  $\mathbb{C} = \mathbb{F}^T \mathbb{F} = \tilde{F}^T \tilde{F}$  компоненты  $\mathbb{F}$  могут быть получены с помощью разложения Холецкого:

$$\tilde{F}_{11} = \sqrt{\mathbb{C}_{11}}, \quad \tilde{F}_{12} = \frac{\mathbb{C}_{12}}{\tilde{F}_{11}}, \quad \tilde{F}_{22} = \sqrt{\mathbb{C}_{22} - \tilde{F}_{12}^2} \text{ и т.д.}$$

- В статье [3] предложены следующие меры деформации:

$$\xi_1 = \ln \tilde{F}_{11}, \quad \xi_2 = \ln \tilde{F}_{22}, \quad \xi_3 = \frac{\tilde{F}_{12}}{\tilde{F}_{11}}, \quad \xi_4 = \ln \tilde{F}_{33}, \quad \xi_5 = \frac{\tilde{F}_{13}}{\tilde{F}_{11}}, \quad \xi_6 = \frac{\tilde{F}_{23}}{\tilde{F}_{22}}$$

# Мера деформации основанная на QR разложении (в 2D)

- В случае изначально (в недеформированном состоянии) плоской тонкой мембраны лежащей в плоскости параллельной ортонормированным вектрами  $\vec{E}_1, \vec{E}_2$  можно записать

$$Q^T \mathbb{F} = \tilde{\mathbb{F}} = \sum_{i,j=1, i \leq j} \tilde{F}_{ij} \vec{E}_i \otimes \vec{E}_j$$

- Тогда меры деформации принимают аналогичный вид:

$$\xi_1 = \ln \tilde{F}_{11}, \quad \xi_2 = \ln \tilde{F}_{22}, \quad \xi_3 = \frac{\tilde{F}_{12}}{\tilde{F}_{11}}$$

- А двумерный тензор напряжений Коши  $\mathbb{T}$  записывается как:

$$\mathbb{T} = \sum_{i,j=1}^2 T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \quad T_{11} = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1}, \quad T_{22} = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}, \quad T_{12} = \frac{1}{J} \frac{\tilde{F}_{22}}{\tilde{F}_{11}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_3},$$

где  $\psi = \psi_{QR}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ,  $J = (\text{tr}^2 \mathbb{F} - \text{tr} \mathbb{F}^2)/2$ ,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  - текущий локальный базис

- Уравнение равновесия в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \sigma + \mathbf{b} = 0 \text{ в } \Omega_t$$

где  $\mathbf{b}$  - плотность внешних сил, действующих на тело

- Смешанные граничные условия ( $\partial\Omega_t = \Gamma_u(t) \cup \Gamma_\sigma(t)$ ):

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \text{ на } \Gamma_u(t), \quad \sigma \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma(t)$$

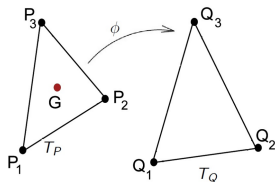
- Принцип виртуальной работы: найти такое  $\mathbf{x} \in \tilde{H}^1(\Omega_t) \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{\mathbf{v}} \in (H^1(\Omega_t))^3 : \mathbf{v} = \bar{\mathbf{x}} \text{ на } \Gamma_u\}$  что

$$\delta I = \delta(W - U) = 0,$$

где

$$\delta U = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \int_{\Omega_0} \psi(\nabla \mathbf{x}) d\Omega \right) \cdot \delta \mathbf{x}, \quad \delta W = \int_{\Omega_t} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{x} d\Omega$$





- Конформная согласованная треугольная/тетраэдральная сетка в исходной области  $\Omega_0$
- $P_1$  конечные элементы
- Ассемблирование ( $S_i$  это множество элементов, содержащих  $i$ -ый узел):

$$\sum_{T_P \in S_i} (F_i(T_P) + F_{i,ext}(T_P)) = 0, \text{ где}$$

$$\text{сила упругости } F_i(T_P) = -\frac{\partial U}{\partial Q_i} \stackrel{P_1}{=} -A_P \frac{\partial \psi(G)}{\partial Q_i},$$

$$\text{внешние силы } F_{i,ext}(T_P) = \int_{T_Q} b \lambda_i d\Omega.$$

# Узловая упругая сила

Для произвольного гиперупругого материала  $\psi(\xi_1, \dots, \xi_m)$  с мерами деформации  $\xi_1, \dots, \xi_m$

- узловая упругая сила

$$F_i(T_P) = -\frac{\partial U(T_P)}{\partial Q_i} = -A_P \sum_{s=1}^m \frac{\partial \psi}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi_s}{\partial Q_i};$$

- $\partial \xi_s / \partial Q_i$  задаются явными формулами
- $\partial \psi / \partial \xi_s$  (функция отклика) отражает механические свойства материала, полученные экспериментальным путём

Решать полученную нелинейную систему можно любым безъякобианным методом, например, безъякобинным методом Ньютона-Крылова или даже методом релаксации.








# Генерация синтетических данных

- 1 Выбираем гиперупругий потенциал  $\psi$  (Нео-Гук или Гент)

$$\psi_{NHK} = \frac{\mu H}{2} (I_1 + J^{-2} - 3), \quad \psi_{Gent} = -\frac{\mu H J_m}{2} \ln \left( 1 - \frac{I_1 + J^{-2} - 3}{J_m} \right),$$

где  $I_1 = \text{tr}\mathbb{C}$ ,  $J_m = 2.3$ ,  $\mu = 3.3 \cdot 10^6$ ,  $H = 4 \cdot 10^{-3}$

- 2 Выбираем эксперимент (раздутие плоской круглой мембраны или растяжение плоского квадрата с дырками)

Эксп.	$C_0$	$C_1$	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$
Изобр.							
Опис.	разд.	разд.	раст.	раст.	раст.	раст.	раст.

- 3 Проводим мат моделирование эксперимента. При этом  $\mathbb{C}$ ,  $\xi_i$ ,  $\partial\psi/\partial\xi_i$  константы на каждом элементе триангуляции
- 4 Сохраняем полученные на каждом элементе пары  $\{\vec{\xi}, \partial\psi/\partial\vec{\xi}\}$  в таблицу, при этом  $\partial\psi/\partial\vec{\xi}$  вычисляем аналитически через известную функцию  $\psi$

# Интерполяция табличных данных

- Метод ближайшего соседа:  $\partial\psi/\partial\xi_i(\vec{\xi}) = \partial\psi/\partial\xi_i(\arg \min_{\xi_t} \|\vec{\xi}_t - \vec{\xi}\|)$
- Метод  $K$ -ближайших соседей взвешанных обратными расстояниями:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}(\vec{\xi}) = \sum_{j=1}^K w_j^p \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}(\vec{\xi}_j^p),$$

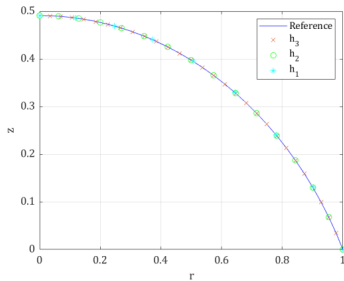
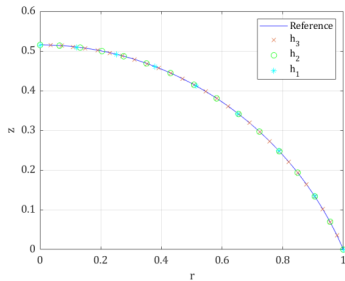
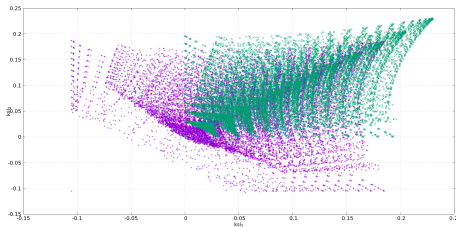
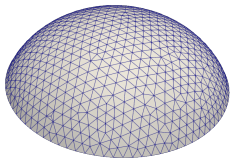
где  $\{\vec{\xi}_j^p\}_{j=1}^K$  - ближ. соседи по  $\|\cdot\|_p$ ,  $w_j^p = \left(1 + \sum_{l=1, l \neq j}^K \frac{\|\vec{\xi}_j^p - \vec{\xi}\|_p}{\|\vec{\xi}_l^p - \vec{\xi}\|_p}\right)^{-1}$

- Метод ближайшего соседа с линейной интерполяцией в окрестности 0:

$$T_{ij}(\nabla x) = \begin{cases} S_{ijkl} E_{kl}, & \|\vec{\xi}\| < a \\ T_{ij} \left( \frac{\partial\psi}{\partial\xi_l}(\vec{\xi}) \right), & \text{иначе} \end{cases},$$

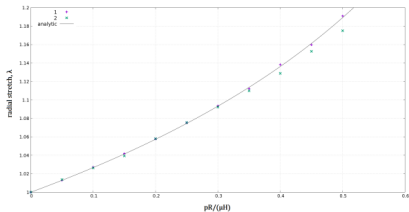
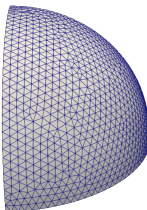
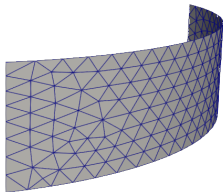
где  $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\nabla x)$ ,  $E = (F^T F - I)/2$

# Проблема недостатка данных [7] (Раздутие мембраны)

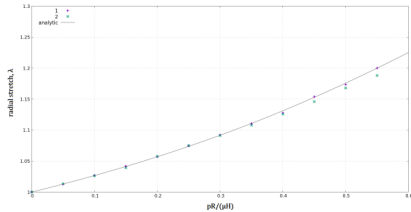


Profiles of inflated membrane  $z(r)$  obtained at  $p^* = 0.95$  for Neo-hookean (a) and Gent (b) materials.

# Раздутие цилиндра и сферы



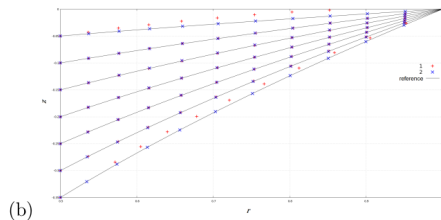
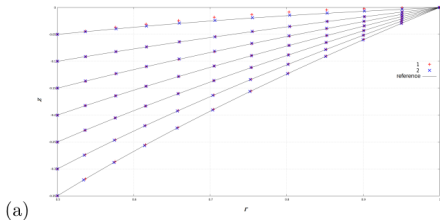
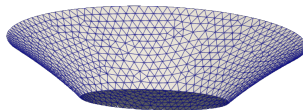
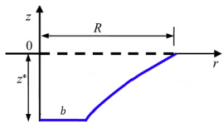
(a)



(b)

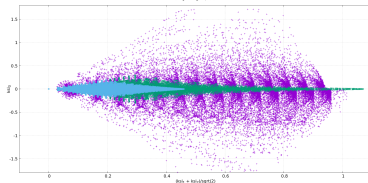
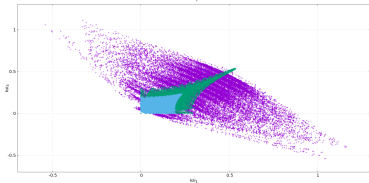
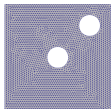
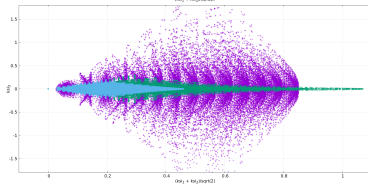
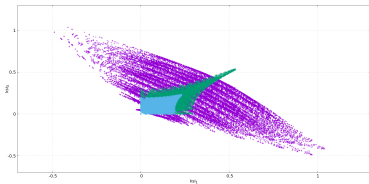
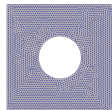
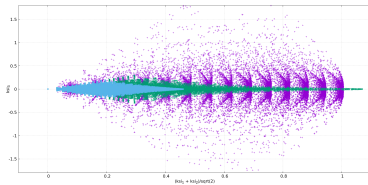
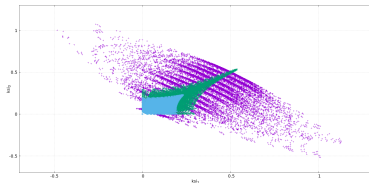
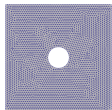
Analytical and numerical relationships between the radius and the stretch-inflating pressure for the cylindrical membrane from Neo-hookean (a) and Gent (b) materials. Shrinking method is denoted by 1, linearization method is denoted by 2.

# Индентация кольца [8]



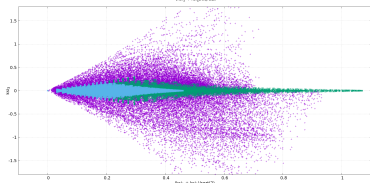
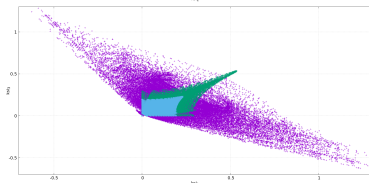
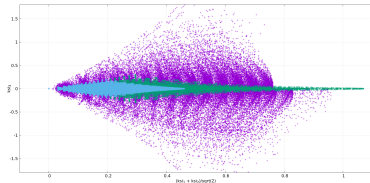
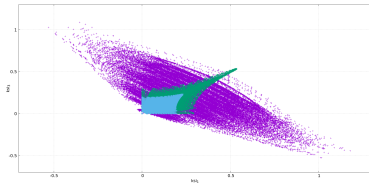
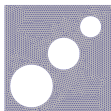
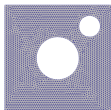
Comparison of the membrane deformation  $z(r)$  (for different deflections  $z^*$ ) due to a reference finite element solution and the solution obtained by the data-driven simulation. Neo-hookean and Gent materials are marked by (a) and (b), respectively. Shrinking method of the InputData expansion is denoted by 1, linearization method of the InputData expansion is denoted by 2.

# Сравнение облаков табличных данных (1)





# Сравнение облаков табличных данных (2)



- Рассмотрено применение метода линейных конечных элементов для моделирования поведения гиперупругого материала, задаваемого табулируемыми данными.
- В случае синтетических данных, получаемых из эксперимента раздутия плоской круглой мембраны, обнаружена проблема их недостаточности, что приводит к отсутствию сходимости для большинства тестовых экспериментов. Предложено 2 метода расширения данных для решения этой проблемы: линеаризация в области около нуля и добавление данных от раздутия изначально сжатой плоской круглой мембраны.
- Проведены численные эксперименты для тестовых задач по раздутию плоского круга, цилиндра, сферы, индентации круглой мембраны с фиксированной зоной контакта.
- Произведено сравнение облака точек, получающихся из эксперимента по раздутию плоской мембраны и растягиванию плоского квадратного патча с дырами. Обнаружено существенное преимущество второго эксперимента с точки зрения "достаточности" получаемых данных.
- В дальнейшем требуется перейти от работы с синтетическими данными к работе с реальными, чтобы оценить устойчивость метода к ошибкам в табличных данных и проверить применимость предложенного метода на практике.

- [1] [John C Criscione](#).  
Rivlin's representation formula is ill-conceived for the determination of response functions via biaxial testing.  
*pages 197–215, 2004.*
- [2] [Raymond William Ogden](#).  
Large deformation isotropic elasticity—on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids.  
*Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 326(1567):565–584, 1972.*
- [3] [A.R. Srinivasa](#).  
On the use of the upper triangular (or qr) decomposition for developing constitutive equations for green-elastic materials.  
*International Journal of Engineering Science, 60:1–12, 2012.*
- [4] [Laurent Stainier, Adrien Leygue, and Michael Ortiz](#).  
Model-free data-driven methods in mechanics: material data identification and solvers.  
*Computational Mechanics, 64(2):381–393, 2019.*
- [5] [Yu V Vassilevski, V Yu Salamatova, and A.V. Lozovskiy](#).  
Concise formulas for strain analysis of soft biological tissues.  
*Differential Equations, 53(7):908–915, 2017.*
- [6] [V Yu Salamatova and A.A. Liogky](#).  
Method of hyperelastic nodal forces for deformation of nonlinear membranes.  
*Differential Equations, 56(7):950–958, 2020.*
- [7] [Victoria Yu Salamatova and Alexey A Liogky](#).  
Hyperelastic membrane modelling based on data-driven constitutive relations.  
*Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 35(3):163–173, 2020.*
- [8] [Rong Long and Chung-Yuen Hui](#).  
Axisymmetric membrane in adhesive contact with rigid substrates: Analytical solutions under large deformation.  
*International Journal of Solids and Structures, 49(3-4):672–683, 2012.*

Спасибо за внимание!