В.Н. Разжевайкин

Индикатрисы устойчивости неотрицательных матриц и их приложение в задачах биологии и эпидемиологии

1. Матрица Лесли

Модель Лесли

$$u_1^{t+1} = \sum_{i=1}^{n} b_i u_i^t, \quad u_{i+1}^{t+1} = s_i u_i^t, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Вектор $w^t = (u_1^t, \ldots, u_n^t)^T$

$$w^{t+1} = A_{Les} w^t$$

$$A_{Les} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Устойчивость нулевого положения равновесия эквивалентна неравенству $r(A_{Les}) \leq 1$.

Вопрос о выживании популяции сводится к вопросу о неравенстве $\Phi(A_{Les}) \leq 1$ для индикатрисы устойчивости матрицы A_{Les}. Она имеет вид

$$\Phi(A_{Les}) = \sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{j=1}^{i} s_{j-1},$$

где $s_0 = 1$.

Содержательный смысл правой части – биологический потенциал популяции, т.е. среднее число потомков, произведенных одной особью втечение всей своей жизни.

2. Матрица Лефковича

К матрице Лесли добавляются ненулевые элементы на главной диагонали

$$A_{Lf} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & r_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{n-1} & r_n \end{pmatrix}.$$

Популяция подразделена по стадиям развития, сменяемым последовательно частью особей Доля остающихся на i-й стадии равна $r_i < 1$. Биологический потенциал популяции ($s_0 = 1$, $r_1 = 0$)

$$\Phi(A_{Lf}) = \sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{j=1}^{i} \frac{s_{j-1}}{\left(1 - r_j\right)}.$$

Формула дает при $r_i < 1$ индикатрису устойчивости для матрицы A_{Lf}.

Замечание. Альтернатива с $r_i = 1$ и $s_i > 0$ при $b_n \neq 0$ (условие неразложимости) влечет $r(A_{Lf}) > 1$.

3. Матрица Логофета

Каноническая форма

$$A_{Lg} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

с $a_{ij} \geq 0$ (так что $a_{ij} = 0$ при $j > i > 1$).

Характеристический многочлен

$$P(A_{Lg}, \lambda) = \prod_{j=1}^{n} \Big(\lambda - a_{jj}\Big) \cdot \Big(1 - Q(A_{Lg}, \lambda)\Big)$$

Индикатриса устойчивости

$$Q(A_{Lg},\lambda)=\sum_{i=2}^{n} a_{1i}\frac{\sum\limits_{m_i}\prod\limits_{l=1}^{k_{m_i}} a_{p_l^{m_i},p_{l-1}^{m_i}}}{\prod\limits_{j=1}^{i}\left(\lambda-a_{jj}\right)},$$

где в числителе под знаком суммы стоят произведения по всевозможным упорядоченным (так что $p_l^{m_i} > p_{l-1}^{m_i}$) подмножествам $m_i = \left\{p_l^{m_i}\right\}$ множества $\{1,\ldots,i\}$ с началом, равным единице (так что $p_1^{m_i} = 1$), и максимальным значением, равным i (так что $p_{k_{m_i}}^{m_i} = i$). При этом $a_{p_1^{m_i},p_0^{m_i}} = 1$ для любых m_i.

При $a_{jj} < 1$ функция $Q(A_{Lg}, 1)$ может выполнять роль индикатрисы устойчивости, поскольку в этом случае при $\lambda > \max a_{jj}$ функция $Q(A_{Lg}, \lambda)$ строго монотонно убывает по λ, а первый множитель в правой части положителен.

4. Индикатриса устойчивости 3×3 матрицы

Пусть $A_3 = \left(a_{ij}\right)$ с $i, j = 1, 2, 3$.

$$\Phi(A_3) = a_{11} + \\ + \frac{a_{12}a_{21}(1-a_{33})+a_{13}a_{31}(1-a_{22})+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{32}a_{21}a_{13}}{(1-a_{22})(1-a_{33})-a_{32}a_{23}}. \tag{1}$$

При $a_{ii} < 1$ для $i = 1$, 2, 3 неположительность знаменателя в случае неразложимой матрицы A_3 влечет $r(A_3) > 1$. Умножение на него выражения $(\Phi(A_3) - 1)$ приводит к выражению, симметричному относительно перенумерации вершин

$$F(A) = 1 + a_{32}a_{23}(1 - a_{11}) +$$

$$+ a_{12}a_{21}(1 - a_{33}) + a_{13}a_{31}(1 - a_{22}) +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{32}a_{21}a_{13} -$$

$$-(1 - a_{11})(1 - a_{22})(1 - a_{33}) \qquad (2)$$

5. Теорема об индикатрисе

Определение.
Полиномиальная индикатриса устойчивости неотрицательной $n \times n$ матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ – это $F(A) = \max \Phi_k(A) = \frac{P_k(A)}{Q_k(A)}$, $k = 1, \ldots, n$, для набора полиномов $P_k(A) = P_k(a_{ij})$, $Q_k(A) = Q_k(a_{ij})$, от элементов матрицы с независящими от них коэффициентами:

$$\text{sign } (F(A) - 1) = \text{sign } (r(A) - 1),$$

где $r(A)$ - спектральный радиус матрицы A.

Теорема. Для любого натурального n неотрицательная $n \times n$ матрица $A = \left(a_{ij}\right)$ допускает построение полиномиальной индикатрисы устойчивости $F(n, A)$.

Приложение 1. Дискретный принцип эволюционной оптимальности

Динамика биологического сообщества

$$\begin{cases} x^{m+1} = A(x^m, y^m)x^m \\ \\ y^{m+1} = B(x^m, y^m) \end{cases} \qquad (3)$$

$m \in \mathbf{N}$ – дискретное время, $x^m = (w_1^m, \ldots, w_L^m)^\mathsf{T}$ – вектор сообщества, составленный из набора векторов численностей $w_l^m = (u_{l,1}^m, \ldots, u_{l,n_l}^m)^\mathsf{T}$ структурированных по набору состояний популяций, n_l –

число возможных состояний отдельной особи популяции с номером $l \in \{1, \ldots, L\}$, $y^m = (y_1^m, \ldots, y_Y^m)^\mathsf{T}$ – вектор внешних факторов, A – блочно диагональная по блокам векторов w_l^m $N \times N$-матрица с $N = \sum\limits_{l=1}^{L} n_l$, B – Y-вектор.

Пусть $(\bar{x}, \bar{y})$ с $\bar{x} = (0, \ldots, 0, \bar{w}_{K+1}, \ldots, \bar{w}_L)^\mathsf{T}$, $\bar{w}_l > 0$ при $l = K + 1, \ldots, L$ и $0 < K < L$, – устойчивое положение равновесия системы (3), т.е. для якобиана J правой части системы, вычисленного в этом положении равновесия, в этом случае

$$\Re(\sigma(J)) \leq 1 \qquad (4)$$

В блочном $(K, L-K, Y)$ виде с компонентами $(\zeta, \xi, y)^{\mathsf{T}}$, где $\zeta = (w_1, \ldots, w_K)^{\mathsf{T}}$, $\xi = (w_{K+1}, \ldots, w_L)^{\mathsf{T}}$ этот якобиан J имеет вид

$$\begin{pmatrix} A^{\zeta}(\bar{x},\bar{y}) & 0 & 0 \\ A^{\xi}_{\zeta}(\bar{x},\bar{y}) \cdot \bar{\xi} & A^{\xi}_{\xi}(\bar{x},\bar{y}) \cdot \bar{\xi} + A^{\xi}(\bar{x},\bar{y}) & A^{\xi}_{y}(\bar{x},\bar{y}) \cdot \bar{\xi} \\ B_{\zeta}(\bar{x},\bar{y}) & B_{\xi}(\bar{x},\bar{y}) & B_{y}(\bar{x},\bar{y}) \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Здесь $\bar{\xi} = (\bar{w}_{K+1}, \ldots, \bar{w}_L)^{\mathsf{T}}$, $A^{\xi}(\bar{x},\bar{y})$ – ограничение оператора A на компоненты ξ

(аналогично для ζ), нижний индекс обозначает взятие соответствующего якобиана.

Из (4) и (5) следует что для любого $l \le K$ выполнено неравенство для спектрального радиуса

$$\rho_l(\bar{x}, \bar{y}) = \sup \left| \sigma \left(A^l(\bar{x}, \bar{y}) \right) \right| \le 1 \tag{6}$$

Здесь $A^l(x, y)$ – блок матрицы $A(x, y)$, соответствующий l-му виду из сообщества.

С другой стороны, в силу $\bar{w}_l = A^{l'}(\bar{x}, \bar{y}) \bar{w}_l > 0$ при $l' > K$ $\rho_{l'}(\bar{x}, \bar{y}) \ge 1$, причем для матриц $A^{l'}(\bar{x},\bar{y}) \geq 0$ имеет место знак равенства.

Отсюда с учетом (6)

$$1 = \rho_{l'}(\bar{x},\bar{y}) = \max \rho_l(\bar{x},\bar{y}), \quad (7)$$

где l пробегает все возможные L значений, а l' – последние $L-K$, соответствующие $\bar{x}_{l'} > 0$. Второе равенство в (7) – это *принцип эволюционной оптимальности*.

Решение задачи (7) с использованием индикатрисы устойчивости

$$F(n_{l'}, A^{l'}(\bar{x},\bar{y})) = \max_l F(n_l, A^l(\bar{x},\bar{y}))$$

Приложение 2. Модель развития эпидемии при наличии миграции

$i = 1, \ldots, n$ – номер региона, $\varepsilon_{ij} \geq 0$ доля времени, проводимого жителем i -го региона в j-м

$I_i(t)$ – число инфицированных,

$S_i(t)$ – число восприимчивых.

$R_i(t) = N_i - I_i(t) - S_i(t)$ – число устраненных.

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} = 1.$$

$$\begin{cases} \frac{dS_i}{dt} = -\alpha S_i \left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{ik} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{jk} I_j \right) + \gamma (N_i - S_i), \ i = 1, \ldots, n \\ \frac{dI_i}{dt} = \alpha S_i \left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{ik} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{jk} I_j \right) - (\beta + \gamma) I_i, \ i = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{8}$$

Из (8) следует $\frac{dR_i}{dt} = \beta I_i - \gamma R_i$,
и область $U =$
$\{S_i \geq 0,\ I_i \geq 0,\ S_i + I_i \leq N_i,\ i = 1, \ldots, n\}$
инвариантна

Возможность возникновения пандемии ассоциируется с неустойчивостью тривиального положения равновесия системы (8)

$$\{S_i^* = N_i,\ I_i^* = 0,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Случаю его устойчивости соответствует локализация всех $2n$ собственных значений якобиана J правой части системы (8), вычисленного в этом положении равновесия, в левой комплексной полуплоскости.

$$J = \begin{pmatrix} -\gamma\mathbf{1} & -\alpha \mathsf{diag}\,(\mathbf{N})\,\mathsf{E}\mathsf{E}^{\mathsf{T}} \\ \\ \mathbf{0} & \alpha \mathsf{diag}\,(\mathbf{N})\,\mathsf{E}\mathsf{E}^{\mathsf{T}} - (\beta+\gamma)\,\mathbf{1} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где в клетках проставлены $n \times n$ блоки, $\mathbf{0}$ – нулевая, а $\mathbf{1}$ – единичная $n \times n$ матрицы, $\mathbf{N} = (N_1, \ldots, N_n)^T$, $\mathsf{diag}\,(\mathbf{N})$– диагональная матрица с вектором $\mathbf{N}$ на главной диагонали, а $\mathsf{E} = \left(\varepsilon_{ij}\right)$ – $n \times n$ матрица корреспонденций.

Поскольку якобиан J имеет блочно треугольный вид , то его спектр совпадает с объединением спектров его диагональных блоков. Первый из них – диагональный со значением $-\gamma < 0$ так что неустойчивость может возникнуть только при наличии собственных значений у второго диагонального блока в (9)

$$A = A_p - (\beta + \gamma)\,\mathbf{1},$$

с

$$A_p = (\beta + \gamma)\mathsf{diag}\,(\mathbf{N})\,\mathsf{E}\mathsf{E}^{\mathsf{T}}$$

в правой комплексной полуплоскости

Условие устойчивости в терминах $A' = (\beta + \gamma)^{-1} A_p$

$$r\left(A'\right) < 1$$

с коэффициентами

$$a'_{ij} = \frac{\alpha N_i}{(\beta + \gamma)} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jk}$$

В случае $n = 3$ можно воспользоваться формулами (1) и (2).