

Определяющие соотношения для мягких тканей

В. Саламатова

Сеченовский университет, МФТИ, ИВМ РАН

Математические модели и численные методы в биологии и
медицине

ИВМ РАН, 06 ноября 2018

Мягкие ткани

- ▶ особый интерес к мягкой соединительной ткани:
кровеносные сосуды, кожа, связки, сухожилия и др.

Мягкие ткани

- ▶ особый интерес к мягкой соединительной ткани:
кровеносные сосуды, кожа, связки, сухожилия и др.
 - ▶ Клетки (фибробласты) + внеклеточный матрикс (сеть из коллагеновых и эластиновых волокон, погруженных в связующее вещество)

Мягкие ткани

- ▶ особый интерес к мягкой соединительной ткани:
кровеносные сосуды, кожа, связки, сухожилия и др.
 - ▶ Клетки (фибробласты) + внеклеточный матрикс (сеть из коллагеновых и эластиновых волокон, погруженных в связующее вещество)
 - ▶ Способность к большим обратимым деформациям

Мягкие ткани

- ▶ особый интерес к мягкой соединительной ткани:
кровеносные сосуды, кожа, связки, сухожилия и др.
 - ▶ Клетки (фибробласты) + внеклеточный матрикс (сеть из коллагеновых и эластиновых волокон, погруженных в связующее вещество)
 - ▶ Способность к большим обратимым деформациям
 - ▶ Сложное поведение (гистерезис; зависимость от времени; нелинейность)

Мягкие ткани

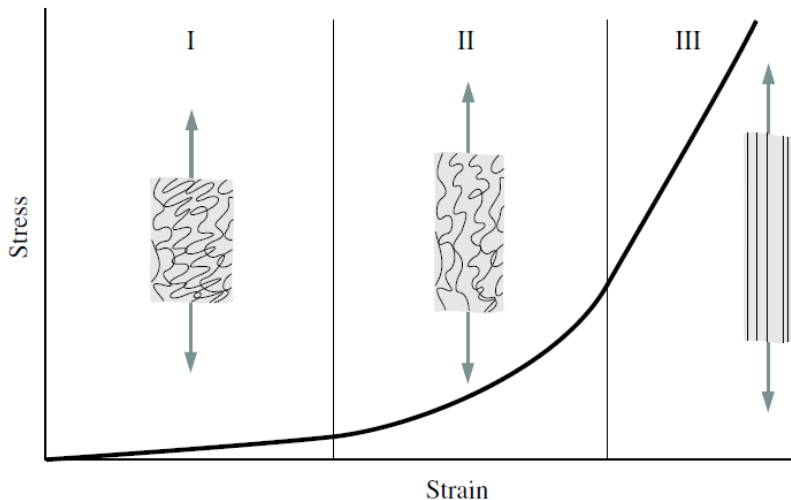
- ▶ особый интерес к мягкой соединительной ткани:
кровеносные сосуды, кожа, связки, сухожилия и др.
 - ▶ Клетки (фибробласты) + внеклеточный матрикс (сеть из коллагеновых и эластиновых волокон, погруженных в связующее вещество)
 - ▶ Способность к большим обратимым деформациям
 - ▶ Сложное поведение (гистерезис; зависимость от времени; нелинейность)
 - ▶ В качестве основных моделей используются гиперупругие модели

Мягкие ткани

- ▶ особый интерес к мягкой соединительной ткани: кровеносные сосуды, кожа, связки, сухожилия и др.
 - ▶ Клетки (фибробласты) + внеклеточный матрикс (сеть из коллагеновых и эластиновых волокон, погруженных в связующее вещество)
 - ▶ Способность к большим обратимым деформациям
 - ▶ Сложное поведение (гистерезис; зависимость от времени; нелинейность)
 - ▶ В качестве основных моделей используются гиперупругие модели
 - ▶ Изотропные, анизотропные модели

Механическое поведение мягких тканей

- ▶ кривая деформирования



Механическое поведение мягких тканей

- ▶ определяющее соотношение (нелинейная зависимость):

$$\sigma = f(\mathbf{F}),$$

\mathbf{F} — градиент деформации

- ▶ задается упругим потенциалом (гиперупругая модель)
 $W(\mathbf{F})$:

$$\sigma = \frac{1}{J} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T; \quad J = \det \mathbf{F}$$

Механическое поведение мягких тканей

- ▶ определяющее соотношение (нелинейная зависимость):

$$\sigma = f(\mathbf{F}),$$

\mathbf{F} — градиент деформации

- ▶ задается упругим потенциалом (гиперупругая модель)
 $W(\mathbf{F})$:

$$\sigma = \frac{1}{J} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T; \quad J = \det \mathbf{F}$$

- ▶ Независимость от системы отсчета $\rightarrow W(\mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{F}^T \mathbf{F})$

Механическое поведение мягких тканей

- ▶ определяющее соотношение (нелинейная зависимость):

$$\sigma = f(\mathbf{F}),$$

\mathbf{F} — градиент деформации

- ▶ задается упругим потенциалом (гиперупругая модель)
 $W(\mathbf{F})$:

$$\sigma = \frac{1}{J} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T; \quad J = \det \mathbf{F}$$

- ▶ Независимость от системы отсчета $\rightarrow W(\mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{F}^T \mathbf{F})$
- ▶ Предложено большее количество гиперупругих моделей для мягких тканей

Механическое поведение мягких тканей

- ▶ определяющее соотношение (нелинейная зависимость):

$$\sigma = f(\mathbf{F}),$$

\mathbf{F} — градиент деформации

- ▶ задается упругим потенциалом (гиперупругая модель)
 $W(\mathbf{F})$:

$$\sigma = \frac{1}{J} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T; \quad J = \det \mathbf{F}$$

- ▶ Независимость от системы отсчета $\rightarrow W(\mathbf{F}) = \tilde{W}(\mathbf{F}^T \mathbf{F})$
- ▶ Предложено большее количество гиперупругих моделей для мягких тканей
- ▶ Построение определяющих соотношений без априорного задания их вида

Меры деформаций

- ▶ Градиент деформаций \mathbf{F} — основная кинематическая характеристика

Меры деформаций

- ▶ Градиент деформаций \mathbf{F} — основная кинематическая характеристика
- ▶ Полярное разложение $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ или $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ (\mathbf{R} — ортогональная матрица; \mathbf{U}, \mathbf{V} — симметричные положительно-определенные матрицы)

Меры деформаций

- ▶ Градиент деформаций \mathbf{F} — основная кинематическая характеристика
- ▶ Полярное разложение $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ или $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ (\mathbf{R} — ортогональная матрица; \mathbf{U}, \mathbf{V} — симметричные положительно-определенные матрицы)
- ▶ Примеры мер деформаций, основанных на полярном разложении

Меры деформаций

- ▶ Градиент деформаций \mathbf{F} — основная кинематическая характеристика
- ▶ Полярное разложение $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ или $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ (\mathbf{R} — ортогональная матрица; \mathbf{U}, \mathbf{V} — симметричные положительно-определенные матрицы)
- ▶ Примеры мер деформаций, основанных на полярном разложении
 - ▶ правый тензор деформации Коши-Грина $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$

Меры деформаций

- ▶ Градиент деформаций \mathbf{F} — основная кинематическая характеристика
- ▶ Полярное разложение $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ или $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ (\mathbf{R} — ортогональная матрица; \mathbf{U}, \mathbf{V} — симметричные положительно-определенные матрицы)
- ▶ Примеры мер деформаций, основанных на полярном разложении
 - ▶ правый тензор деформации Коши-Грина $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$
 - ▶ тензор деформации Лагранжа $\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2$

Меры деформаций

- ▶ Градиент деформаций \mathbf{F} — основная кинематическая характеристика
- ▶ Полярное разложение $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ или $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ (\mathbf{R} — ортогональная матрица; \mathbf{U}, \mathbf{V} — симметричные положительно-определенные матрицы)
- ▶ Примеры мер деформаций, основанных на полярном разложении
 - ▶ правый тензор деформации Коши-Грина $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$
 - ▶ тензор деформации Лагранжа $\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2$
 - ▶ левый тензор Коши-Грина $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$

Меры деформаций

- ▶ Градиент деформаций \mathbf{F} — основная кинематическая характеристика
- ▶ Полярное разложение $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ или $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ (\mathbf{R} — ортогональная матрица; \mathbf{U}, \mathbf{V} — симметричные положительно-определенные матрицы)
- ▶ Примеры мер деформаций, основанных на полярном разложении
 - ▶ правый тензор деформации Коши-Грина $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$
 - ▶ тензор деформации Лагранжа $\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2$
 - ▶ левый тензор Коши-Грина $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$
 - ▶ логарифмическая мера (мера Генки)
 $\mathbf{E}_H = \ln \mathbf{B}/2 = \ln(\mathbf{V}); \quad \mathbf{e}_H = \ln \mathbf{C}/2 = \ln(\mathbf{U}).$

Меры деформаций

- ▶ Градиент деформаций \mathbf{F} — основная кинематическая характеристика
- ▶ Полярное разложение $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ или $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ (\mathbf{R} — ортогональная матрица; \mathbf{U}, \mathbf{V} — симметричные положительно-определенные матрицы)
- ▶ Примеры мер деформаций, основанных на полярном разложении
 - ▶ правый тензор деформации Коши-Грина $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$
 - ▶ тензор деформации Лагранжа $\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2$
 - ▶ левый тензор Коши-Грина $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$
 - ▶ логарифмическая мера (мера Генки)
 $\mathbf{E}_H = \ln \mathbf{B}/2 = \ln(\mathbf{V}); \quad \mathbf{e}_H = \ln \mathbf{C}/2 = \ln(\mathbf{U}).$
- ▶ Практически всегда используются тензоры деформаций \mathbf{C} и \mathbf{B} для описания мех.поведения мягких тканей

Мера деформаций \mathbf{C} и \mathbf{B}

- ▶ Изотропный материал:

$$W = \psi_{iso}(I_1, I_2, I_3),$$

где $I_1 = \text{tr}\mathbf{C}$; $I_2 = ((\text{tr}\mathbf{C})^2 - \text{tr}\mathbf{C}^2) / 2$; $I_3 = \det(\mathbf{C}) = J^2$
тензор напряжений Коши:

$$\sigma_{iso} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[\frac{\partial \psi}{\partial I_1} \mathbf{B} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) \right] + 2\sqrt{I_3} \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \mathbf{I}$$

Мера деформаций \mathbf{C} и \mathbf{B}

- ▶ Изотропный материал:

$$W = \psi_{iso}(I_1, I_2, I_3),$$

где $I_1 = \text{tr}\mathbf{C}$; $I_2 = ((\text{tr}\mathbf{C})^2 - \text{tr}\mathbf{C}^2) / 2$; $I_3 = \det(\mathbf{C}) = J^2$
тензор напряжений Коши:

$$\sigma_{iso} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[\frac{\partial \psi}{\partial I_1} \mathbf{B} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) \right] + 2\sqrt{I_3} \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \mathbf{I}$$

- ▶ Анизотропный материал:

$$W = \psi_{iso}(I_1, I_2, I_3) + \psi_{aniso}(I_4, I_5, \dots),$$

где $I_4 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}\mathbf{M}$, $I_5 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}^2\mathbf{M}$, \mathbf{M} — ед.вектор,
характеризующий направление семейства волокон.

Мера деформаций \mathbf{C} и \mathbf{B}

- ▶ Изотропный материал:

$$W = \psi_{iso}(I_1, I_2, I_3),$$

где $I_1 = \text{tr}\mathbf{C}$; $I_2 = ((\text{tr}\mathbf{C})^2 - \text{tr}\mathbf{C}^2) / 2$; $I_3 = \det(\mathbf{C}) = J^2$
тензор напряжений Коши:

$$\sigma_{iso} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[\frac{\partial \psi}{\partial I_1} \mathbf{B} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) \right] + 2\sqrt{I_3} \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \mathbf{I}$$

- ▶ Анизотропный материал:

$$W = \psi_{iso}(I_1, I_2, I_3) + \psi_{aniso}(I_4, I_5, \dots),$$

где $I_4 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}\mathbf{M}$, $I_5 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}^2\mathbf{M}$, \mathbf{M} — ед.вектор,
характеризующий направление семейства волокон.

- ▶ $\frac{\partial \psi}{\partial I_i}$, $i = 1, \dots, N$ — функции отклика (response function),
которые определяют вид определяющего соотношения.

Определяющие соотношения

Упругий потенциал $W = \psi(\xi_i) \longrightarrow \sigma = \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \mathbf{A}_i$, где ξ_i — величины, характеризующие деформацию

- ▶ $\frac{\partial \psi}{\partial \xi_i}$ — полностью задают вид определяющего соотношения

Определяющие соотношения

Упругий потенциал $W = \psi(\xi_i) \longrightarrow \sigma = \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \mathbf{A}_i$, где ξ_i — величины, характеризующие деформацию

- ▶ $\frac{\partial \psi}{\partial \xi_i}$ — полностью задают вид определяющего соотношения
- ▶ Проблемы при использовании тензора \mathbf{C} :

Определяющие соотношения

Упругий потенциал $W = \psi(\xi_i) \longrightarrow \sigma = \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \mathbf{A}_i$, где ξ_i — величины, характеризующие деформацию

- ▶ $\frac{\partial \psi}{\partial \xi_i}$ — полностью задают вид определяющего соотношения
- ▶ Проблемы при использовании тензора \mathbf{C} :
 - ▶ слагаемые в определяющем соотношении коррелируют:
 $\mathbf{A}_i : \mathbf{A}_j = \text{tr}(\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j) \neq 0$, при $i \neq j$

Определяющие соотношения

Упругий потенциал $W = \psi(\xi_i) \rightarrow \sigma = \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \mathbf{A}_i$, где ξ_i — величины, характеризующие деформацию

- ▶ $\frac{\partial \psi}{\partial \xi_i}$ — полностью задают вид определяющего соотношения
- ▶ Проблемы при использовании тензора \mathbf{C} :
 - ▶ слагаемые в определяющем соотношении коррелируют:
 $\mathbf{A}_i : \mathbf{A}_j = \text{tr}(\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j) \neq 0$, при $i \neq j$
 - ▶ приводит к существенным ошибкам при определении функций отклика по экспериментальным данным
Criscione, J. C. (2004). Rivlin's representation formula is ill-conceived for the determination of response functions via biaxial testing. In The Rational Spirit in Modern Continuum Mechanics (pp. 197-215).

Определяющие соотношения

Упругий потенциал $W = \psi(\xi_i) \rightarrow \sigma = \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} \mathbf{A}_i$, где ξ_i — величины, характеризующие деформацию

- ▶ $\frac{\partial \psi}{\partial \xi_i}$ — полностью задают вид определяющего соотношения
- ▶ Проблемы при использовании тензора \mathbf{C} :
 - ▶ слагаемые в определяющем соотношении коррелируют:
 $\mathbf{A}_i : \mathbf{A}_j = \text{tr}(\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j) \neq 0$, при $i \neq j$
 - ▶ приводит к существенным ошибкам при определении функций отклика по экспериментальным данным
- ▶ новая мера деформаций, т.ч. $\mathbf{A}_i : \mathbf{A}_j = 0$, при $i \neq j$ (усл. ортогональности), тогда $\frac{\partial \psi}{\partial \xi_i}$ можно определять **напрямую** по экспериментальным данным (напряжение-деформация)

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} = \sigma : \mathbf{A}_i$$

Мера, основанная на QR-разложении \mathbf{F}

- ▶ Верхнетреугольное (QR) разложение $\mathbf{F} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}}$ (\mathbf{Q} — ортогональная матрица; $\tilde{\mathbf{F}}$ — верхнетреугольная матрица с положительными числами на диагонали)

Мера, основанная на QR-разложении \mathbf{F}

- ▶ Верхнетреугольное (QR) разложение $\mathbf{F} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}}$ (\mathbf{Q} — ортогональная матрица; $\tilde{\mathbf{F}}$ — верхнетреугольная матрица с положительными числами на диагонали)
- ▶ *Srinivasa A. R. (2012). On the use of the upper triangular (or QR) decomposition for developing constitutive equations for Green-elastic materials. International Journal of Engineering Science, 60, 1-12.*

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}};$$

$$\xi_1 = \ln \tilde{F}_{11}, \quad \xi_2 = \ln \tilde{F}_{22}, \quad \xi_3 = \ln \tilde{F}_{33},$$

$$\xi_4 = \frac{\tilde{F}_{12}}{\tilde{F}_{11}}, \quad \xi_5 = \frac{\tilde{F}_{13}}{\tilde{F}_{11}}, \quad \xi_6 = \frac{\tilde{F}_{23}}{\tilde{F}_{22}};$$

Мера, основанная на QR-разложении \mathbf{F}

- ▶ Верхнетреугольное (QR) разложение $\mathbf{F} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}}$ (\mathbf{Q} — ортогональная матрица; $\tilde{\mathbf{F}}$ — верхнетреугольная матрица с положительными числами на диагонали)
- ▶ *Srinivasa A. R. (2012). On the use of the upper triangular (or QR) decomposition for developing constitutive equations for Green-elastic materials. International Journal of Engineering Science, 60, 1-12.*

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}};$$

$$\xi_1 = \ln \tilde{F}_{11}, \quad \xi_2 = \ln \tilde{F}_{22}, \quad \xi_3 = \ln \tilde{F}_{33},$$

$$\xi_4 = \frac{\tilde{F}_{12}}{\tilde{F}_{11}}, \quad \xi_5 = \frac{\tilde{F}_{13}}{\tilde{F}_{11}}, \quad \xi_6 = \frac{\tilde{F}_{23}}{\tilde{F}_{22}};$$

- ▶ условие ортогональности выполняется почти для всех пар i, j

Мера, основанная на QR-разложении \mathbf{F}

- ▶ Верхнетреугольное (QR) разложение $\mathbf{F} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}}$ (\mathbf{Q} — ортогональная матрица; $\tilde{\mathbf{F}}$ — верхнетреугольная матрица с положительными числами на диагонали)
- ▶ $\tilde{\sigma} = \mathbf{Q}^T \sigma \mathbf{Q}$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} = \tilde{\sigma}_{ii}, i = 1, 2, 3;$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_6} = \tilde{\sigma}_{23} \frac{\tilde{F}_{22}}{\tilde{F}_{33}};$$

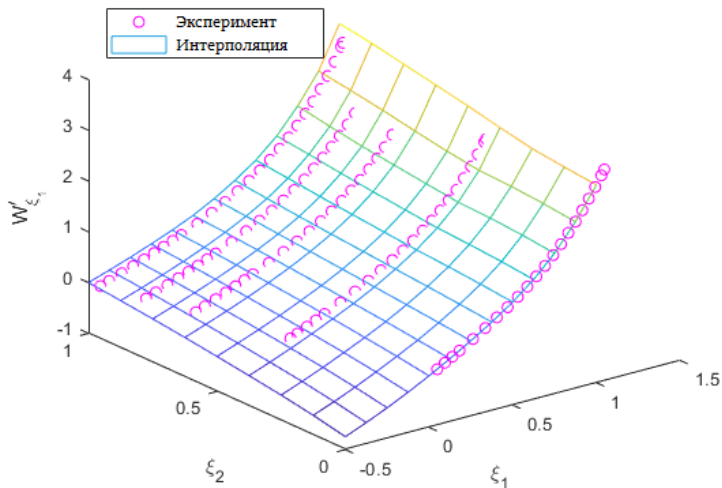
$$\frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_5} = \tilde{\sigma}_{13} \frac{\tilde{F}_{11}}{\tilde{F}_{33}};$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_4} = \frac{\tilde{F}_{11}}{\tilde{F}_{33}} \left(\tilde{\sigma}_{12} - \tilde{\sigma}_{13} \frac{\tilde{F}_{23}}{\tilde{F}_{33}} \right);$$

Экспериментальные данные Jones&Treloar, 1975

Функции отклика $\partial W/\partial \xi_i = W'_{\xi_i}$, $i = 1, 2$, восстановленные по данным для чистого сдвига

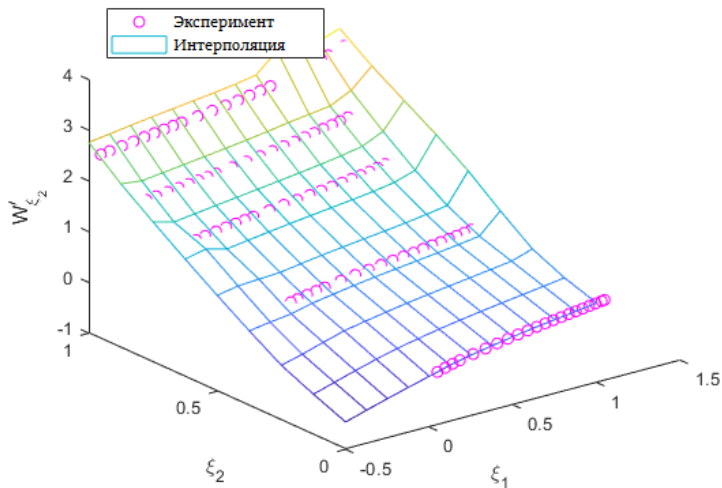
Метод естественного соседа, W'_{ξ_i}



Экспериментальные данные Jones&Treloar, 1975

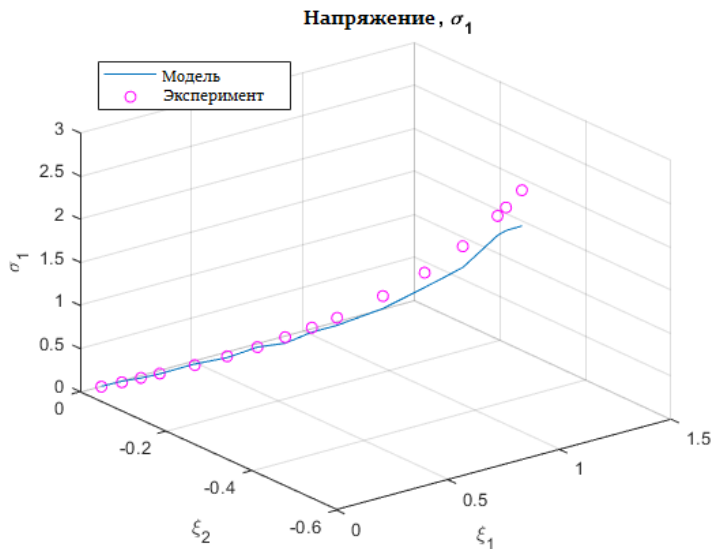
Функции отклика $\partial W/\partial \xi_i = W'_{\xi_i}$, $i = 1, 2$, восстановленные по данным для чистого сдвига

Метод естественного соседа, W'_{ξ_2}



Экспериментальные данные Jones&Treloar, 1975

Кривая деформирования для одноосного растяжения, на основе восстановленных функций отклика.



Упругий потенциал для меры деформации, основанной на QR-разложении

- ▶ Удовлетворяет условию материальной независимости от системы отсчета

Упругий потенциал для меры деформации, основанной на QR-разложении

- ▶ Удовлетворяет условию материальной независимости от системы отсчета
- ▶ Требуется проверка условия сильной эллиптичности:
 - необходимое условие устойчивости равновесной упругой деформации
 - вещественность скоростей распространения волн в материале

$W(\mathbf{F})$ приводит к эллиптической системе уравнений равновесия, если выполняется следующее условие

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{F}} : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) > 0, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbf{0},$$

Упругий потенциал для меры деформации, основанной на QR-разложении

- ▶ Удовлетворяет условию материальной независимости от системы отсчета
- ▶ Требуется проверка условия сильной эллиптичности:
Проверка эллиптичности \rightarrow положительная определенность некоторой заданной матрицы.

- ▶ предложено большое количество различных гиперупругих моделей для мягких тканей
- ▶ нет единого рецепта, как выбрать нужное
- ▶ проблемы при использовании C в качестве меры деформации (проблемы при нахождении функций отклика по экспериментальным данным)
- ▶ характеристика деформации, основанная на QR-разложении градиента деформации, является возможным решением данной проблемы
- ▶ позволяет восстановить функции отклика непосредственно по экспериментальным данным
- ▶ задача сводится к корректной аппроксимации/интерполяции функций отклика (планы на будущее)