Об устойчивости одной модели динамики популяции в условиях воздействия вредных веществ

А. С. Баландин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Научно-исследовательский центр «Функционально-дифференциальные уравнения»

Москва, 30 октября – 3 ноября 2015

В статье
Р.О. Карелина, Н.В. Перцев, *Построение двусторонних оценок для решений некоторых систем дифференциальных уравнений с последействием*, Сиб. журнал инд. матем., **VIII**, 4(24) (2005), 60-72.
была предложена задача динамики популяций с учётом воздействия вредных веществ:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \beta z_1(t) - \gamma z_1^2(t) - \\ \qquad - \dfrac{\sigma}{\omega} z_1(t) \displaystyle\int_{-\omega}^{0} \theta(z_2(t+s))\, ds, \quad t \geqslant 0, \\ \dot{z}_2(t) = \rho - \theta(z_2(t)) z_1(t) - \delta z_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

$$z_1(0) = z_1^0 > 0, \quad z_2(\xi) = z_2^0(\xi) \geqslant 0 \text{ при } \xi \in [-\omega, 0]. \tag{2}$$

$z_1(t)$ — количество индивидуумов в популяции в момент времени t,
$z_2(t)$ — количество вредных веществ в момент времени t.

Скорость появления индивидуумов равна $\beta z_1(t)$, $\beta = \text{const} > 0$.
Количество индивидуумов, погибающих вследствие самолимитирования за малый промежуток времени $(t, t + dt)$, не зависит от их возраста и равно $\gamma z_1^2(t) dt$, $\gamma = \text{const} > 0$.
Вредное вещество оказывает непосредственное воздействие на индивидуумов независимо от их возраста.
Количество актов поглощения вредного вещества за малый промежуток времени $(t, t + dt)$ равно
$\frac{\sigma}{\omega} z_1(t) \int_{-\omega}^{0} \theta(z_2(t + s))\, ds\, dt$, где $\sigma = \text{const} > 0$, функция θ неотрицательна и непрерывно дифференцируема, $\theta(0) = 0$.
Запаздывание ω положительно и конечно.
$\rho = \text{const} > 0$ — скорость притока вредных веществ.
$\delta z_2(t)$ — скорость распада вредных веществ, $\delta = \text{const} > 0$.
Слагаемое $-\theta(z_2(t)) z_1(t)$ отвечает за поглощение вредных веществ индивидуумами.

В начальных условиях (2) число z_1^0 — количество индивидуумов в начальный момент времени, функция $z_2^0\colon [-\omega, 0] \to \mathbb{R}_+$ — первоначальное количество вредных веществ, функция z_2^0 непрерывна на отрезке $[-\omega, 0]$.

Пусть X — пространство непрерывных на отрезке $[0, T]$ (T — любое положительное наперёд заданное число) вектор-функций $z = \{z_1, z_2\}$, для которых при каждом $t \in [0, T]$ выполняются неравенства $z_1(t) \geqslant 0$, $0 \leqslant z_2(t) \leqslant C_0 = \max\{z_2^0(0), \frac{\rho}{\delta}\}$.

Теорема 1

Справедливы следующие утверждения:

а) *в пространстве X задача (1)–(2) однозначно разрешима;*

б) *задача (1)–(2) не имеет решений вне пространства X.*

Положение равновесия 1

Легко видеть, что у системы (1) есть положение равновесия $\left(0, \frac{\rho}{\delta}\right)$, соответствующее вырождению популяции. Для его исследования сделаем замену переменных $x_1(t) = z_1(t)$, $x_2(t) = z_2(t) - \frac{\rho}{\delta}$ и линеаризуем получившуюся систему.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \left(\beta - \sigma\theta\left(\dfrac{\rho}{\delta}\right)\right) x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = -\theta\left(\dfrac{\rho}{\delta}\right) x_1(t) - \delta x_2(t). \end{cases}$$

Теорема 2

Положение равновесия $\left(0, \frac{\rho}{\delta}\right)$ *системы* (1)–(2) *локально асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда* $\beta < \sigma\theta\left(\frac{\rho}{\delta}\right)$.

Положение равновесия 2

Кроме того, у системы (1) возможно нетривиальное положение равновесия (z_1^*, z_2^*), определяемое из соотношений
$z_1^* = \frac{1}{\gamma}(\beta - \sigma\theta(z_2^*))$,
$\gamma(\rho - \delta z_2^*) = \theta(z_2^*)(\beta - \sigma\theta(z_2^*))$.
Данное положение равновесия соответствует стабилизации численности популяции.
Сделаем в (1) замену переменных $x_1(t) = z_1(t) - z_1^*$, $x_2(t) = z_2(t) - z_2^*$ и линеаризуем получившуюся систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) + \mu x_1(t) + \kappa \int_{-\omega}^{0} x_2(t+s)\, ds = 0, \\ \dot{x}_2(t) + \nu x_1(t) + \lambda x_2(t) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\mu = \gamma z_1^*$, $\kappa = \frac{\sigma}{\omega} z_1^* \theta'(z_2^*)$, $\nu = \theta(z_2^*)$, $\lambda = z_1^* \theta'(z_2^*) + \delta$.

Характеристическая функция

Исследование устойчивости системы (2) сводится к изучению её характеристической функции

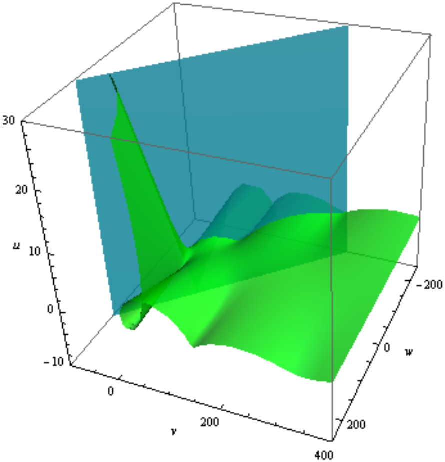
$$g(p) = \det \begin{pmatrix} p+\mu & \kappa\frac{1-e^{-p\omega}}{p} \\ \nu & p+\lambda \end{pmatrix} = p^2+(\mu+\lambda)p+\mu\lambda-\nu\kappa\frac{1-e^{-p\omega}}{p}.$$

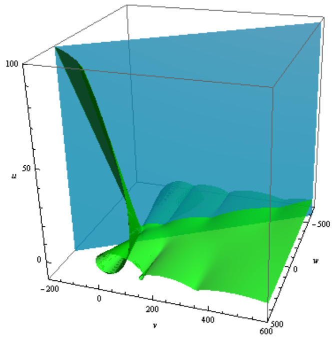
Изменением масштаба времени можно сделать $\omega = 1$, и, переобозначая параметры, получаем

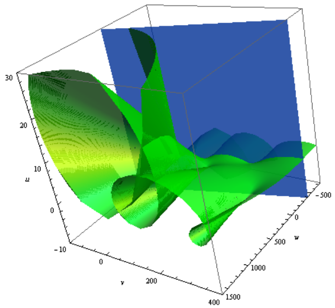
$$g(p) = p^2 + ap + b + c\frac{1-e^{-p}}{p}.$$

Рассмотрим в трёхмерном пространстве (u, v, w) плоскость $v + w = 0$ и поверхность Γ, заданную параметрически:

$$\Gamma = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3_+ : u = w\frac{1-\cos y}{y^2},\ v = y^2 - w\frac{\sin y}{y},\ y \in \mathbb{R}\}. \tag{4}$$




100
50
u
0
-200
0
200
400
600
v
-500
0
500
w


30
20
10
u
0
-10
0
v
200
400
-500
0
500
w
1000
1500

$\frac{a}{c} = const$

Поверхность Γ можно представить в виде семейства прямых на пучке плоскостей $\frac{u}{w} = const$:

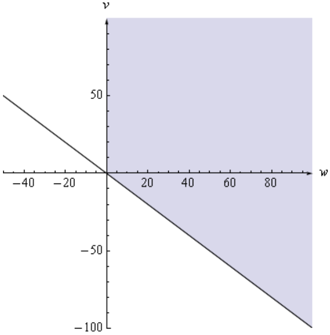
$$v = y^2 - w\frac{\sin y}{y}, \tag{5}$$

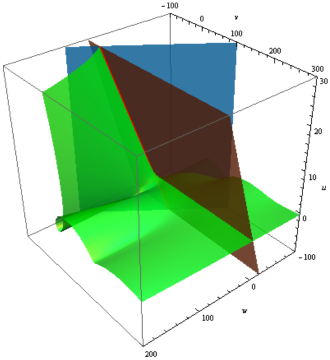
где y —все неотрицательные решения уравнения

$$\frac{u}{w} = \frac{1 - \cos y}{y^2}. \tag{6}$$

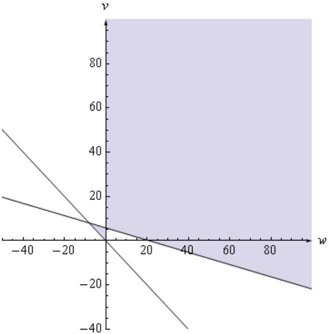
При каждом фиксированном $\frac{u}{w} \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ уравнение (6) имеет конечное число корней, обозначим их y_0, y_1, y_2 и т.д. и расположим по возрастанию. При $\frac{u}{w} = 0$ уравнение (6) имеет бесконечное множество корней: $y_j = 2\pi j$, $j \in \mathbb{N}$.

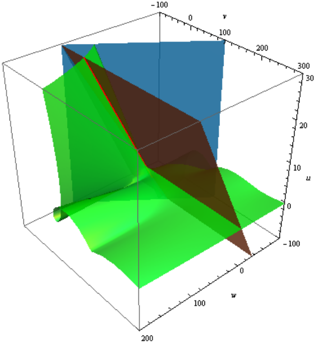
$\frac{u}{w} = \frac{1}{2}$



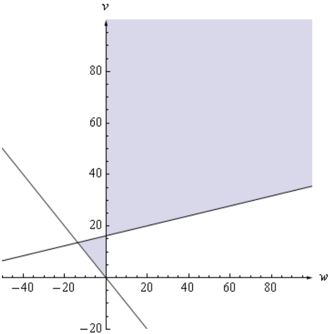


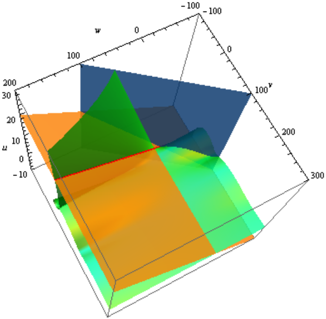
$\frac{u}{w} = 0.3$


v
80
60
40
20
w
−40
−20
20
40
60
80
−20
−40

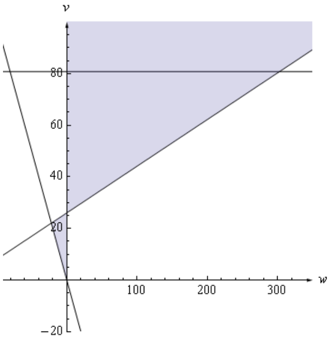

-100
0
v
100
200
300
30
20
10
u
0
-100
0
w
100
200

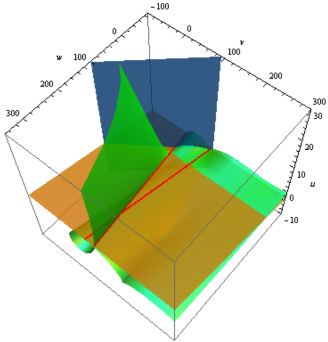
$\frac{u}{w} = 0.1$


v
80
60
40
20
−40
−20
20
40
60
80
w
−20

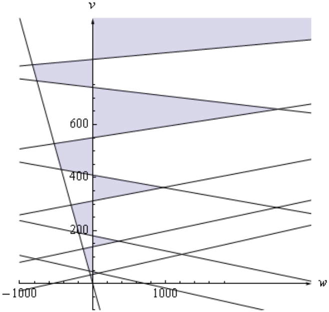

w
0
100
200
−100
−100
0
100
v
200
300
30
20
10
u
0
−10

$\frac{u}{w}$ — значение функции $\frac{1-\cos y}{y}$ в точке второго положительного максимума, $\frac{u}{w} \approx 0.023595$

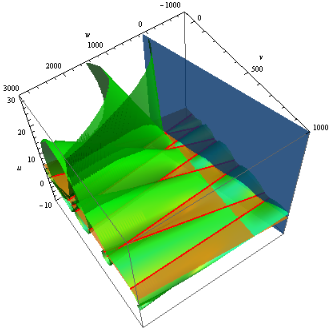




$\frac{u}{w} = 0.02$

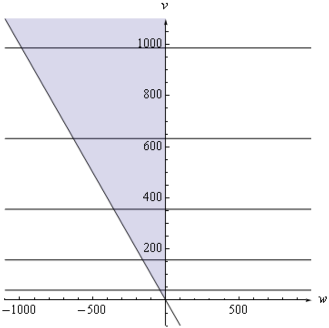


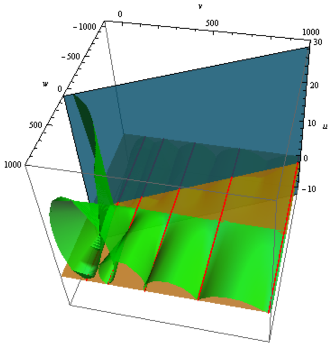
v
600
400
200
−1000
1000
w



−1000
0
w
1000
2000
3000
30
20
10
u
0
−10
v
500
1000

$\frac{u}{w} = 0$


v
1000
800
600
400
200
w
−1000
−500
500


v
0
500
1000
−1000
−500
w
0
500
1000
30
20
10
u
0
−10

Теорема 3

Для экспоненциальной устойчивости системы (3) необходимо и достаточно, чтобы точка (a, b, c) принадлежала области D.

Обозначим через $\bar{D}$ замыкание области D за исключением луча $\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \colon u = 2w \geqslant 0, v + w = 0, w \geqslant 0\}$.

Теорема 4

Для равномерной устойчивости системы (3) необходимо и достаточно, чтобы точка (a, b, c) принадлежала $\bar{D}$.

А.С. Баландин, Т.Л. Сабатулина, *Локальная устойчивость одной модели динамики популяции в условиях воздействия вредных веществ*, Сибирские электронные математические известия, **15** (2015), 610-624.

Спасибо за внимание!

1. А.Н. Пичугина, *Интегродифференциальная модель популяции, подверженной воздействию вредных веществ*, Сиб. журнал инд. матем., **VII**, 4(20) (2004), 130-140.
2. Н.В. Перцев, *Исследование решений инегральной модели Лотки–Вольтерра*, Сиб. журнал инд. матем., **II**, 2(4) (1999), 153-167.
3. Р.О. Карелина, Н.В. Перцев, *Построение двусторонних оценок для решений некоторых систем дифференциальных уравнений с последействием*, Сиб. журнал инд. матем., **VIII**, 4(24) (2005), 60-72.
4. Н.В. Перцев, Г.Е. Царегородцева, А.Н. Пичугина, *Анализ устойчивости положений равновесия одной модели популяционной динамики*, Вестник Омского университета, 2 (2009), 50-53.
5. А.С. Баландин, Т.Л. Сабатулина, *Локальная устойчивость одной модели динамики популяции в условиях воздействия вредных веществ*, Сибирские электронные математические известия, **15** (2015), 610-624.

$$\ddot{x} + (\delta + \varepsilon \cos t)x(t) = 0$$

Портрет устойчивости при $\varepsilon \approx 0$ (диаграмма Айнса–Стретта).

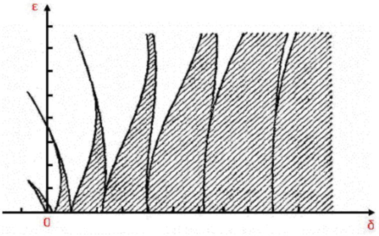


Диаграмма Айнса–Стретта: заштрихованные поля — области устойчивости маятника с вибрирующей точкой подвеса (для обычного маятника $\delta > 0$, для перевернутого маятника $\delta < 0$).

Уравнение Орра–Зоммерфельда

$$\left(v_0 - \frac{\omega}{k}\right)\left(\varphi' - k^2\varphi\right) - v_0''\varphi = \frac{i}{kR}\left(\varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi\right)$$

$$\varphi\big|_{z=\pm 1} = 0, \quad \varphi'\Big|_{z=\pm 1} = 0$$

Задача остается чрезвычайно сложной и впервые для плоского слоя была решена только в 1945 г. Линем. Поучительна история решения этого уравнения. Первые подходы были связаны с попытками решать уравнение Орра–Зоммерфельда с отброшенной правой частью. Соответствующее уравнение называют уравнением Релея. Отметим, что отбрасывая члены с φ^{IV}, мы лишаемся возможности использовать все граничные условия и можем требовать обращения в нуль только нормальной компоненты скорости (этому соответствует условие $\varphi|_{z=\pm 1} = 0$). Отбрасывание правой части мотивировалось тем, что она описывает действие вязкости, а вязкость, казалось, должна играть стабилизирующую роль. Результат решения уравнения Релея состоял в том, что оно оказывалось абсолютно устойчивым.

$$MA = \begin{pmatrix} -26191 & -\frac{83397}{2} & -15508 & -\frac{52381}{2} & -15720 \\ \frac{55143}{2} & \frac{95395}{6} & -8354 & \frac{72758}{3} & \frac{4213}{6} \\ 32724 & -\frac{133189}{3} & 8354 & -\frac{216257}{6} & \frac{60292}{3} \\ 9623 & -\frac{220817}{6} & 23862 & -\frac{38824}{3} & \frac{156131}{6} \\ -11003 & -11003 & 0 & -11003 & -\frac{22007}{2} \end{pmatrix}$$

$\lambda = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$

Если точные значения заменить машинным приближением

$$\begin{pmatrix} -26191. & -41698.5 & -15508. & -26190.5 & -15720. \\ 27571.5 & 15899.2 & -8354. & 24252.7 & 702.167 \\ 32724. & 44396.3 & 8354. & 36042.8 & 20097.3 \\ 9623. & 36802.8 & 23862. & 12941.3 & 26021.8 \\ -11003. & -11003. & 0. & -11003. & -11003.5 \end{pmatrix}$$

$\lambda = (12.2213, 3.74891 + 11.5986i, 3.74891 - 11.5986i, -9.85956 + 7.13573i, -9.85956 - 7.13573i)$