Использование малосжимаемых и несжимаемых моделей для упругого тела при FSI

В. Саламатова[1,2], А. Лозовский[3], М. Ольшанский[4], Ю. Василевский[1,2]

[1]ИВМ РАН, [2]МФТИ, [3]Texas A&M University, [4]University of Houston

Рабочая группа по моделированию кровотока и сосудистых патологий (ИВМ РАН) грант РНФ 14-31-00024 (новые лаборатории)

VII конференция по математическим моделям и численным методам в биологии и медицине

Москва, 2015

Несжимаемый и малосжимаемый материалы

- находждение констант – несжимаемый материал

  $W = W(I_1, I_2, I_3)$;

  $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2; \quad I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2; \quad I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = J^2;$

  например, для неогуковского материала $W = \dfrac{\mu}{2}(I_1 - 3)$.

Несжимаемый и малосжимаемый материалы

- находждение констант – несжимаемый материал

  $W = W(I_1, I_2, I_3);$

  $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2; \quad I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2; \quad I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = J^2;$

  например, для неогуковского материала $W = \dfrac{\mu}{2}(I_1 - 3).$

- коммерческие конечно-элементные коды (ANSYS, ABAQUS) – малосжимаемый материал

  $W = \psi(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + F(J);$

  $\bar{I}_1 = I_1/J^{2/3}; \bar{I}_2 = I_2/J^{4/3};$

  например, для неогуковского материала $W = \dfrac{\mu}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \dfrac{\kappa}{2}(J - 1)^2.$

Несжимаемый и малосжимаемый материалы

- находждение констант – несжимаемый материал

$$W = W(I_1, I_2, I_3);$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2; \quad I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2; \quad I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = J^2;$$

например, для неогуковского материала $W = \dfrac{\mu}{2}(I_1 - 3)$.

- коммерческие конечно-элементные коды (ANSYS, ABAQUS) – малосжимаемый материал

$$W = \psi(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + F(J);$$

$$\bar{I}_1 = I_1/J^{2/3}; \bar{I}_2 = I_2/J^{4/3};$$

например, для неогуковского материала $W = \dfrac{\mu}{2}(\bar{I}_1 - 3) + \dfrac{\kappa}{2}(J-1)^2$.

- о константах

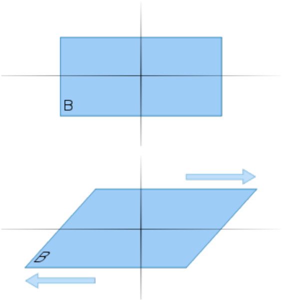
$$\kappa/\mu = 2(1+\nu)/[2(1-2\nu)];$$

$$\kappa/\mu >> 1;$$

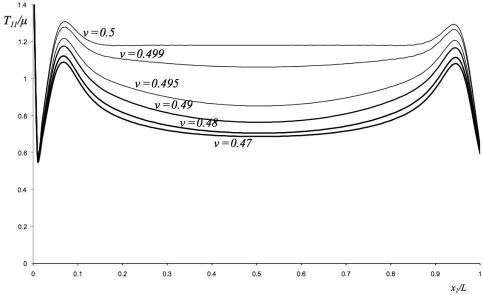
$$\kappa/\mu = 50, 500, 5000 \rightarrow \nu = 0.49, 0.499, 0.4999;$$

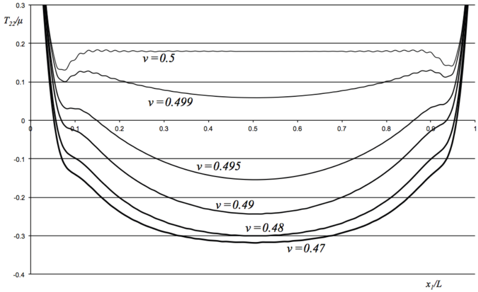
ABAQUS: $\kappa/\mu = 20 \rightarrow \nu = 0.475$

Анализ чувствительности. Простой сдвиг.



Destrade et al., 2012





Взаимодействие жидкости и упругой структуру (FSI)

- области до деформации Ω_f, Ω_s

Взаимодействие жидкости и упругой структуру (FSI)

- области до деформации Ω_f, Ω_s
- отображение Φ переводит Ω_f, Ω_s в $\Omega_f(t)$, $\Omega_s(t)$

Взаимодействие жидкости и упругой структуру (FSI)

- области до деформации Ω_f, Ω_s
- отображение Φ переводит Ω_f, Ω_s в $\Omega_f(t)$, $\Omega_s(t)$
- $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ — скорость и перемещение в $\widehat{\Omega} := \Omega_f \cup \Omega_s$

Взаимодействие жидкости и упругой структуру (FSI)

- области до деформации Ω_f, Ω_s
- отображение Φ переводит Ω_f, Ω_s в $\Omega_f(t)$, $\Omega_s(t)$
- $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ — скорость и перемещение в $\widehat{\Omega} := \Omega_f \cup \Omega_s$
- $\Phi(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{F} := \nabla\Phi = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}$, $J := \det(\mathbf{F})$

Взаимодействие жидкости и упругой структуру (FSI)

- области до деформации Ω_f, Ω_s
- отображение Φ переводит Ω_f, Ω_s в $\Omega_f(t)$, $\Omega_s(t)$
- $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ — скорость и перемещение в $\widehat{\Omega} := \Omega_f \cup \Omega_s$
- $\Phi(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{F} := \nabla\Phi = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}$, $J := \det(\mathbf{F})$
- $\boldsymbol{\sigma}_f$, $\boldsymbol{\sigma}_s$ — тензор напряжения Коши в жидкости и упругом теле

Взаимодействие жидкости и упругой структуру (FSI)

- области до деформации Ω_f, Ω_s
- отображение Φ переводит Ω_f, Ω_s в $\Omega_f(t)$, $\Omega_s(t)$
- $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ — скорость и перемещение в $\widehat{\Omega} := \Omega_f \cup \Omega_s$
- $\Phi(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{F} := \nabla\Phi = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}$, $J := \det(\mathbf{F})$
- $\boldsymbol{\sigma}_f$, $\boldsymbol{\sigma}_s$ — тензор напряжения Коши в жидкости и упругом теле
- p_f,p_s — давления в жидкости и упругом теле

Взаимодействие жидкости и упругой структуру (FSI)

- области до деформации Ω_f, Ω_s
- отображение Φ переводит Ω_f, Ω_s в $\Omega_f(t)$, $\Omega_s(t)$
- $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ — скорость и перемещение в $\widehat{\Omega} := \Omega_f \cup \Omega_s$
- $\Phi(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{F} := \nabla\Phi = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}$, $J := \det(\mathbf{F})$
- $\boldsymbol{\sigma}_f$, $\boldsymbol{\sigma}_s$ — тензор напряжения Коши в жидкости и упругом теле
- p_f, p_s — давления в жидкости и упругом теле
- ρ_f, ρ_s — плотности жидкости и упругого тела (константы)

задача FSI

Уравнения движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \begin{cases} \rho_s^{-1} \mathrm{div}\left(J \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{F}^{-T}\right) & \text{в } \Omega_s, \\ (J\rho_f)^{-1} \mathrm{div}\left(J \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{F}^{-T}\right) - \nabla \mathbf{v} \left(\mathbf{F}^{-1}\left(\mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)\right) & \text{в } \Omega_f \end{cases}$$

задача FSI

Уравнения движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \begin{cases} \rho_s^{-1}\mathrm{div}\left(J\boldsymbol{\sigma}_s\mathbf{F}^{-T}\right) & \text{в } \Omega_s, \\ (J\rho_f)^{-1}\mathrm{div}\left(J\boldsymbol{\sigma}_f\mathbf{F}^{-T}\right) - \nabla\mathbf{v}\left(\mathbf{F}^{-1}\left(\mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)\right) & \text{в } \Omega_f \end{cases}$$

кинематическое уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v} \quad \text{в } \Omega_s$$

задача FSI

Уравнения движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \begin{cases} \rho_s^{-1} \mathrm{div}\left(J\boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{F}^{-T}\right) & \text{в } \Omega_s, \\ (J\rho_f)^{-1} \mathrm{div}\left(J\boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{F}^{-T}\right) - \nabla \mathbf{v} \left(\mathbf{F}^{-1}\left(\mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)\right) & \text{в } \Omega_f \end{cases}$$

кинематическое уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v} \quad \text{в } \Omega_s$$

Условие несжимаемости для жидкости

$$\mathrm{div}\left(J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{v}\right) = 0 \quad \text{в } \Omega_f \quad \text{или} \quad J\nabla \mathbf{v} : \mathbf{F}^{-T} = 0 \quad \text{в } \Omega_f$$

задача FSI

Уравнения движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \begin{cases} \rho_s^{-1}\mathrm{div}\left(J\boldsymbol{\sigma}_s\mathbf{F}^{-T}\right) & \text{в } \Omega_s, \\ (J\rho_f)^{-1}\mathrm{div}\left(J\boldsymbol{\sigma}_f\mathbf{F}^{-T}\right) - \nabla\mathbf{v}\left(\mathbf{F}^{-1}\left(\mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)\right) & \text{в } \Omega_f \end{cases}$$

кинематическое уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v} \quad \text{в } \Omega_s$$

Условие несжимаемости для жидкости

$$\mathrm{div}\left(J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{v}\right) = 0 \quad \text{в } \Omega_f \quad \text{или} \quad J\nabla\mathbf{v} : \mathbf{F}^{-T} = 0 \quad \text{в } \Omega_f$$

Определяющие соотношения в случае жидкости

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -p_f\mathbf{I} + \mu_f((\nabla\mathbf{v})\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T}(\nabla\mathbf{v})^T) \quad \text{в } \Omega_f$$

задача FSI

Определяющие соотношения в случае упругого тела

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \boldsymbol{\sigma}_s(J, \mathbf{F}, p_s, \lambda_s, \mu_s, \dots) \quad \text{в } \Omega_s$$

задача FSI

Определяющие соотношения в случае упругого тела

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \boldsymbol{\sigma}_s(J, \mathbf{F}, p_s, \lambda_s, \mu_s, \dots) \quad \text{в } \Omega_s$$

Продолжения поля перемещний в область жидкости

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}) = 0 \quad & \text{в } \Omega_f, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad & \text{на } \partial\Omega_f. \end{aligned}$$

задача FSI

Определяющие соотношения в случае упругого тела

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \boldsymbol{\sigma}_s(J, \mathbf{F}, p_s, \lambda_s, \mu_s, \dots) \quad \text{в } \Omega_s$$

Продолжения поля перемещний в область жидкости

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}) &= 0 \quad \text{в } \Omega_f, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* \quad \text{на } \partial\Omega_f. \end{aligned}$$

например

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\lambda_m(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{I} + \mu_m(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)\right) &= 0 \quad \text{в } \Omega_f \\ \Delta\mathbf{u} &= 0 \quad \text{в } \Omega_f \end{aligned}$$

задача FSI

Начальные и граничные условия

Начальные условия

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \;\text{ в } \widehat{\Omega}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \;\text{ в } \widehat{\Omega}$$

Начальные условия

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0)=\mathbf{0}\ \text{ в } \widehat{\Omega},\quad \mathbf{v}(\mathbf{x},0)=\mathbf{v}_0(\mathbf{x})\ \text{ в } \widehat{\Omega}$$

Условие на границе

$$\boldsymbol{\sigma}_f\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}=\boldsymbol{\sigma}_s\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}\quad \text{on } \Gamma_{fs}$$

Начальные условия

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \ \text{ в } \widehat{\Omega}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \ \text{ в } \widehat{\Omega}$$

Условие на границе

$$\boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{F}^{-T}\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{F}^{-T}\mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_{fs}$$

Граничные условия на втоке/вытоке Γ_{f0} / Γ_{out}, на границе упругой области Γ_{s0}

$$\mathbf{v} = \mathbf{g} \ \text{ на } \Gamma_{f0}, \quad \boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{F}^{-T}\mathbf{n} = \mathbf{0} \ \text{ на } \Gamma_{\mathrm{out}}$$

$$\mathbf{u} = 0 \ \text{ на } \Gamma_{s0} \cup \Gamma_{f0} \cup \Gamma_{\mathrm{out}}$$

Численная схема

Найти $\{\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}^{k+1}, p^{k+1}\} \in \mathbb{V}_h^0 \times \mathbb{V}_h \times \mathbb{Q}_h$ s.t.

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{g}_h(\cdot, (k+1)\Delta t) \text{ on } \Gamma_{f0}, \quad \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right]_{k+1} = \mathbf{v}^{k+1} \text{ on } \Gamma_{fs}$$

где

$$\mathbb{V}_h \subset H^1(\widehat{\Omega})^3, \mathbb{Q}_h \subset L^2(\widehat{\Omega}), \mathbb{V}_h^0 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V}_h : \mathbf{v}|_{\Gamma_{s0} \cup \Gamma_{f0}} = \mathbf{0}\}, \mathbb{V}_h^{00} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V}_h^0 : \mathbf{v}|_{\Gamma_{fs}} = \mathbf{0}\}$$

Численная схема

Найти $\{\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}^{k+1}, p^{k+1}\} \in \mathbb{V}_h^0 \times \mathbb{V}_h \times \mathbb{Q}_h$ s.t.

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{g}_h(\cdot, (k+1)\Delta t) \text{ on } \Gamma_{f0}, \quad \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right]_{k+1} = \mathbf{v}^{k+1} \text{ on } \Gamma_{fs}$$

где

$$\mathbb{V}_h \subset H^1(\widehat{\Omega})^3, \mathbb{Q}_h \subset L^2(\widehat{\Omega}), \mathbb{V}_h^0 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V}_h \,:\, \mathbf{v}|_{\Gamma_{s0} \cup \Gamma_{f0}} = \mathbf{0}\}, \mathbb{V}_h^{00} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V}_h^0 \,:\, \mathbf{v}|_{\Gamma_{fs}} = \mathbf{0}\}$$

$$J_k = J(\widetilde{\mathbf{u}}^k), \quad \widetilde{\mathbf{f}}^k = 2\mathbf{f}^k - \mathbf{f}^{k-1}, \quad \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right]_{k+1} = \frac{3\mathbf{f}^{k+1} - 4\mathbf{f}^k + \mathbf{f}^{k-1}}{2\Delta t}$$

$$\{\mathbf{A}\}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \mathbf{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \{\nabla \mathbf{v} \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{u})\}_s.$$

Численная схема

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right]_{k+1} \psi \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_s} J_k \mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{u}}^k)\mathbf{S}(\mathbf{u}^{k+1}, \widetilde{\mathbf{u}}^k) : \nabla \psi \, \mathrm{d}\Omega +$$

$$\int_{\Omega_f} \rho_f J_k \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right]_{k+1} \psi \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_f} \rho_f J_k \nabla \mathbf{v}^{k+1} \mathbf{F}^{-1}(\widetilde{\mathbf{u}}^k) \left(\widetilde{\mathbf{v}}^k - \widetilde{\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right]}_k\right) \psi \, \mathrm{d}\Omega +$$

$$\int_{\Omega_f} 2\mu_f J_k \mathbf{D}_{\widetilde{\mathbf{u}}^k} \mathbf{v}^{k+1} : \mathbf{D}_{\widetilde{\mathbf{u}}^k} \psi \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} p^{k+1} J_k \mathbf{F}^{-T}(\widetilde{\mathbf{u}}^k) : \nabla \psi \, \mathrm{d}\Omega = 0 \quad \forall \psi \in \mathbb{V}_h^{\mathbf{0}},$$

Численная схема

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right]_{k+1} \psi \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_s} J_k \mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{u}}^k) \mathbf{S}(\mathbf{u}^{k+1}, \widetilde{\mathbf{u}}^k) : \nabla \psi \, \mathrm{d}\Omega +$$
$$\int_{\Omega_f} \rho_f J_k \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right]_{k+1} \psi \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_f} \rho_f J_k \nabla \mathbf{v}^{k+1} \mathbf{F}^{-1}(\widetilde{\mathbf{u}}^k) \left(\widetilde{\mathbf{v}}^k - \widetilde{\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right]}_k \right) \psi \, \mathrm{d}\Omega +$$
$$\int_{\Omega_f} 2\mu_f J_k \mathbf{D}_{\widetilde{\mathbf{u}}^k} \mathbf{v}^{k+1} : \mathbf{D}_{\widetilde{\mathbf{u}}^k} \psi \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} p^{k+1} J_k \mathbf{F}^{-T}(\widetilde{\mathbf{u}}^k) : \nabla \psi \, \mathrm{d}\Omega = 0 \quad \forall \psi \in \mathbb{V}_h^{\mathbf{0}},$$

$$\int_{\Omega_s} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right]_{k+1} \phi \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega_s} \mathbf{v}^{k+1} \phi \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_f} G(\mathbf{u}^{k+1}) \phi \, \mathrm{d}\Omega = 0 \quad \forall \phi \in \mathbb{V}_h^{\mathbf{00}},$$

Численная схема

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right]_{k+1} \psi \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_s} J_k \mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{u}}^k)\mathbf{S}(\mathbf{u}^{k+1}, \widetilde{\mathbf{u}}^k) : \nabla\psi \,\mathrm{d}\Omega +$$
$$\int_{\Omega_f} \rho_f J_k \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right]_{k+1} \psi \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_f} \rho_f J_k \nabla \mathbf{v}^{k+1}\mathbf{F}^{-1}(\widetilde{\mathbf{u}}^k)\left(\widetilde{\mathbf{v}}^k - \widetilde{\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right]}_k\right) \psi \,\mathrm{d}\Omega +$$
$$\int_{\Omega_f} 2\mu_f J_k \mathbf{D}_{\widetilde{\mathbf{u}}^k}\mathbf{v}^{k+1} : \mathbf{D}_{\widetilde{\mathbf{u}}^k}\psi \,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} p^{k+1} J_k \mathbf{F}^{-T}(\widetilde{\mathbf{u}}^k) : \nabla\psi \,\mathrm{d}\Omega = 0 \quad \forall \psi \in \mathbb{V}_h^{\mathbf{0}},$$

$$\int_{\Omega_s} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right]_{k+1} \phi \,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega_s} \mathbf{v}^{k+1}\phi \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_f} G(\mathbf{u}^{k+1})\phi \,\mathrm{d}\Omega = 0 \quad \forall \phi \in \mathbb{V}_h^{\mathbf{00}},$$

$$\int_{\Omega_f} J_k \nabla \mathbf{v}^{k+1} : \mathbf{F}^{-T}(\widetilde{\mathbf{u}}^k) q \,\mathrm{d}\Omega = 0 \quad \forall\ q \in \mathbb{Q}_h$$

Численная схема

$$\ldots + \int_{\Omega_s} J_k \mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{u}}^k)\mathbf{S}(\mathbf{u}^{k+1}, \widetilde{\mathbf{u}}^k) : \nabla\psi \, \mathrm{d}\Omega + \ldots$$

- материал Сен-Венана-Кирхгоффа:

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \lambda_s \mathtt{tr}(\mathbf{E}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2))\mathbf{I} + 2\mu_s \mathbf{E}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2);$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \{\mathbf{F}(\mathbf{u}_1)^T \mathbf{F}(\mathbf{u}_2) - \mathbf{I}\}_s$$

- несжимаемый Неогуковский материал:

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{I}; \;\; \mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{u}}^k) \to \mathbf{F}(\mathbf{u}^{k+1})$$

где

$$\{\mathbf{A}\}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T).$$

Численная схема

$$\ldots + \int_{\Omega_f} G(\mathbf{u}^{k+1})\phi \,\mathrm{d}\Omega = 0$$

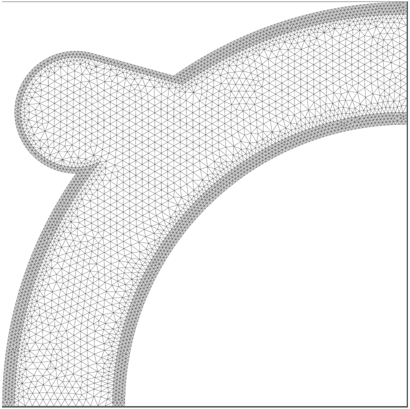
- уравнение линейной упругости:

$$\int_{\Omega_f} (2\mu_m\{\nabla \mathbf{u}^{k+1}\}_s : \nabla\phi + \lambda_m \mathrm{div}\,\mathbf{u}^{k+1} \mathrm{div}\,\phi)\,\mathrm{d}\Omega$$

- уравнение Лапласа:

$$\int_{\Omega_f} \nabla \mathbf{u}^{k+1} \nabla \phi \,\mathrm{d}\Omega$$

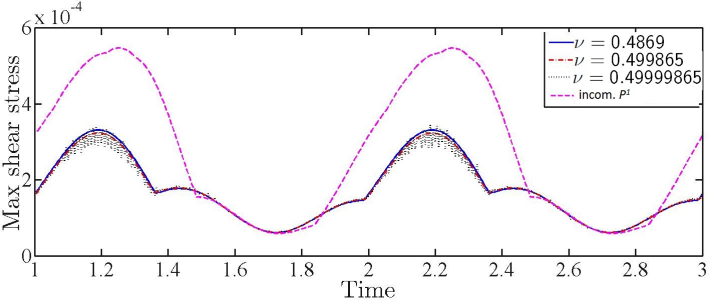
Течение крови в сосуде с аневризмой

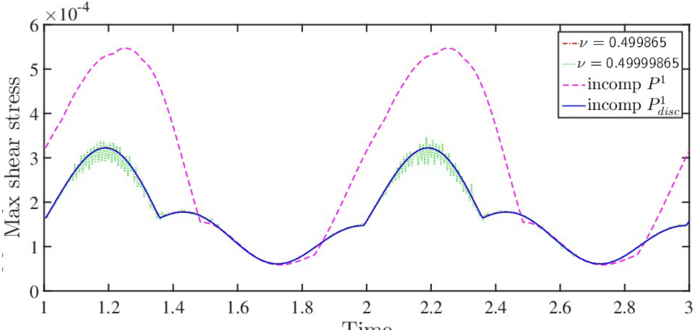


Turek et al., 2010

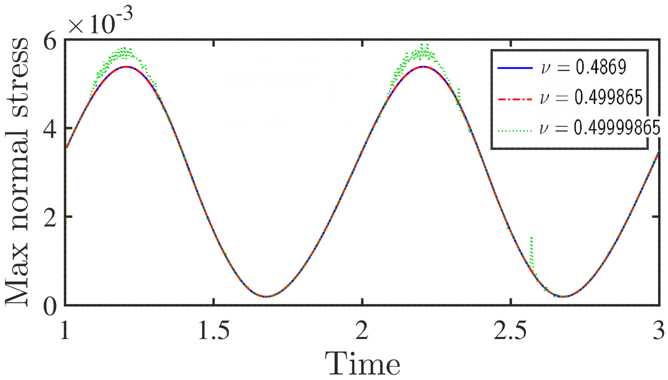
- несжимаемый неогуковский материал
- сжимаемый неогуковский материал
  $\kappa/\mu \approx 37, 3700, 370000$
  $\downarrow$
  $\nu =$
  $0.4869, 0.499865, 0.49999865$

Течение крови в сосуде с аневризмой





Течение крови в сосуде с аневризмой



Выводы

- несжимаемость – идеализация
- аккуратное определение объемного модуля
- согласно нашим расчетам, учет сжимаемости не влияет на нормальные и касательные напряжения на границе