Локальная устойчивость модели динамики популяции с тремя стадиями развития

Мулюков Михаил Вадимович

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, научно-исследовательский центр «Функционально-дифференциальные уравнения»

Москва, 30 октября - 3 ноября 2015 г.

Модель популяционной динамики

Перцев Н. В., Тарасов И. А.

Анализ решений интегродифференциального уравнения, возникающего в динамике популяций, Вестник Омского университета **2**, 13–15 (2003).

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) =& \rho z(t) - \mu y(t) - \rho e^{-\mu\tau_1} z(t-\tau_1),\ t>0, \\ y(0) =& y_0 > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) =& \rho e^{-\mu\tau_1} z(t-\tau_1) - \lambda\big(z(t)\big) z(t) - \\ & - \rho e^{-\mu\tau_1 - \int_{t-\tau_2}^{t} \lambda(z(s))ds} z(t-\tau_1-\tau_2),\ t>0, \\ z(t) =& \psi(t) > 0,\ t \in (-\tau_1-\tau_2, 0]. \end{aligned} \tag{2}$$

Допущения и обозначения

- y — численность ювенильных особей (ещё не дающих потомство);
- z — численность репродуктивных (зрелых) особей;
- $\tau_1 > 0$ — длительность ювенильной стадии;
- $\tau_2 > 0$ — длительность репродуктивной стадии;
- $\rho > 0$ — скорость производства потомства в расчёте на одну зрелую особь;
- $\mu > 0$ — интенсивность гибели ювенильн. особей;
- $\lambda = \lambda(z)$ — интенсивность гибели зрелых особей вследствие конкуренции ($\lambda \in C(0, \infty)$, $\lambda(0) = 0$, $\lim \lambda(z)_{z \to +\infty} = +\infty$, возрастающая, локально липшицева).

Решение уравнения (1)

$$y(t) = y(0)e^{-\mu t} + \\ + \rho \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \Big(z(s) - e^{-\mu\tau_1} z^\tau(s-\tau_1) \Big) ds. \tag{3}$$

$$z^\tau(t) = \begin{cases} z(t), & t > 0, \\ \psi(t), & t \in (-\tau_1, 0]. \end{cases}$$

- $\sup_{t>0} |z(t)| < \infty \Rightarrow y$ — Р.У.
- $\exists \sigma, M > 0\colon |z(t)| < Me^{-\sigma t} \Rightarrow y$ — Э.У.

Точки равновесия уравнения (2)

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) =& \rho e^{-\mu\tau_1} z(t-\tau_1) - \lambda\big(z(t)\big)z(t) - \\ &- \rho e^{-\mu\tau_1 - \int_{t-\tau_2}^{t} \lambda(z(s))ds} z(t-\tau_1-\tau_2).\end{aligned} \tag{2}$$

1) $z = y = 0$;
   $\rho\tau_2 e^{-\mu\tau_1} < 1 \Rightarrow$ Э.У.; $\quad \rho\tau_2 e^{-\mu\tau_1} \leqslant 1 \Rightarrow$ Р.У.;
2) $z^* > 0$, $y^* = \rho z^*(1 - e^{-\mu\tau_1})/\mu > 0$,
   где z^* — положительное решение уравнения

$$\rho\tau_2 e^{-\mu\tau_1}(1 - e^{-\lambda(z)\tau_2}) = \lambda(z)\tau_2. \tag{4}$$

Существует $\Leftrightarrow \rho\tau_2 e^{-\mu\tau_1} > 1$.

Обозначения

Пусть λ непрерывно дифференцируема в точке z^*.

$$w = \lambda(z^*)\tau_2 > 0, \quad v = \lambda'(z^*)z^*\tau_2 \geqslant 0, \quad \tau = \tau_1/\tau_2.$$

$$\alpha = v + w > 0, \quad \beta = \frac{w}{1 - e^{-w}} > 1,$$

$$\gamma = \beta - w = \frac{w}{e^w - 1} \in (0, 1), \quad \delta = \gamma v = \frac{wv}{e^w - 1} \geqslant 0.$$

Линеаризация уравнения (2) вблизи нетривиального положения равновесия

$$\dot{x}(t)+\alpha x(t)-\beta x(t-\tau)+\gamma x(t-1-\tau)-\delta\int_{t-1}^{t} x(s)ds=0, \tag{5}$$

$$\alpha=v+w>0, \quad \beta=\frac{w}{1-e^{-w}}>1,$$

$$\gamma=\beta-w=\frac{w}{e^{w}-1}\in(0,1), \quad \delta=\gamma v=\frac{wv}{e^{w}-1}\geqslant 0.$$

Предварительный результат

$$V(w) = \frac{2w}{e^w - 1 - w}$$

Теорема 1

Если $v > V(w)$, то уравнение (5) асимптотически устойчиво.

Доказательство.

Применим к уравнению (5) известный признак устойчивости: если $\alpha > 0$ и $\alpha > \beta + \gamma + \delta$, то данное уравнение экспоненциально устойчиво.

Предварительный результат

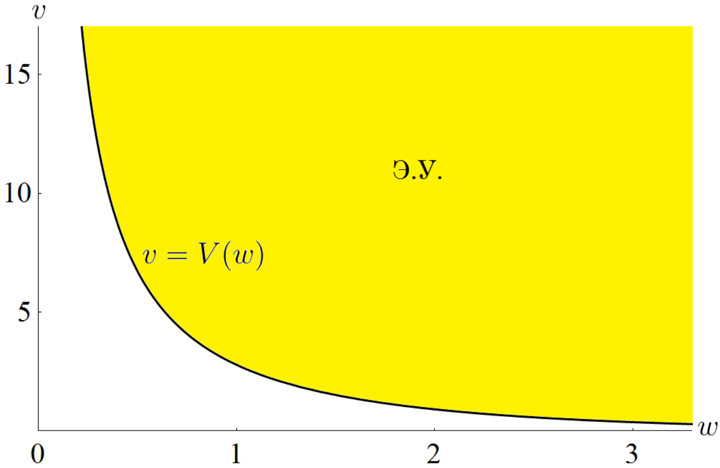

Рис.: Достаточный признак устойчивости уравнения (5)

ФДУ и его характеристическая функция при условии $\tau_1 = \tau_2$

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) - \beta x(t-1) + \gamma x(t-2) - \delta \int_{t-1}^{t} x(s)ds = 0. \tag{6}$$

$$F(z) = z + \alpha - \beta e^{-z} + \gamma e^{-2z} - \delta \frac{1 - e^{-z}}{z}. \tag{7}$$

$$\alpha = v + w, \quad \beta = \gamma + w, \quad \delta = v\gamma, \quad \gamma = \frac{w}{e^w - 1}.$$

ФДУ и его характеристическая функция при условии $\tau_1 = \tau_2$

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) - \beta x(t-1) + \gamma x(t-2) - \delta \int_{t-1}^{t} x(s)ds = 0. \tag{6}$$

$$F(z) = z + \alpha - \beta e^{-z} + \gamma e^{-2z} - \delta \frac{1 - e^{-z}}{z}. \tag{7}$$

$$\alpha = v + w, \quad \beta = \gamma + w, \quad \delta = v\gamma, \quad \gamma = \frac{w}{e^w - 1}.$$

Случай $\lambda(z) = wz$ рассмотрен в работе

Малыгина В. В., Мулюков М. В., Перцев Н. В.

О локальной устойчивости одной модели динамики популяции с последействием, Сибирские электронные математические известия **11**, 951–957 (2014).

Известные результаты

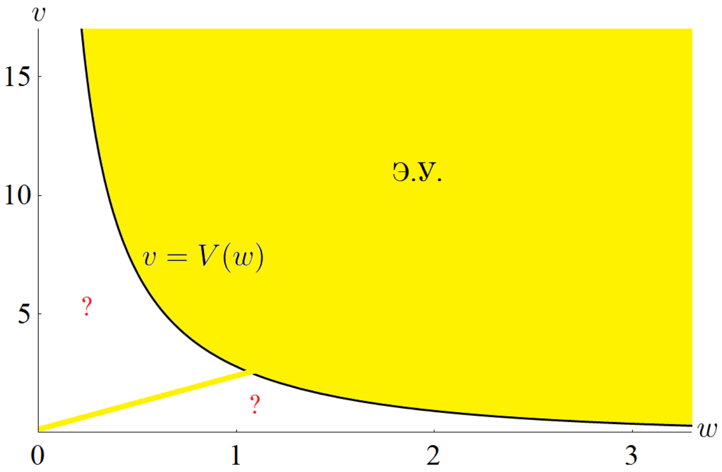

Рис.: Достаточный признак устойчивости уравнения (6)

Замена переменных и характеристическая функция

$$F(z) = z + \alpha - \beta e^{-z} + \gamma e^{-2z} - \delta \frac{1 - e^{-z}}{z}. \tag{7}$$

$$\alpha = v + w, \quad \beta = (\eta + \gamma)/2, \quad w = (\eta - \gamma)/2, \quad \delta = v\gamma.$$

$$F(z) = z + \left(v + \frac{\eta - \gamma}{2} \right) - \frac{\eta + \gamma}{2} e^{-z} + \gamma e^{-2z} - v\gamma \frac{1 - e^{-z}}{z}. \tag{8}$$

Связь между переменными: кривая κ.

$$\gamma = \kappa(\eta): \qquad \gamma = \frac{w}{e^w - 1}, \qquad \eta = \frac{w(2e^w - 1)}{e^w - 1}.$$

$$\kappa \in \Pi = \{(\eta, \gamma) : \eta > 1, 0 < \gamma < 1\}.$$

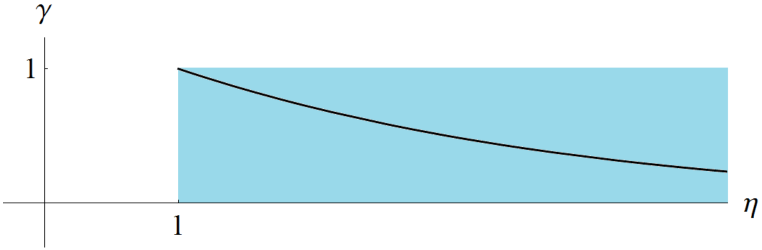

Рис.: Полоса Π

Характеристическая функция и D-разбиение

$$F(z) = z + \left(v + \frac{\eta - \gamma}{2}\right) - \frac{\eta + \gamma}{2} e^{-z} + \gamma e^{-2z} - v\gamma \frac{1 - e^{-z}}{z}. \quad (9)$$

$$F(0) = 0 \Leftrightarrow v(1 - \gamma) = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

$$\begin{cases} \eta(1 - \cos\varphi) + \gamma\left(1 - \cos\varphi + \dfrac{2v\sin\varphi}{\varphi}\right) = -2\varphi\sin\varphi + 2v\cos\varphi, \\ -\eta\sin\varphi + \gamma\left(\dfrac{2v(1 - \cos\varphi)}{\varphi} + 3\sin\varphi\right) = 2\varphi\cos\varphi + 2v\sin\varphi. \end{cases} \quad (10)$$

Решение системы (10)

$$\begin{cases} \eta = -\dfrac{\frac{2v^2(1-\cos\varphi)}{\varphi} + v\sin\varphi(3-4\cos\varphi) + \varphi(1-\cos\varphi)(3+4\cos\varphi)}{2(1-\cos\varphi)(\sin\varphi + v/\varphi)}, \\ \gamma = \dfrac{v\sin\varphi - \varphi(1-\cos\varphi)}{2(1-\cos\varphi)(\sin\varphi + v/\varphi)}. \end{cases} \tag{11}$$

Система (11) задаёт семейство параметрически заданных кривых $\gamma = g_v(\eta)$ $(v \geqslant 0)$.

Взаимное расположение кривых κ, g_0

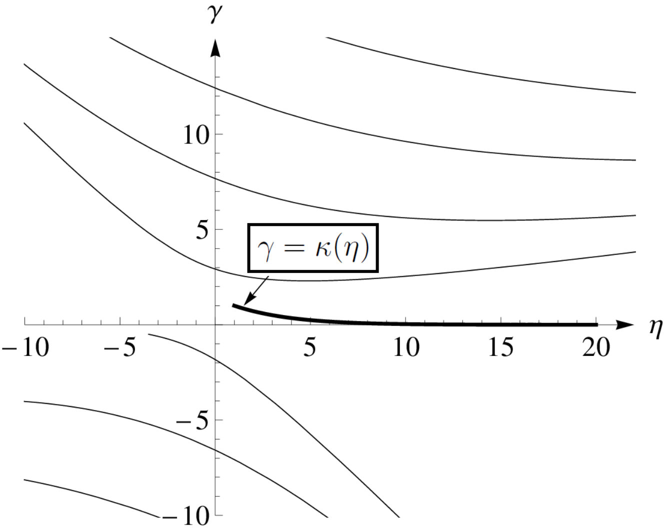

Рис.: Кривые $\gamma = \kappa(\eta)$ и $\gamma = g_0(\eta)$

Взаимное расположение кривых κ, g_4

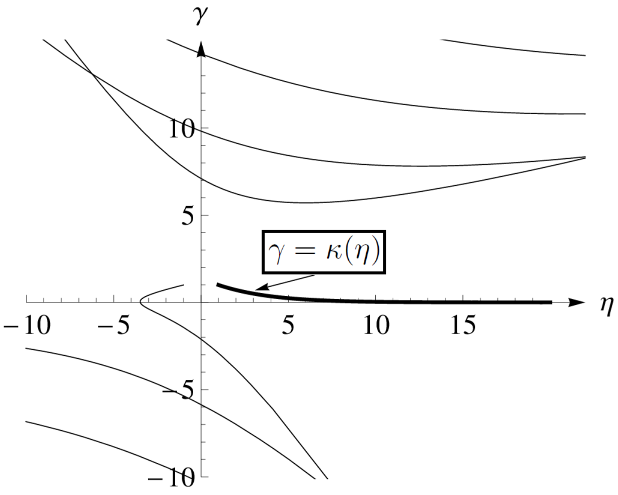

Рис.: Кривые $\gamma = \kappa(\eta)$ и $\gamma = g_4(\eta)$

Взаимное расположение кривых κ, g_{10}

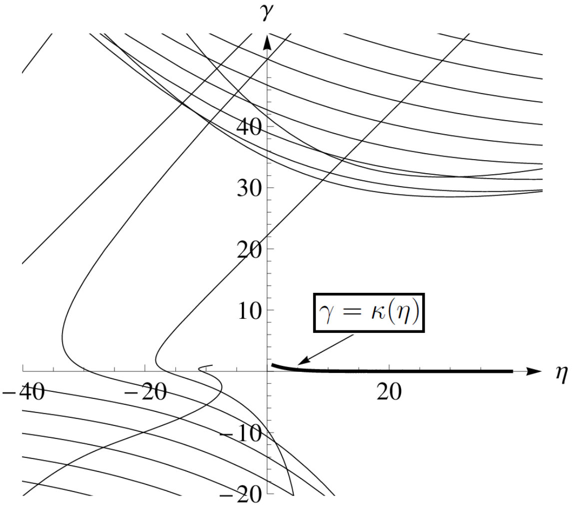

Рис.: Кривые $\gamma = \kappa(\eta)$ и $\gamma = g_{10}(\eta)$

Взаимное расположение кривых $\varkappa$, g_v

Лемма 1

Характеристическая функция уравнения (6) не имеет корней на мнимой оси ни при каком $v > 0$.

Лемма 2

При $v = 0$ характеристическая функция уравнения (6) не имеет иных корней на мнимой оси, кроме простого корня $z = 0$.

Основные результаты

Теорема 2

Уравнение (6) экспоненциально устойчиво при любых $v, w > 0$.

Теорема 3

Уравнение (6) равномерно устойчиво при $v = 0, w > 0$, а его фундаментальное решение при некотором $\nu > 0$ представимо в виде

$$X(t) = \frac{1 - e^{-w}}{1 + w - (2w + 1)e^{-w}} + O(e^{-\nu t}).$$

Теорема 4

Положение равновесия y^*, z^* системы уравнений (1),(2) локально экспоненциально устойчиво при любых $v, w > 0$.

Область устойчивости

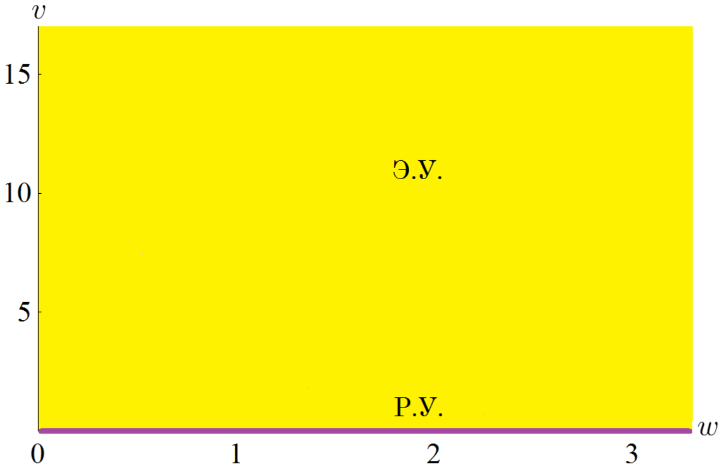

Рис.: Критерий устойчивости уравнения (6)

Спасибо за внимание!