

**VII конференция по математическим моделям и численным
методам в биологии и медицине**

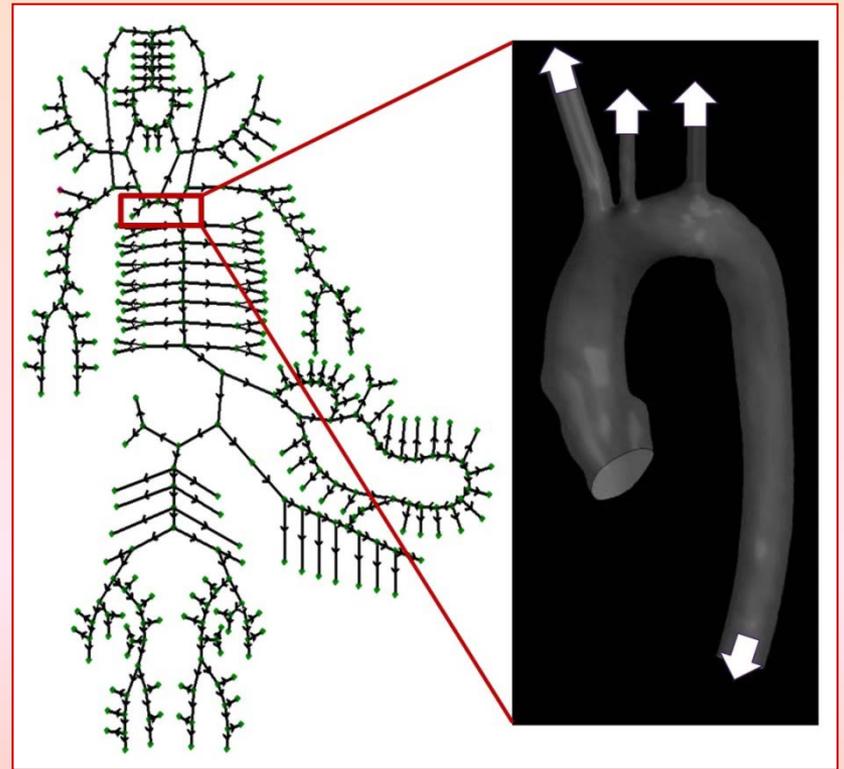
Сопряжение моделей течения крови с эластичными и твердыми стенками

**Т.К. Добросердова (ИВМ РАН, МФТИ),
М.А.Ольшанский (Университет Хьюстона),
С.С.Симаков (МФТИ, ИВМ РАН)**

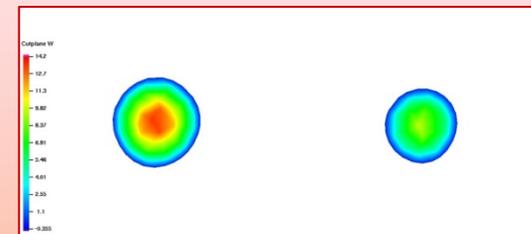
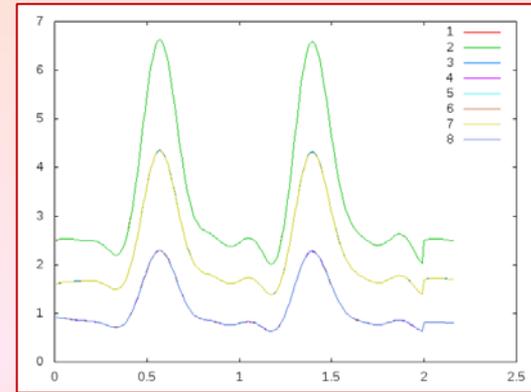
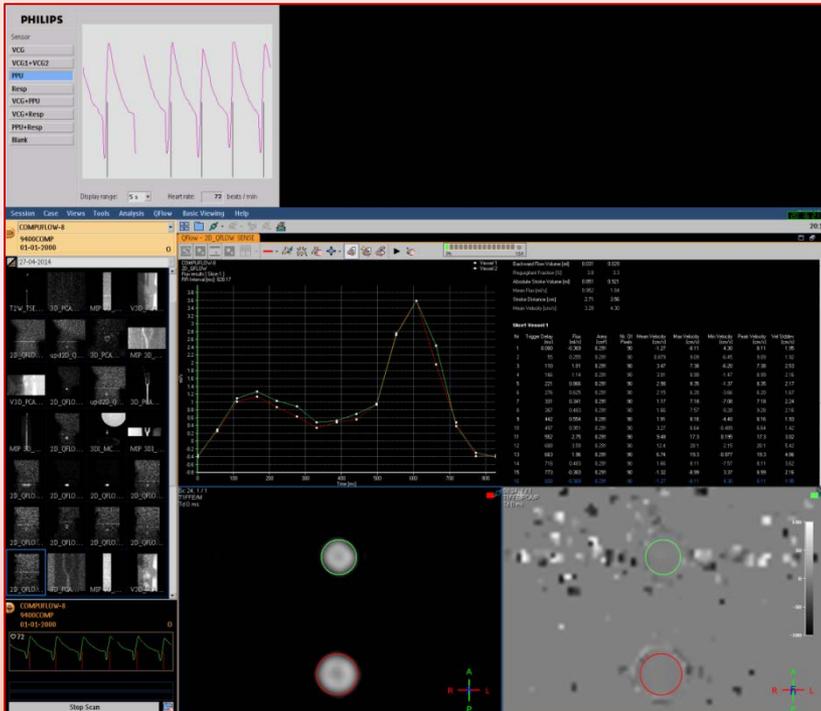
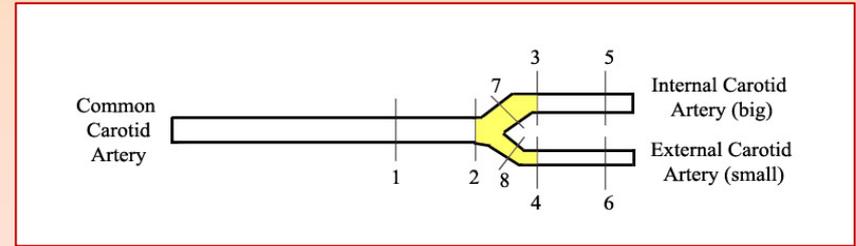
**Рабочая группа по моделированию кровотока
и сосудистых патологий (ИВМ РАН)
грант РФФ 14-31-00024 (новые лаборатории)**

Использование 1D-3D моделей течения крови

- Моделирование глобальной гемодинамики + детальное описание кровотока в области интереса (патологии, имплантаты)
- Недостаток данных для постановки граничных условий
- Погрешность данных



Эксперимент



Уравнения Навье-Стокса

- Уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ in } \Omega \times [0, T],$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega \times [0, T]$$

- Граничные условия:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma_D \times [0, T],$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ на } \Gamma_W \times [0, T],$$

$$-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ на } \Gamma_N \times [0, T]$$

Система уравнений

1. Баланс массы

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial (us)}{\partial x} = 0$$

2. Баланс импульса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = -16\mu u \frac{\eta(S)}{sd^2}, \quad \eta(S) = \begin{cases} 2, & S > S_0 \\ \frac{s}{s_0} + \frac{s_0}{s}, & S \leq S_0 \end{cases}$$

3. Уравнение состояния

$$p = \rho c^2 f(S), \quad f(S) = \begin{cases} \exp \left(\frac{s}{s_0} - 1 \right) - 1, & S > S_0 \\ \ln \left(\frac{s}{s_0} \right), & S \leq S_0 \end{cases}$$

Граничные условия

Граничные условия:

1. Закон сохранения массы:

$$\sum_{k=k_1, \dots, k_M} \alpha_k^m Q_k = 0, \alpha_k^m = \pm 1, Q_k = u_k S_k$$

2. Закон Пуазейля:

$$p_k(t, x_k) - p_m^{node}(t) = \alpha_k R_k^m Q_k, x_k = 0, L_k$$

3. Уравнения совместности (условия, накладываемые характеристиками, покидающими область интегрирования)

Четырехкамерная модель сердца

Сохранение массы

$$\dot{V}_1 = -\alpha_{51} Q_{51} + \alpha_{14} Q_{14}$$

$$\dot{V}_2 = Q_{62} - \alpha_{23} Q_{23}$$

$$\dot{V}_3 = -\alpha_{37} Q_{37} + \alpha_{23} Q_{23}$$

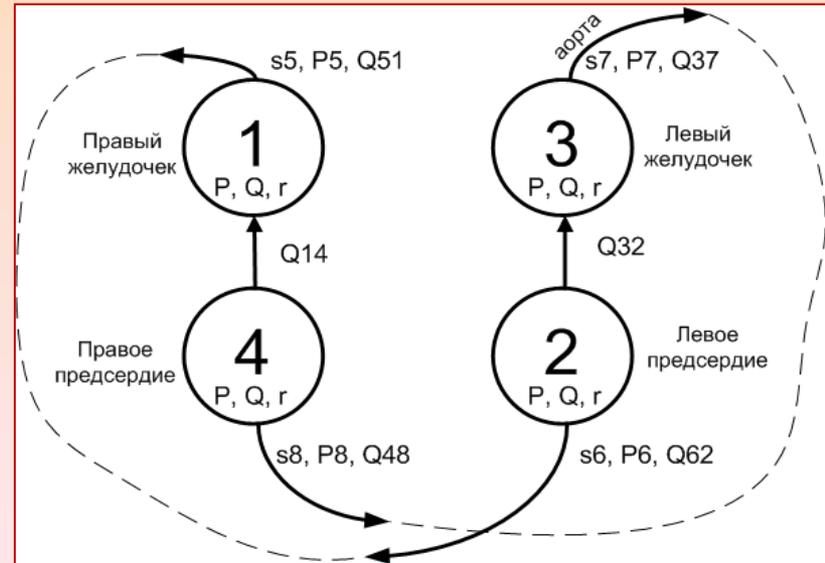
$$\dot{V}_4 = Q_{48} - \alpha_{14} Q_{14}$$

Закон Пуазейля

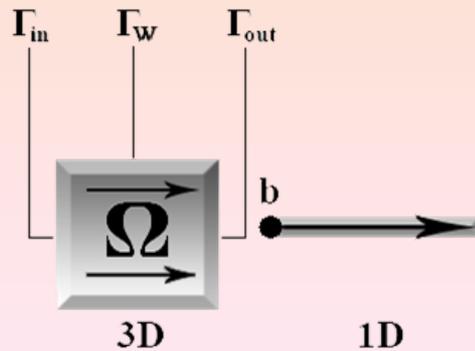
$$Q_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{r_{ij}} (p_j - p_i)$$

Осредненные по объему уравнения для кровотока в камерах сердца

$$I_j \frac{d^2 V_j}{dt^2} + r_j \frac{dV_j}{dt} + \frac{V_j}{c_j} = p_j(t) - P_j^{ext}(t), \quad j = 1 \dots 4$$



«Жесткое» сопряжение 1D и 3D моделей ($x=b$)



1D: Условие совместности.

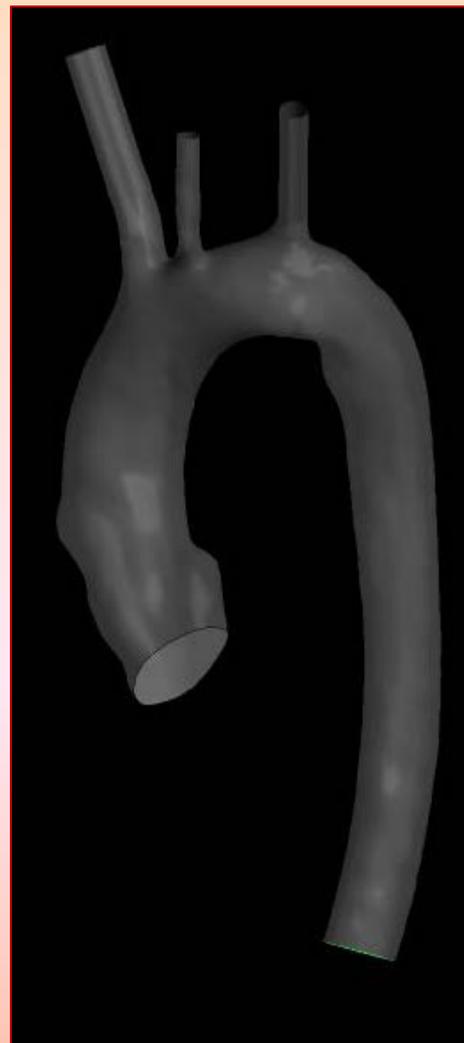
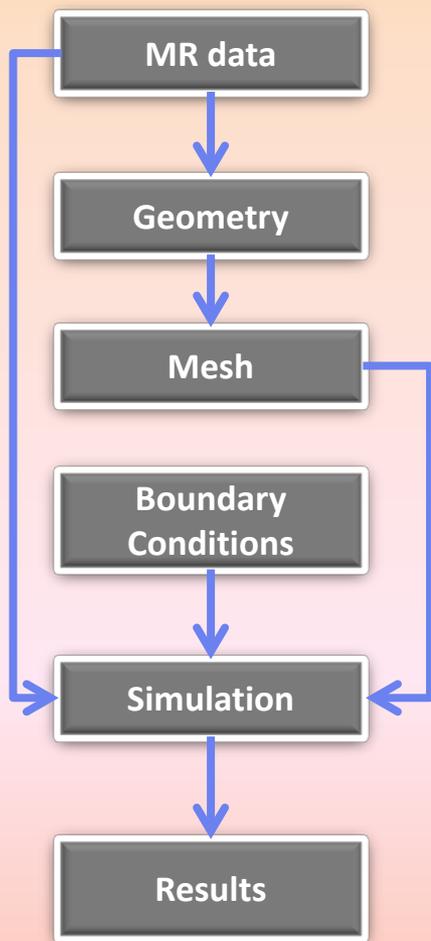
- $$\int_{\Gamma_{out}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = \bar{u}_b S_b$$

$$\left(-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p \mathbf{n}\right) = p_b \mathbf{n}$$
- $$\left(-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p \mathbf{n}\right) = p_b \mathbf{n}$$

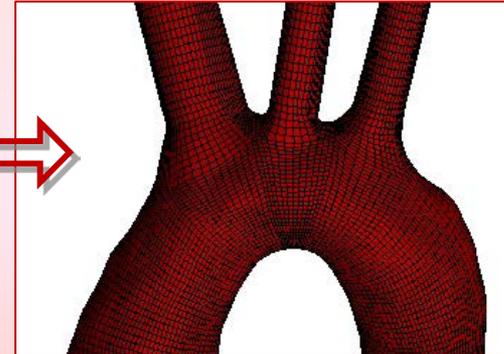
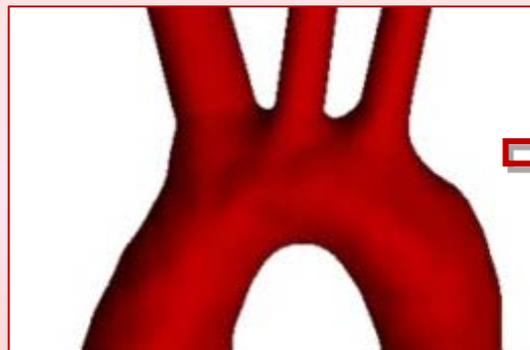
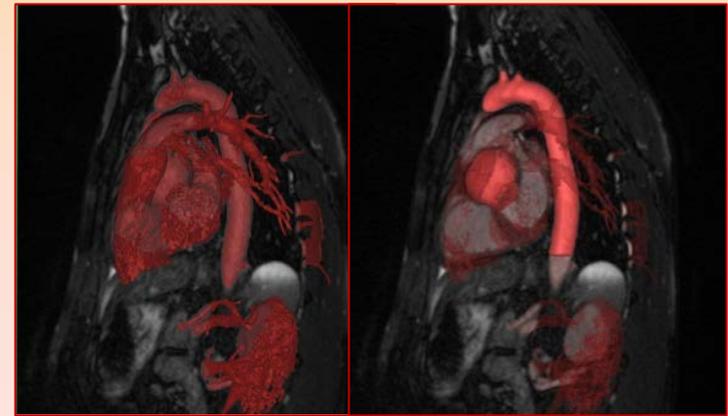
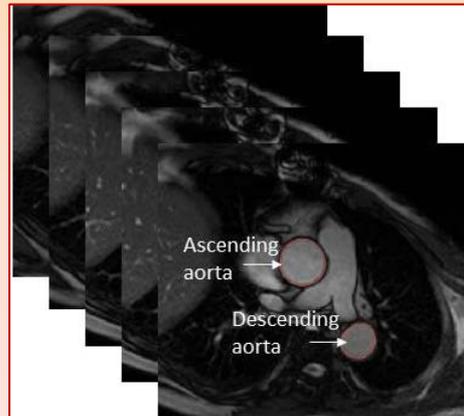
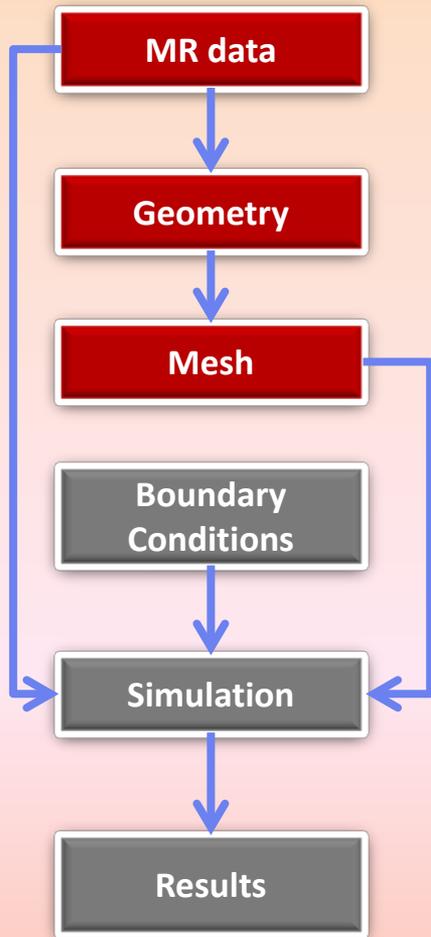
$$\bar{p} \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds + \frac{\rho}{2} \int |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = (\bar{p} S \bar{u} + \frac{\rho}{2} S \bar{u}^3)|_b$$
- $$\int_{\Gamma_{out}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = \bar{u}_b S_b$$

$$-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + \left(p + \frac{\rho}{2} |\mathbf{u}|^2\right) \mathbf{n} = \left(\bar{p} + \frac{\rho}{2} \bar{u}^2\right)|_b \mathbf{n}$$

Построение модели

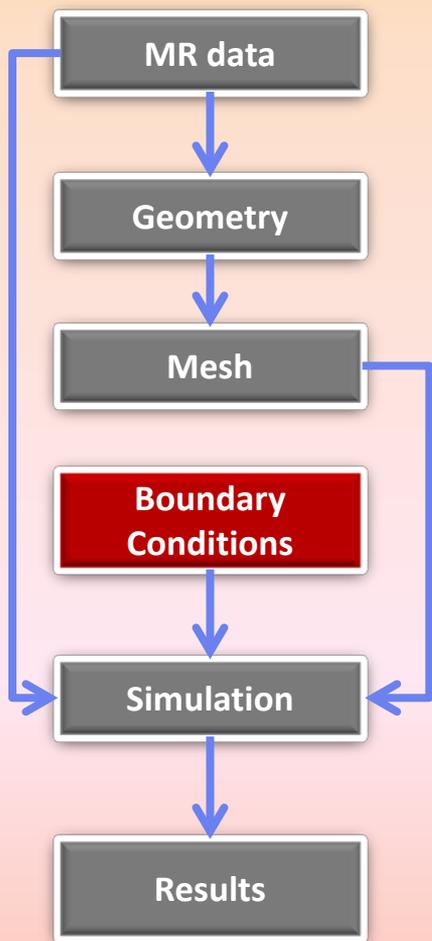


Сегментация области и генерация сетки

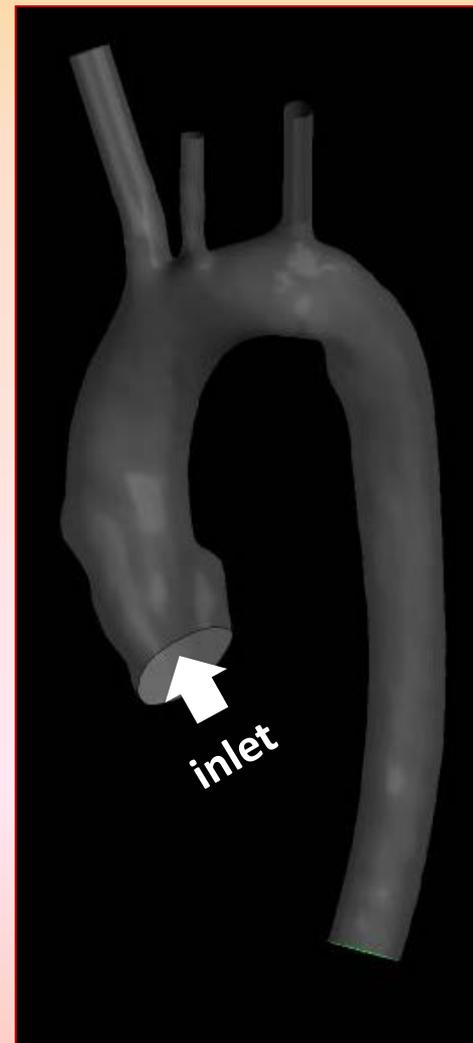
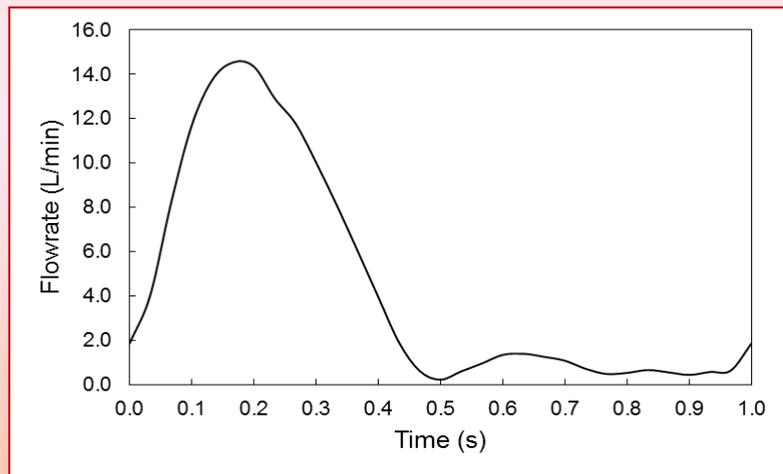
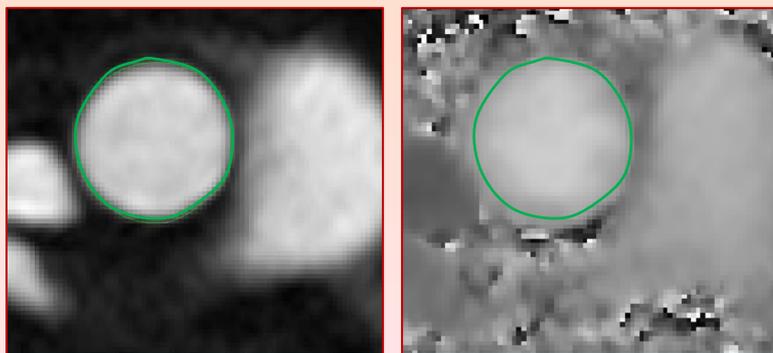


- ANSYS ICEM CFD
- Шестигранные элементы
- Размер сетки : 1000-1300 к элементов

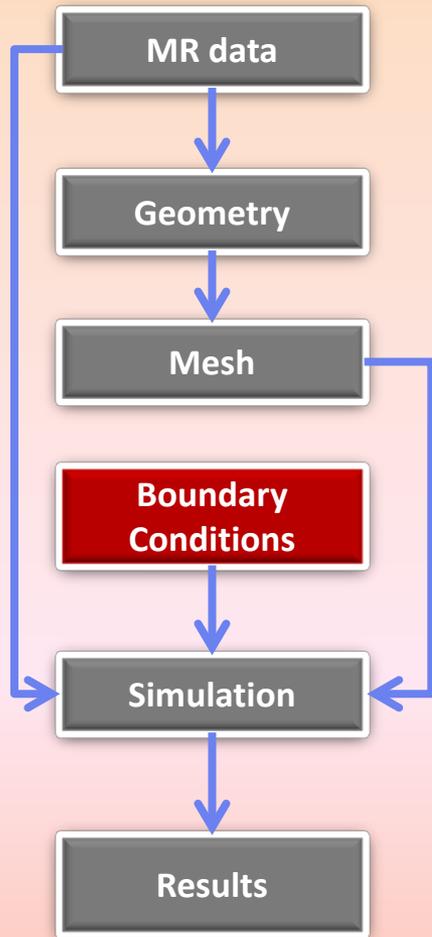
Граничные условия на входе



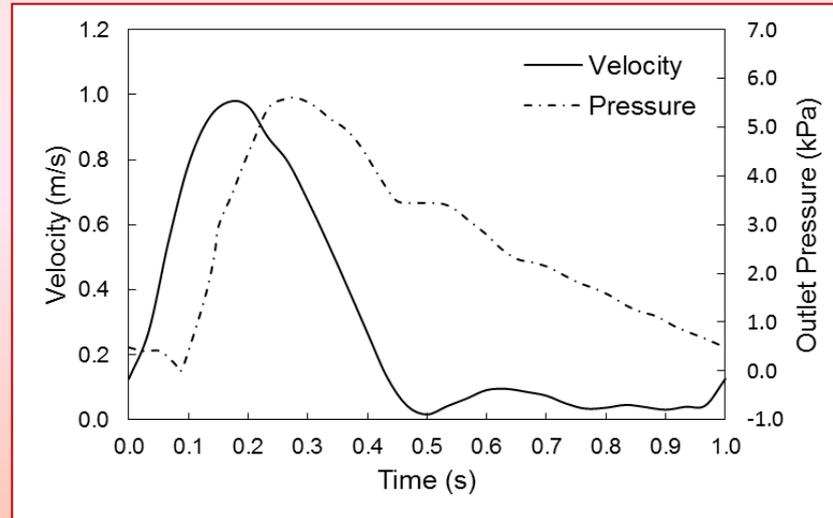
Поток, полученный из данных МРТ с контрастом



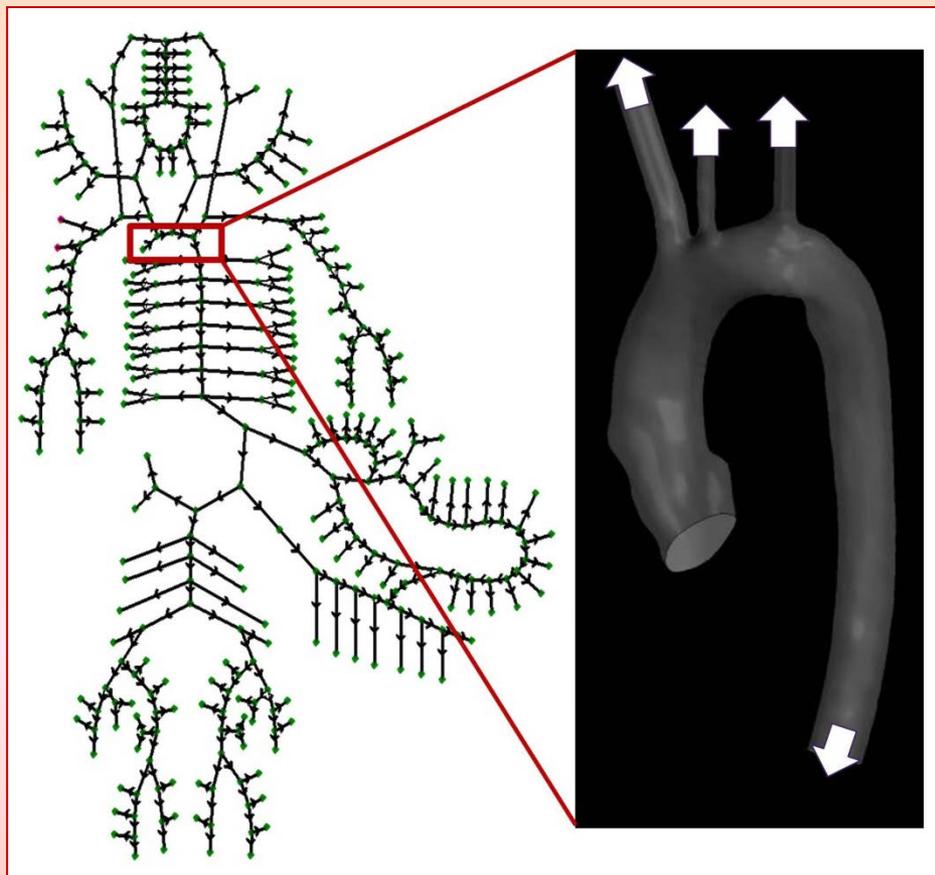
Граничные условия на выходах



- Давление на Out
- Длина сердечного цикла предполагается равной 1с
- Суммарный поток в B1,B2,B3 равен 30% от входящего

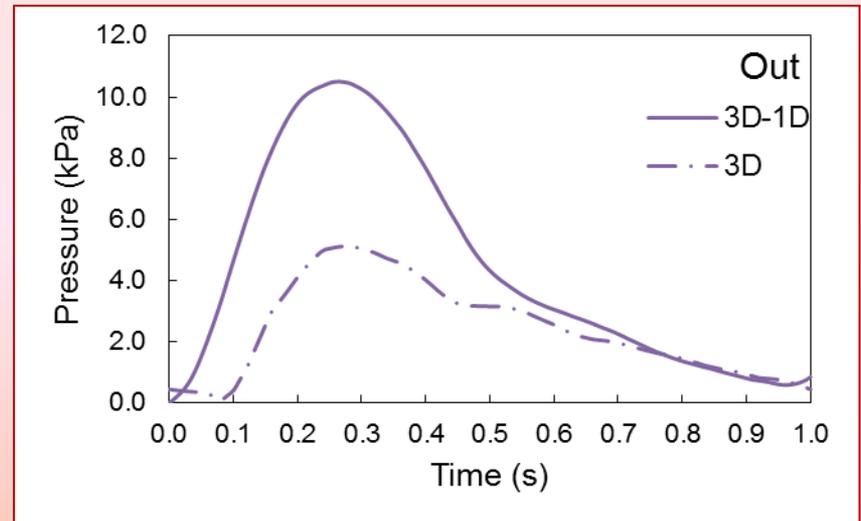
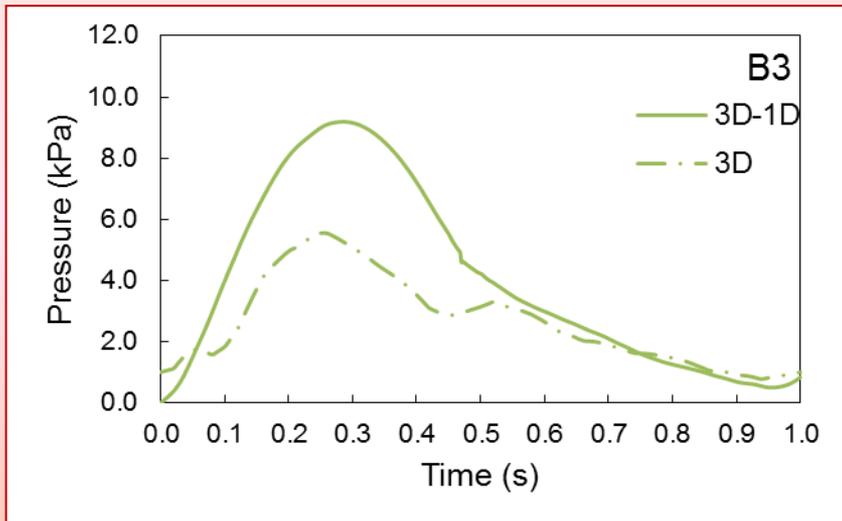
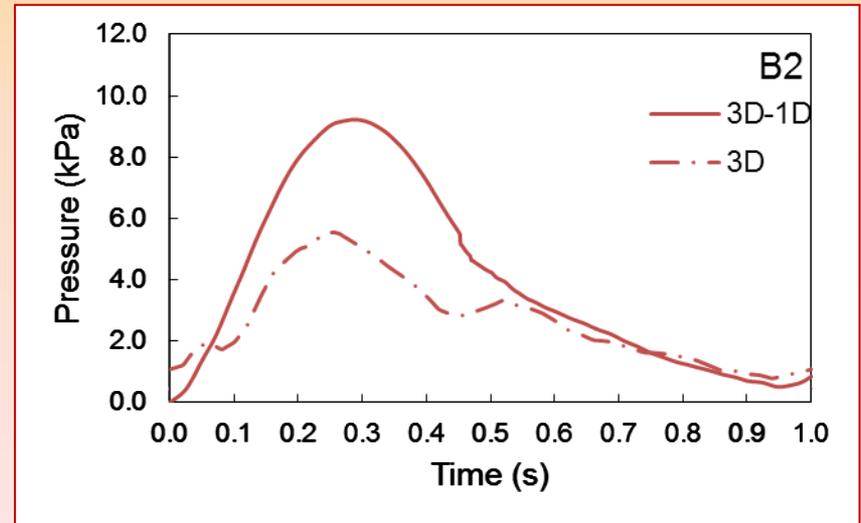
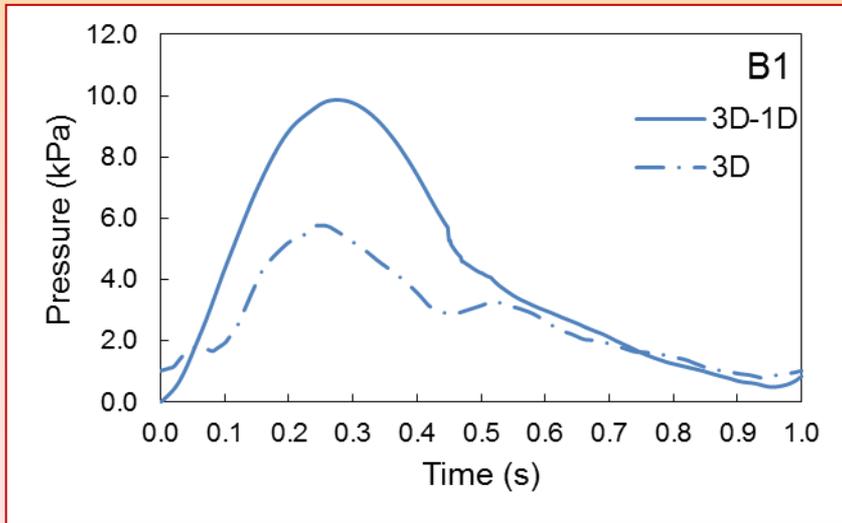


Сопряжение 1D модели кровообращения и 3D ANSYS модели течения крови в аорте

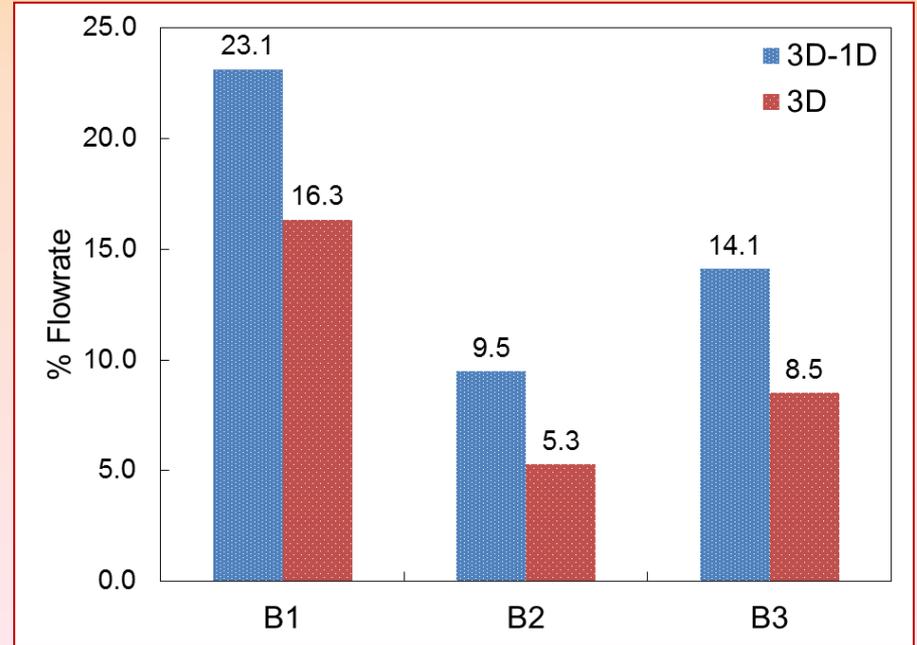
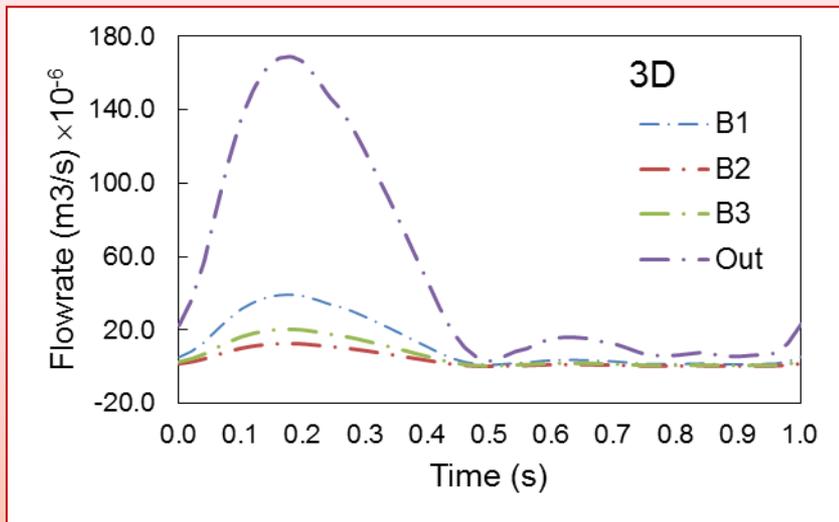
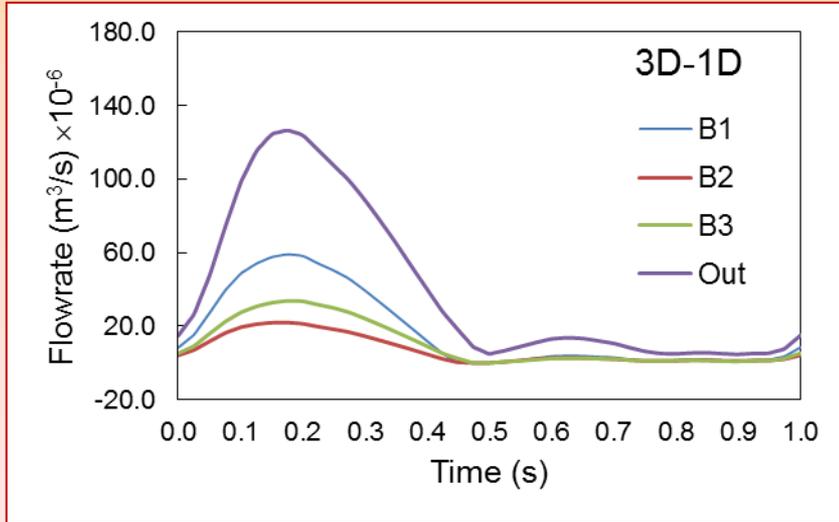


Shelly D. Singh, Tatiana K. Dobroserdova, Xiao Y. Xu, and Yuri V. Vassilevski. Multiscale modelling of blood flow in a patient-specific aorta under physiologically realistic boundary conditions. CMBE2015.

Давление на границах вытекания



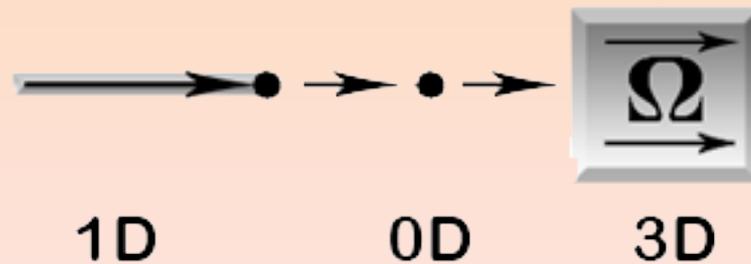
Потоки на границах вытекания



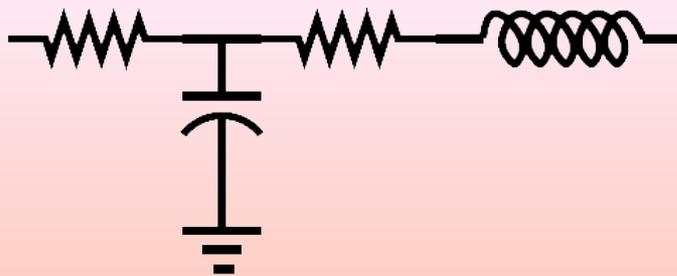
Total % of flow leaving via the aortic branches:

- 3D-1D – 46.6%
- 3D – 30.0%

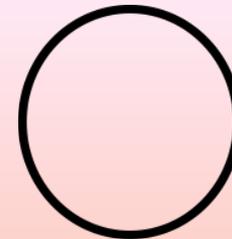
«Мягкое» сопряжение 1D и 3D моделей течения крови



Электрическая цепь



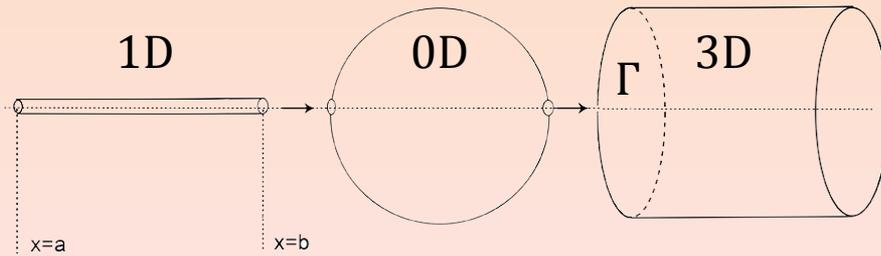
Эластичная сфера



A 3D/1D geometrical multiscale model of cerebral vasculature
Tiziano Passerini, Maria Rita de Luca, Luca
Formaggia, Alfio Quarteroni, Alessandro Veneziani

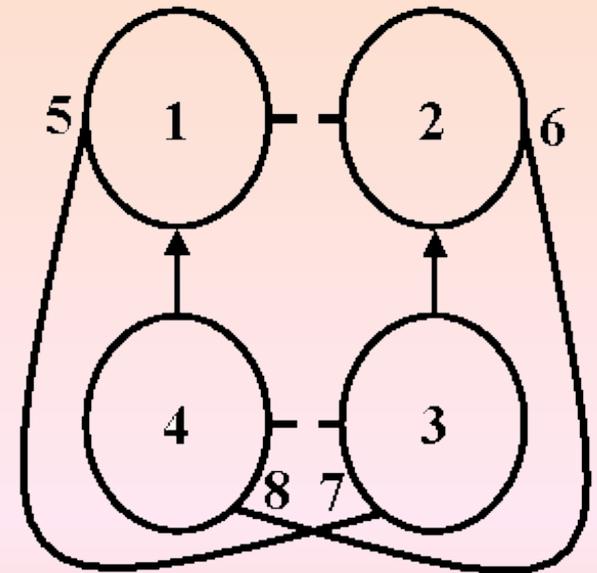
Hard and soft coupling of compliant and rigid walls
blood flow models
Tatiana K. Dobroserdova, Maxim A. Olshanskii, Sergei S. Simakov

0D эластичная сфера



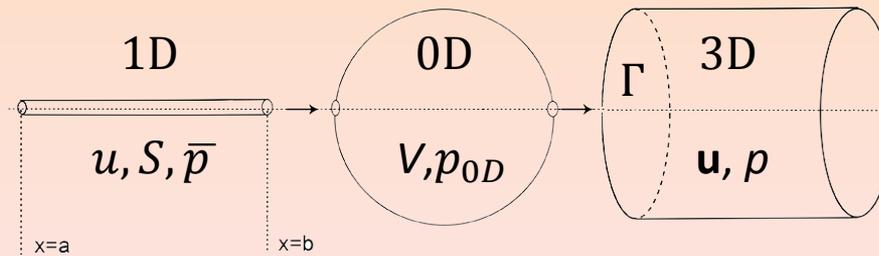
$$I \frac{d^2 V}{dt^2} + R_0 \frac{dV}{dt} + \frac{V - V_0}{C} = p_{0D}$$

Модель сердца



S.S. Simakov, A.S. Kholodov.
Computational study of oxygen
concentration in human blood
under the low-frequency
disturbances, 2007

1D-0D-3D сопряжение



$$\frac{dV}{dt} = Q_{1D} - Q_{3D}$$

$$\bar{p} - p_{0D} = R_{1D0D} Q_{1D}$$

$$p_{0D} - p_{3D} = R_{0D3D} Q_{3D}$$

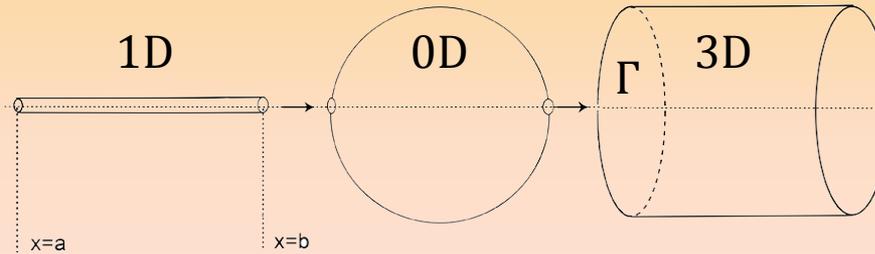
Оценка параметров

$$R_{1D0D} + R_{0D3D} = \frac{\rho c}{\hat{S}}$$

$$I \frac{d^2V}{dt^2} + R_0 \frac{dV}{dt} + \frac{V - V_0}{c} = p_{0D} \quad \xrightarrow{I = 0, R_0 = 0} \quad C = \frac{\Delta V}{\Delta p_{0D}}$$

$$C = \frac{\rho l \hat{S}}{c^2}$$

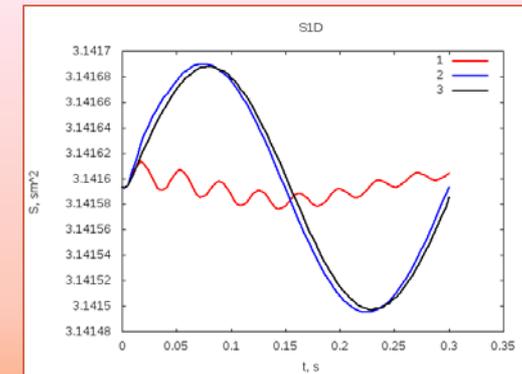
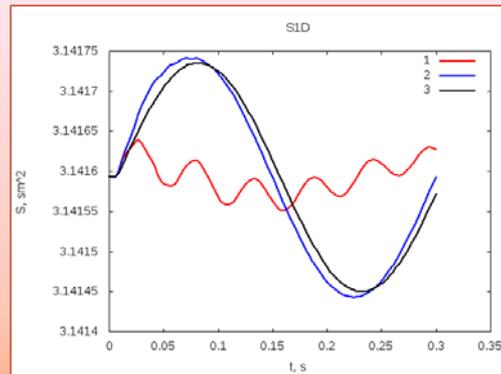
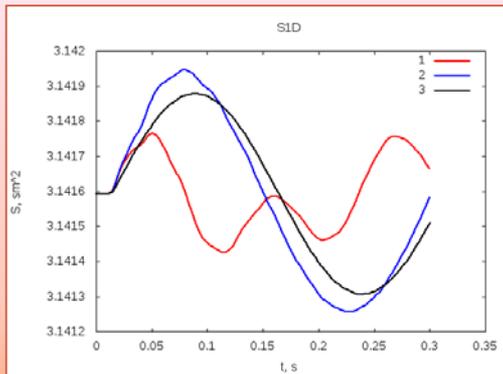
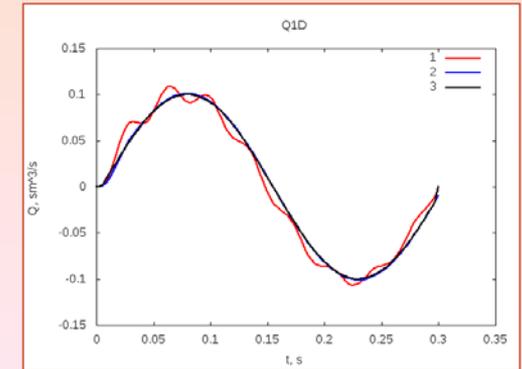
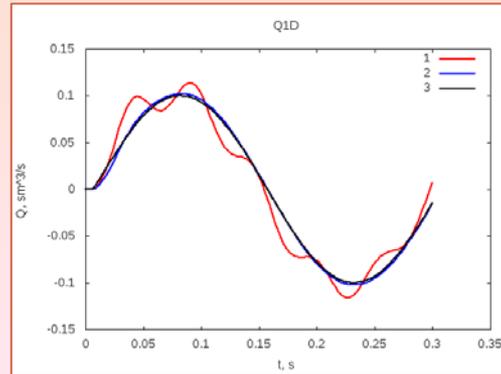
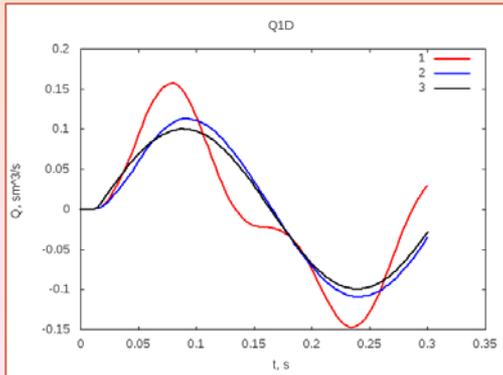
Тест с синусоидальной волной



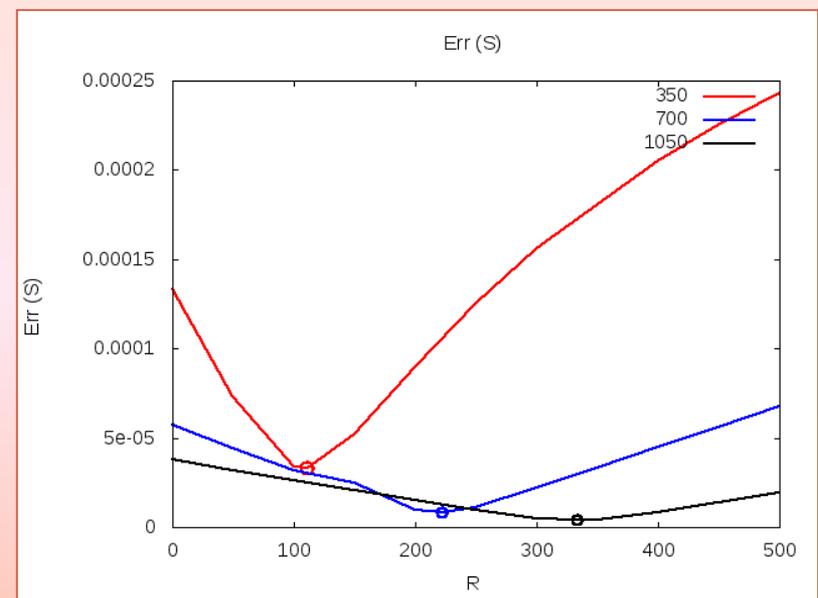
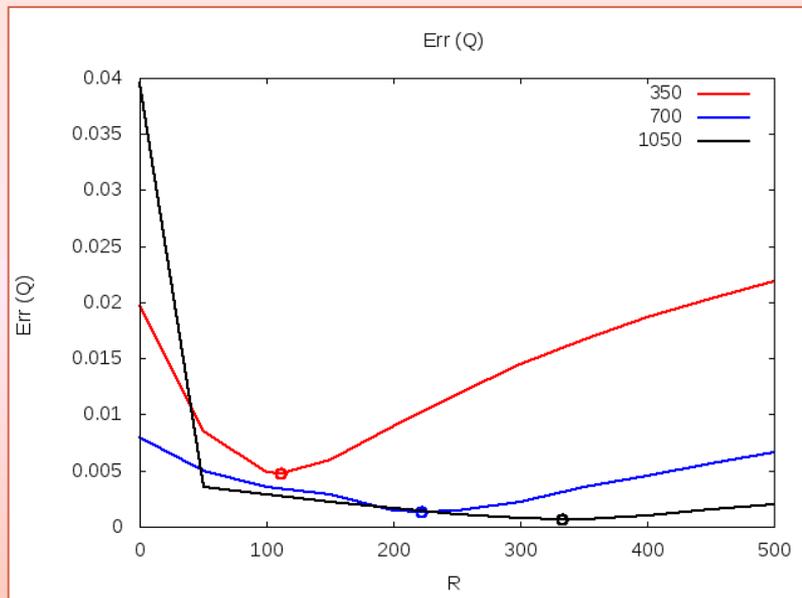
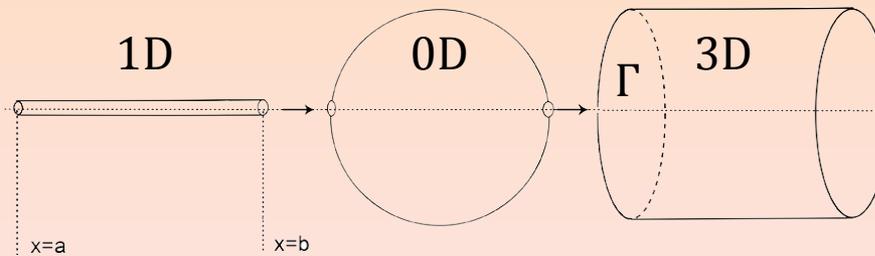
$c = 350 \text{ м/с}$

$c = 700 \text{ м/с}$

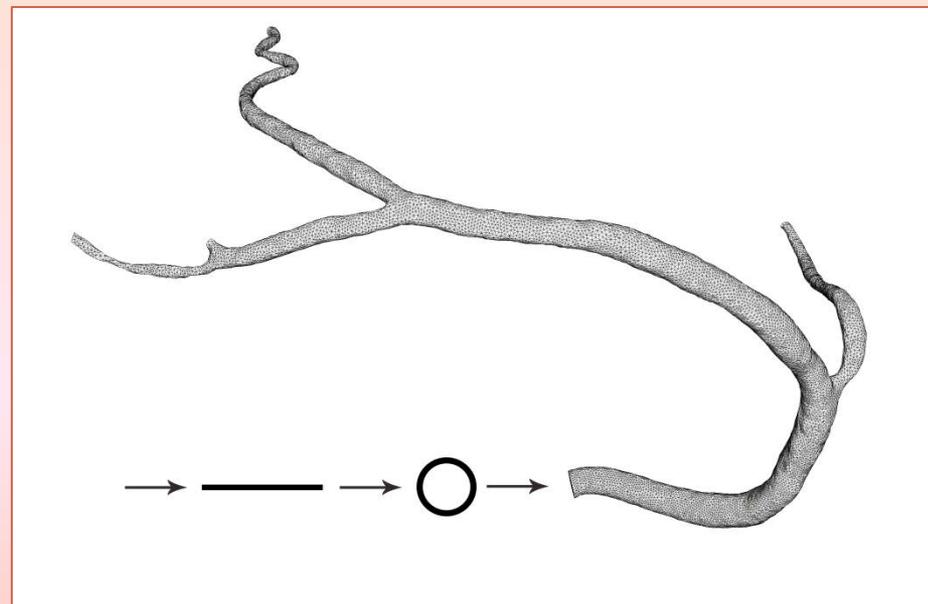
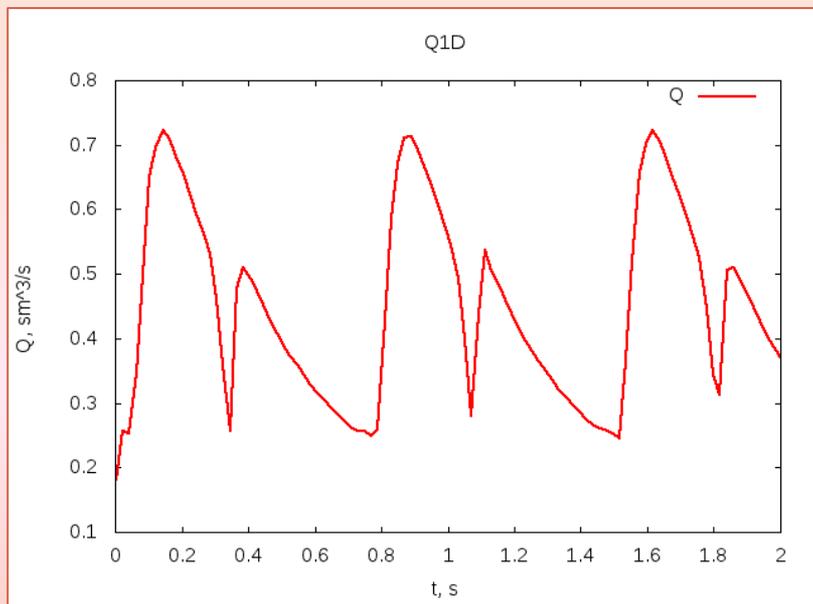
$c = 1050 \text{ м/с}$



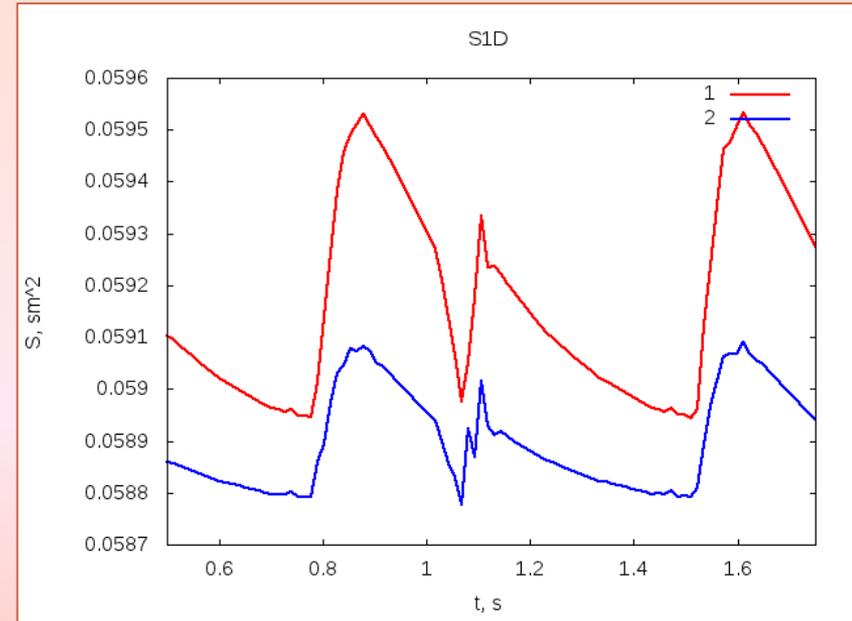
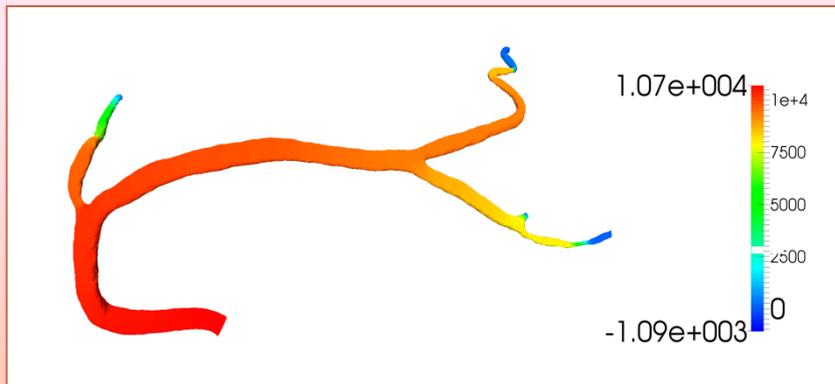
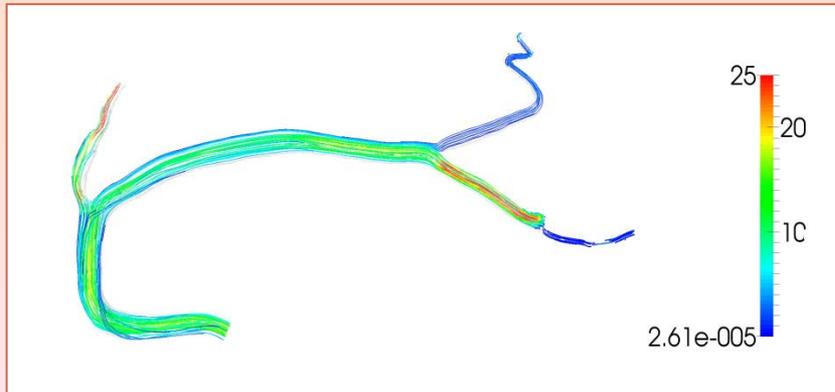
Оптимальность используемых параметров



Моделирование течения крови в коронарных артериях



Результаты расчетов

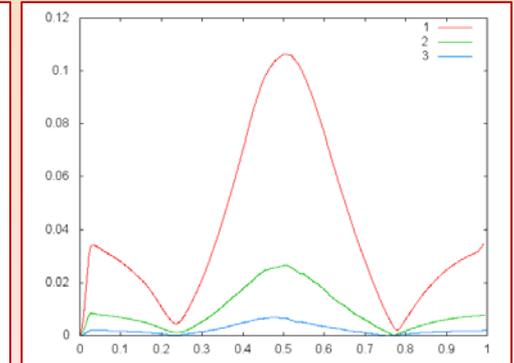
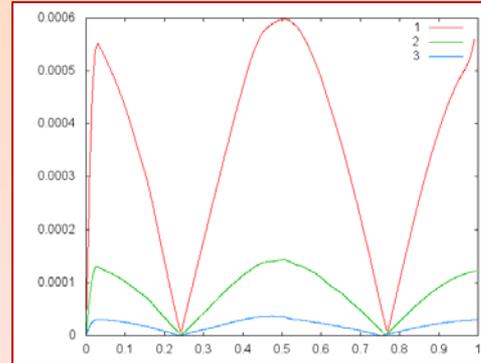
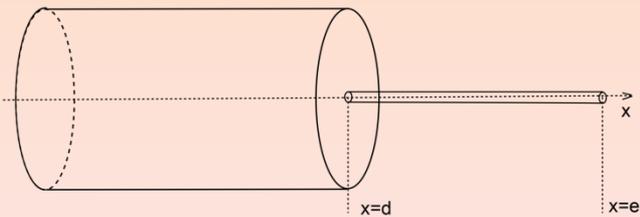


Выводы

- «Жесткое» сопряжение позволяет использовать схемы расщепления для расчетов и оказывается эффективным ниже по течению относительно трехмерной области.
- Использование 0D моделей на стыке 1D и 3D моделей позволяет избежать появления отраженных волн и появления осцилляций в численном решении.
- Предложен новый метод «мягкого» сопряжения (1D-0D-3D модель), оказывающийся эффективным также выше по течению относительно 3D области. Параметры 0D модели могут быть оценены на основе физиологических данных.

Спасибо за внимание!

Верификация модели



	Max L2 norm of S in t	Max L2 norm of u in t	Max L2 norm of S in t/Max L2 norm of analyt. S in t	Max L2 norm of u in t/Max L2 norm of analyt. u in t
Mesh1	5.34E-004	8.92E-002	2.09E-004	1.99E-002
Mesh2	1.27E-004	2.21E-002	4.98E-005	4.94E-003
Mesh3	3.11E-005	5.50E-003	1.22E-005	1.22E-003