# Асимптотическое поведение решений математических моделей эпидемических процессов, обладающих общими структурными свойствами

Н.В. Перцев

**Институт математики им. С.Л. Соболева,**
**Омский филиал**

**РГ по биоматематике, ИВМ РАН**

**Москва, 2014 г.**

## 1. Модель общего вида и свойства решений.

Рассматривается модель в форме:

$$\dot{x}(t) = \gamma x(t) + f(t, x_t) - (\mu + \nu)x(t) - g(x_t)x(t), \ t \geq 0,$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in I_\omega = [-\omega, 0],$$

$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))^T$ — искомая функция, описывающая численность различных групп населения;

$\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t))^T$ — начальная функция с неотрицательными и непрерывными компонентами;

$x_t(s) = x(t+s), s \in I_\omega$, отражает динамику $x(t)$ с учетом предыстории распространения эпидемического процесса.

Размерность модели $m \sim k \cdot l \cdot n$, где

$k$ – количество регионов;

$l$ – количество социально-экономических групп населения;

$n$ – количество эпидемиологических групп индивидуумов.

$$\dot{x}(t) = \gamma x(t) + f(t, x_t) - (\mu + \nu)x(t) - g(x_t)x(t), \ t \geq 0,$$

матрица $\mu = diag(\mu_1, \ldots, \mu_m)$ задает

интенсивности снижения численностей групп вследствие процессов миграции и естественной смертности индивидуумов, а также возможной гибели индивидуумов от заболевания, $\mu_i > 0$, $1 \leq i \leq m$;

матрца $\nu = diag(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ и связанная с ней матрица $\gamma = (\gamma_{ij})$ с элементами $\nu_i \geq 0$, $\gamma_{ij} \geq 0$, $1 \leq i, j \leq m$, задают

интенсивности снижения численностей одних групп и увеличения численностей других групп за счет переходов индивидуумов между группами под влиянием следующих факторов:

спонтанное развитие заболевания, изменение стадии или тяжести заболевания, приобретение иммунитета, самоизлечение или лечение в медицинских учреждениях, изменение социально–экономических условий жизни.

$$\dot{x}(t) = \gamma x(t) + f(t, x_t) - (\mu + \nu)x(t) - g(x_t)x(t), \ t \geq 0,$$

слагаемые

$$g(x_t)x(t) = diag(g_1(x_t), \ldots, g_m(x_t))x(t),$$

$$f(t, x_t) = (f_1(t, x_t), \ldots, f_m(t, x_t))^T,$$

отражают соответственно скорости уменьшения и пополнения численностей групп за счет прямых или опосредованных контактов индивидуумов, а также миграционного притока индивидуумов;

$$f(t, z) : R_+ \times C(I_\omega, R_+^m) \to R_+^m,$$

$$g_i(z) : C(I_\omega, R_+^m) \to R_+, \ 1 \leq i \leq m,$$

непрерывные и локально–липшицевые по $z$ отображения, $C(I_\omega, R_+^m)$ — множество непрерывных функций $z : I_\omega \to R_+^m$ с нормой $||z||_C = \max_{s \in I_\omega} ||z(s)||_{R^m}$.

Мажорантная модель:

$$\dot{w}(t) = \gamma w(t) + h(w_t) - (\mu + \nu) w(t), \ t \geq 0,$$

$$w(t) = \psi(t), \ t \in I_\omega,$$

где

$$f(t, z) \leq h(z), \ (t, z) \in R_+ \times C(I_\omega, R_+^m),$$

$h(z) : C(I_\omega, R_+^m) \to R_+^m$ — непререрывное изотонное отображение.

Изотонность $h(z)$ означает следующее: для любой пары $z^1, z^2 \in C(I_\omega, R_+^m)$, удовлетворяющей условию $z^1 \leq z^2$, верно неравенство $h(z^1) \leq h(z^2)$.

Неравенства между векторами и вектор–функциями понимаются покомпонентно.

Конкретный вид $h(z)$ зависит от формы уравнений модели.

<u>ТЕОРЕМА</u>. Пусть существует $w^{(0)} \in R^m$ такой, что

$$w^{(0)} \geq 0, \ \gamma w^{(0)} + h(w^{(0)}) - (\mu + \nu) w^{(0)} \leq 0,$$

начальная функция $\psi(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\psi(t) \leq w^{(0)}, \ t \in I_\omega.$$

Тогда решение $x(t)$ модели существует, единственно на промежутке $t \in [0, \infty)$, и для него справедливы оценки

$$0 \leq x(t) \leq w^{(0)}, \ 0 \leq t < \infty,$$

$$0 \leq \liminf_{t \to +\infty} x(t) \leq \limsup_{t \to +\infty} x(t) \leq w^{(*)},$$

где $w^{(*)}$ — решение системы уравнений

$$w \in R^m, \ 0 \leq w \leq w^{(0)}, \ \gamma w + h(w) - (\mu + \nu) w = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в условиях теоремы вектор $w^{(*)}$ таков, что

$$w_j^{(*)} = 0, \quad 1 \le j = j_1, \ldots, j_k \le m.$$

Тогда существуют

$$\lim_{t \to +\infty} x_j(t) = 0, \quad j = j_1, \ldots, j_k.$$

Этот результат может означать, что модель имеет решения, интерпретируемые как искоренение инфекции в одном или нескольких рассматриваемых регионах.

## 2. Пример: модель распространения туберкулеза в двух, совместно рассматриваемых регионах.

Пусть население двух регионов представлено в виде групп

$$S_1,\ I_1,\ C_1,\quad S_2,\ I_2,\ C_2,$$

которые включают в себя следующих индивидуумов:
восприимчивые – $S_1, S_2$;
инфицированные микобактериями туберкулеза – $I_1, I_2$;
больные туберкулезом – $C_1, C_2$.

Обозначим через $S_i(t)$, $I_i(t)$, $C_i(t)$ численности указанных групп в момент времени $t$, $i = 1, 2$.

При построении модели использована ранее предложенная и исследованная модель распространения и контроля туберкулеза (Перельман, Марчук, Борисов, Романюха, Авилов, Каркач, Мельниченко).

Новый вариант модели учитывает процесс воспроизводства индивидуумов, их дожитие до 16 лет, миграцию индивидуумов между регионами, инфицирование взрослых и молодых (до 16 лет) индивидуумов.

$$\dot{S}_1(t) = -\beta_1 S_1(t)C_1(t) - (\lambda_{11} + \lambda_{12})S_1(t) + \lambda_{21}S_2(t)$$
$$+ \rho_1(t-\tau)\sigma_1(\tau)\exp\Big(-\int_0^\tau \varphi_1(s)C_1(t+s-\tau)ds\Big),$$

$$\dot{I}_1(t) = (1-p_1)\beta_1 S_1(t)C_1(t) - (\lambda_{11} + \lambda_{12})I_1(t) - (\gamma_1 + \alpha_1 C_1(t))I_1(t)$$
$$+ \eta_1 C_1(t) + \lambda_{21}I_2(t) + \rho_1(t-\tau)\sigma_1(\tau)\Big(1 - \exp\Big(-\int_0^\tau \varphi_1(s)C_1(t+s-\tau)ds\Big)\Big),$$

$$\dot{C}_1(t) = p_1\beta_1 S_1(t)C_1(t) - (\eta_1 + \pi_{11} + \pi_{12})C_1(t) + (\gamma_1 + \alpha_1 C_1(t))I_1(t) + \pi_{21}C_2(t),$$

$$\dot{S}_2(t) = -\beta_2 S_2(t)C_2(t) - (\lambda_{22} + \lambda_{21})S_2(t) + \lambda_{12}S_1(t)$$
$$+ \rho_2(t-\tau)\sigma_2(\tau)\exp\Big(-\int_0^\tau \varphi_2(s)C_2(t+s-\tau)ds\Big), \qquad t \geq 0,$$

$$\dot{I}_2(t) = (1-p_2)\beta_2 S_2(t)C_2(t) - (\lambda_{22} + \lambda_{21})I_2(t) - (\gamma_2 + \alpha_2 C_2(t))I_2(t)$$
$$+ \eta_2 C_2(t) + \lambda_{12}I_1(t) + \rho_2(t-\tau)\sigma_2(\tau)\Big(1 - \exp\Big(-\int_0^\tau \varphi_2(s)C_2(t+s-\tau)ds\Big)\Big),$$

$$\dot{C}_2(t) = p_2\beta_2 S_2(t)C_2(t) - (\eta_2 + \pi_{22} + \pi_{21})C_2(t) + (\gamma_2 + \alpha_2 C_2(t))I_2(t) + \pi_{12}C_1(t),$$

$$S_i(0) = S_i^0,\ I_i(0) = I_i^0,\ C_i(t) = C_i^0(t),\ t \in [-\tau, 0],\ i = 1, 2.$$

Эта система допускает решение вида

$$I_1(t) \equiv 0,\ C_1(t) \equiv 0,\quad I_2(t) \equiv 0,\ C_2(t) \equiv 0,$$

$$\dot{S}_1(t) = -(\lambda_{11} + \lambda_{12})S_1(t) + \lambda_{21}S_2(t) + \rho_1(t-\tau)\sigma_1(\tau),$$
$$\dot{S}_2(t) = -(\lambda_{22} + \lambda_{21})S_2(t) + \lambda_{12}S_1(t) + \rho_2(t-\tau)\sigma_2(\tau),\quad t \geq 0,$$
$$S_1(0) = S_1^0,\ S_2(0) = S_2^0,$$

которое интерпретируется как отсутствие туберкулеза в двух, совместно рассматриваемых регионах.

Примем, что $0 < \rho_i(t-\tau) \leq \rho_i^{(*)} = const > 0,\ t \in [0, \infty)$.

Компоненты $w_1^{(0)}$ и $w_4^{(0)}$ вектора $w^{(0)}$ выберем как единственное решение $w_1^{(0)} = w_1^* > 0$, $w_4^{(0)} = w_4^* > 0$ системы

$$(\lambda_{11} + \lambda_{12})w_1^{(0)} - \lambda_{21}w_4^{(0)} = \rho_1^*\sigma_1(\tau),$$

$$-\lambda_{12}w_1^{(0)} + (\lambda_{22} + \lambda_{21})w_4^{(0)} = \rho_2^*\sigma_2(\tau).$$

Введем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & 0 \\ -a_{21} & a_{22} & 0 & -a_{24} \\ -a_{31} & 0 & a_{33} & -a_{34} \\ 0 & -a_{42} & -a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

$$a_{11} = \lambda_{11} + \lambda_{12} + \gamma_1,\ a_{12} = \eta_1 + (1-p_1)\beta_1 w_1^{(*)} + \rho_1^{(*)}\sigma_1(\tau)J_1,\quad a_{13} = \lambda_{21},$$

$$a_{21} = \gamma_1,\ a_{22} = \eta_1 + \pi_{11} + \pi_{12} - p_1\beta_1 w_1^{(*)},\ a_{24} = \pi_{21},$$

$$a_{31} = \lambda_{12},\ a_{33} = \lambda_{22} + \lambda_{21} + \gamma_2,\ a_{34} = \eta_2 + (1-p_2)\beta_2 w_4^{(*)} + \rho_2^{(*)}\sigma_2(\tau)J_2,$$

$$a_{42} = \pi_{12},\ a_{43} = \gamma_2,\ a_{44} = \eta_2 + \pi_{22} + \pi_{21} - p_2\beta_2 w_4^{(*)},$$

где $J_1 = \int_0^\tau \varphi_1(s)ds,\ J_2 = \int_0^\tau \varphi_2(s)ds.$

**Примем, что $A$ является невырожденной М–матрицей: например, все диагональные миноры $A$ положительны или найдется $\xi \in R^4$, $\xi > 0$, такой, что $A\xi > 0$.**

**Тогда существуют и остальные компоненты $w^{(0)} > 0$.**

Вектор $w^{(*)}$, входящий в условия теоремы, таков:

$$w^{(*)} = (w_1^*,\ 0,\ 0,\ w_4^*,\ 0,\ 0)^T.$$

Если начальные данные не превосходят $w^{(0)}$, то существуют

$$\lim_{t\to+\infty} I_i(t) = 0,\ \ \lim_{t\to+\infty} C_i(t) = 0,\ \ i = 1, 2.$$

Этот результат указывает на достаточные условия искоренения туберкулеза в двух совместно рассматриваемых регионах, изолированных от других регионов.

Так, в частности, можно взять $\xi_1 = \xi_3 > 0$, $\xi_2 = \xi_4 > 0$. Тогда, если

$$\min\Big(\frac{\eta_1 + \lambda_{11} + \pi_{11} - p_1\beta_1 w_1^{(*)}}{\eta_1 + (1-p_1)\beta_1 w_1^{(*)} + \rho_1^{(*)}\sigma_1(\tau)J_1},\ \frac{\eta_2 + \lambda_{22} + \pi_{22} - p_2\beta_2 w_4^{(*)}}{\eta_2 + (1-p_2)\beta_2 w_4^{(*)} + \rho_2^{(*)}\sigma_2(\tau)J_2}\Big)$$

$$> \max\Big(\frac{\gamma_1}{\lambda_{11}+\gamma_1},\ \frac{\gamma_2}{\lambda_{22}+\gamma_2}\Big),$$

то $A$ является невырожденной M–матрицей.

Приведенные условия переносятся на три и более региона и модель с более детальной структурой эпидгрупп.