

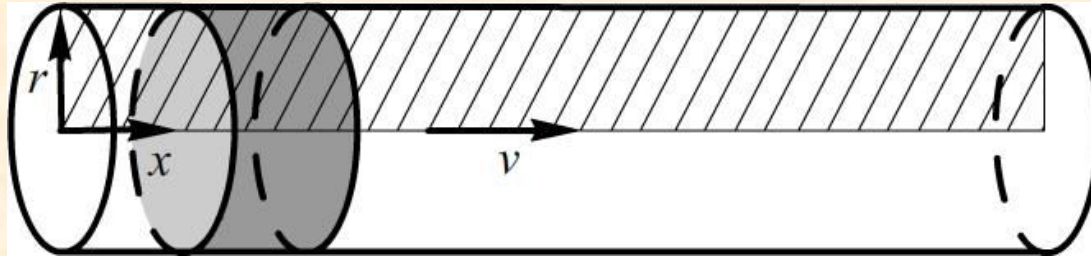
---

К моделированию роста  
тромбоцитарного тромба с учетом  
сдвиг-вызванной диффузии

---

**Е. А. Погорелова, (МФТИ, ЦТП ФХФ РАН)**  
**А. И. Лобанов, д.ф.-м.н. (МФТИ, МГАВТ)**

**30 октября 2013**



- Стенки сосуда недеформируемые
- Пульсовые волны не учитываем

# Тромбоциты

- полные — пустые,
  - пассивные — активные.
- 
- Переход пассивных тромбоцитов в активные при взаимодействии с активатором описывается функцией

$$f(c, w) = \frac{k \cdot w^m \cdot c}{w^m + w_0^m}$$

где  $k$ ,  $w_0$ ,  $m$  — некоторые константы.

---

---

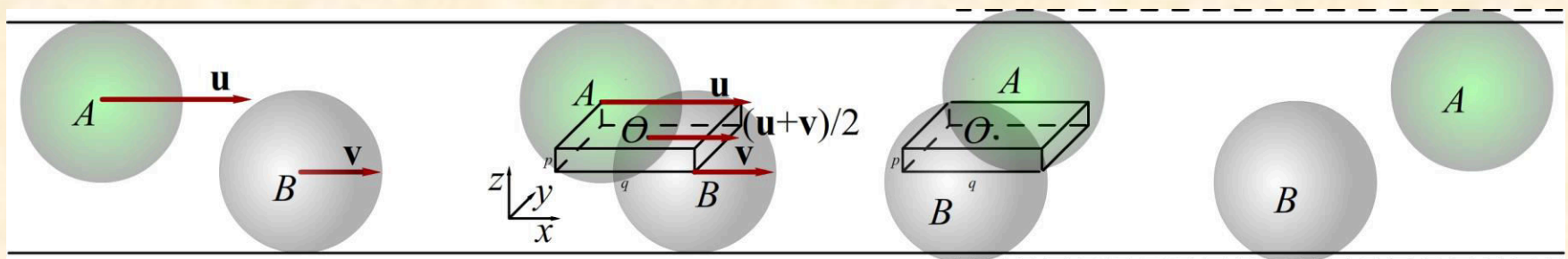
# Модель переноса тромбоцитов в сдвиговом потоке

Частицы перемещаются

- благодаря переносу потоком окружающей жидкости
  - и сдвиг-вызванной диффузии.
-

# Сдвиг-вызванная диффузия тромбоцитов

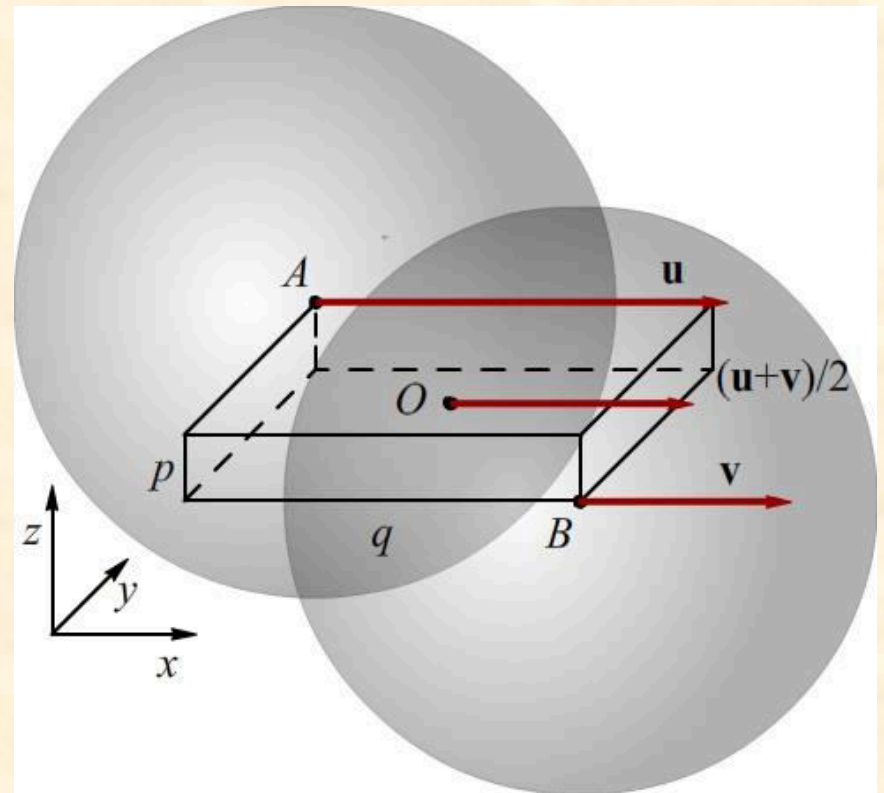
- Частицы радиуса  $a$  в сдвиговом потоке вязкой жидкости
- движутся с параллельными скоростями,  $u > v$ .
- Малые значения  $Re$  – от 1 до 100.



# Сдвиг-вызванная диффузия тромбоцитов

Считаем, что в течение  
столкновения

- скорость центра масс не меняется до распада контакта,
- частицы не проскальзывают и не перекатываются одна по другой.



# Оценка тензора сдвиг-вызванной диффузии тромбоцитов

$$D_{xx} = \frac{1}{2} v \langle \Delta x \rangle^2 \quad v = 4a^2 \pi c(r) \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{\square} & D_{\square\perp} \\ D_{\perp\square} & D_{\perp} \end{pmatrix} = \frac{va^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \sqrt{4K - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3} \sqrt{4K - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}} & 2K - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} \approx \frac{va^2}{2} \begin{pmatrix} 0,22 & 0,44 \\ 0,44 & 0,87 \end{pmatrix}$$

# Обозначения

- $w$  — концентрация активатора,
- $c_p, c_f, c$  — концентрации пассивных, полных и всех активных тромбоцитов,
- $k_1, k_2, k_w$  — константы скоростей мономолекулярных реакций.



# Уравнения изменения концентраций активатора и тромбоцитов

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -k_w w + k_1 c_f - (\mathbf{V}, \nabla w) + D_w \operatorname{div}(\nabla w)$$

$$\frac{\partial c_p}{\partial t} = -f(c_p, w) - (\mathbf{V}, \nabla c_p) + \operatorname{div}(\mathbf{D} \nabla c_p)$$

$$\frac{\partial c_f}{\partial t} = f(c_p, w) - k_2 c_f - (\mathbf{V}, \nabla c_f) + \operatorname{div}(\mathbf{D} \nabla c_f)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = f(c_p, w) - (\mathbf{V}, \nabla c) + \operatorname{div}(\mathbf{D} \nabla c)$$

- $\mathbf{D}$  — матрица диффузии,
- $\mathbf{V}$  — скорость потока

# Граничные условия

- Ось течения: симметрия,
- входное сечение: заданы значения концентрации,
- выходное сечение: свободные (неотражающие) условия,
- стенка сосуда: поток  $\mathbf{W}=0$ ,  $\mathbf{W} = -\mathbf{D}\nabla u + \mathbf{V}u$
- активный участок стенки:  $\mathbf{W} > 0$

$$W_{\eta} |_{r=R(x)} = (c, \operatorname{div} \mathbf{Dn})$$

# Алгоритм расчета

- Расчет поля скоростей (уравнение Навье—Стокса в сложной области)
- Расчет распределения концентрации (расщепление по физическим процессам)
  - Реакционная часть – методом Гира,
  - Диффузионная часть,
- Если тромбоцитов на стенку или тромб налипло достаточно, то перестроение сетки

# Разностная схема для расчета диффузионной части

- Уравнения для концентрации в потоковой форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{W}$$
$$\mathbf{W} = -\mathbf{D} \nabla u + \mathbf{V} u$$

- где  $u$  соответствует одна из концентраций —  $w$ ,  $C_p$ ,  $C_f$  или  $C$ .
- В системе координат, связанной с координатными линиями разностной сетки  $\xi$  и  $\eta$ , матрица диффузии поворачивается на угол  $\psi$  между вектором скорости и вектором  $\xi$

# Разностная схема для расчета диффузионной части

- Уравнение  $\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{W}$

доставляет минимум функционалу

$$F(\mathbf{W}) = \int_V \frac{(\mathbf{W}, \mathbf{W})}{2} + (\mathbf{D}\nabla u, \mathbf{W}) - u(\mathbf{V}, \mathbf{W}) dV$$

- а  $\mathbf{W} = -\mathbf{D}\nabla u + \mathbf{V}u$  играет роль условия связи.

# Разностная схема для расчета диффузионной части

- Дискретный аналог функционала  $F$

$$F_h(\mathbf{W}) = \sum_{ij} \Omega_{ij} \left( \frac{(\mathbf{W}, \mathbf{W})}{2} - u(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \right)_{i+1/2, j+1/2} + \int_V (\mathbf{D}\nabla u, \mathbf{W}) dV$$

# Разностная схема для расчета диффузионной части

- С помощью аналога формулы интегрирования по частям преобразуем слагаемое

$$\int_V (\mathbf{D}\nabla u, \mathbf{W}) dV = \int_S u \mathbf{D}^* \mathbf{W} d\mathbf{S} + (*)$$

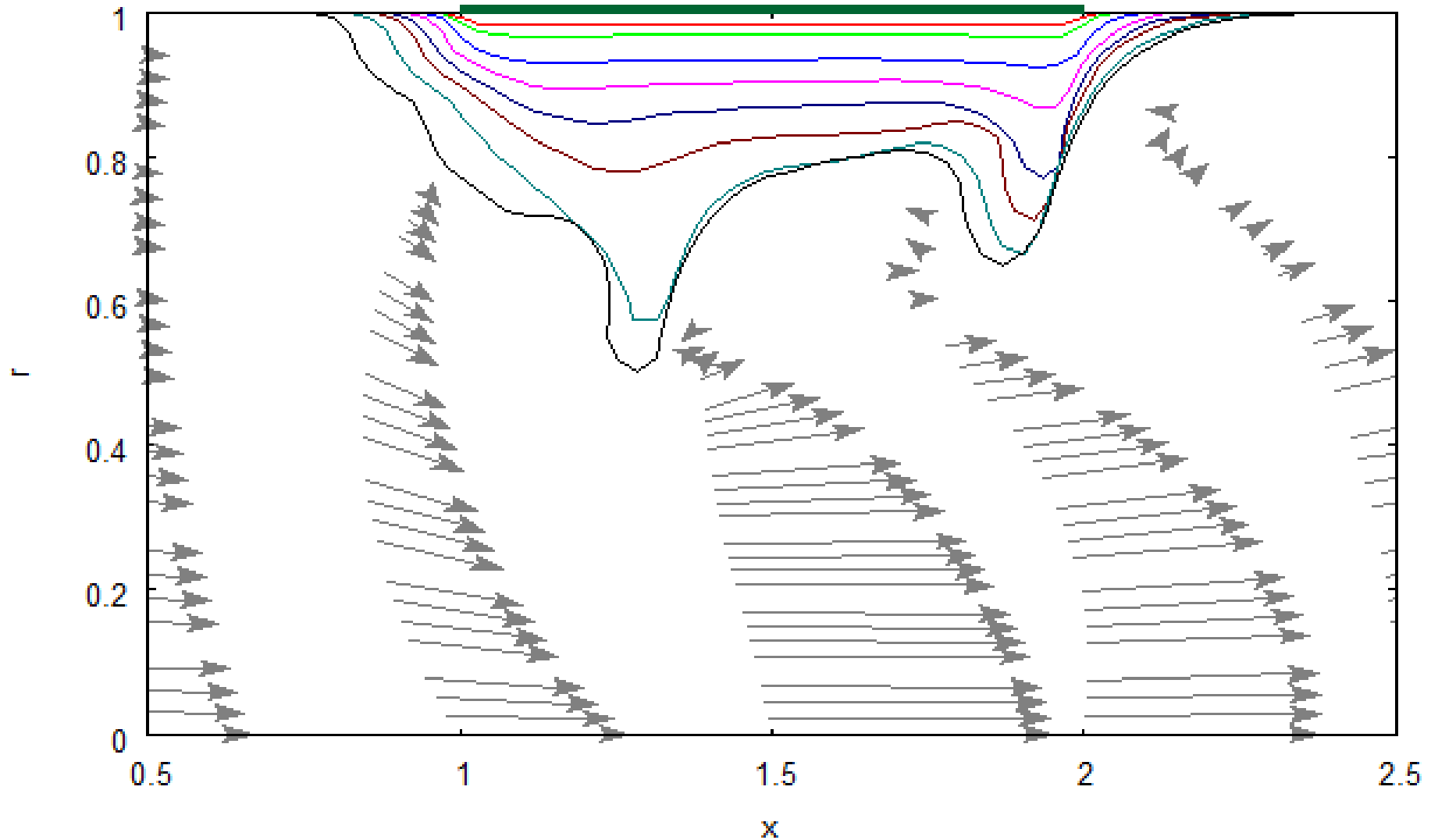
где (\*) — интегралы по граничным ячейкам расчетной области.

- Аппроксимируем интеграл по поверхности

$$\int_S \hat{u} \mathbf{W} \mathbf{D} d\mathbf{S} = \sum_{ij} \hat{u}_{ij} (\mathbf{W}, \mathbf{D} d\mathbf{S})_{ij}$$

где  $\hat{u}_{ij}$  — концентрация на текущем шаге по времени.

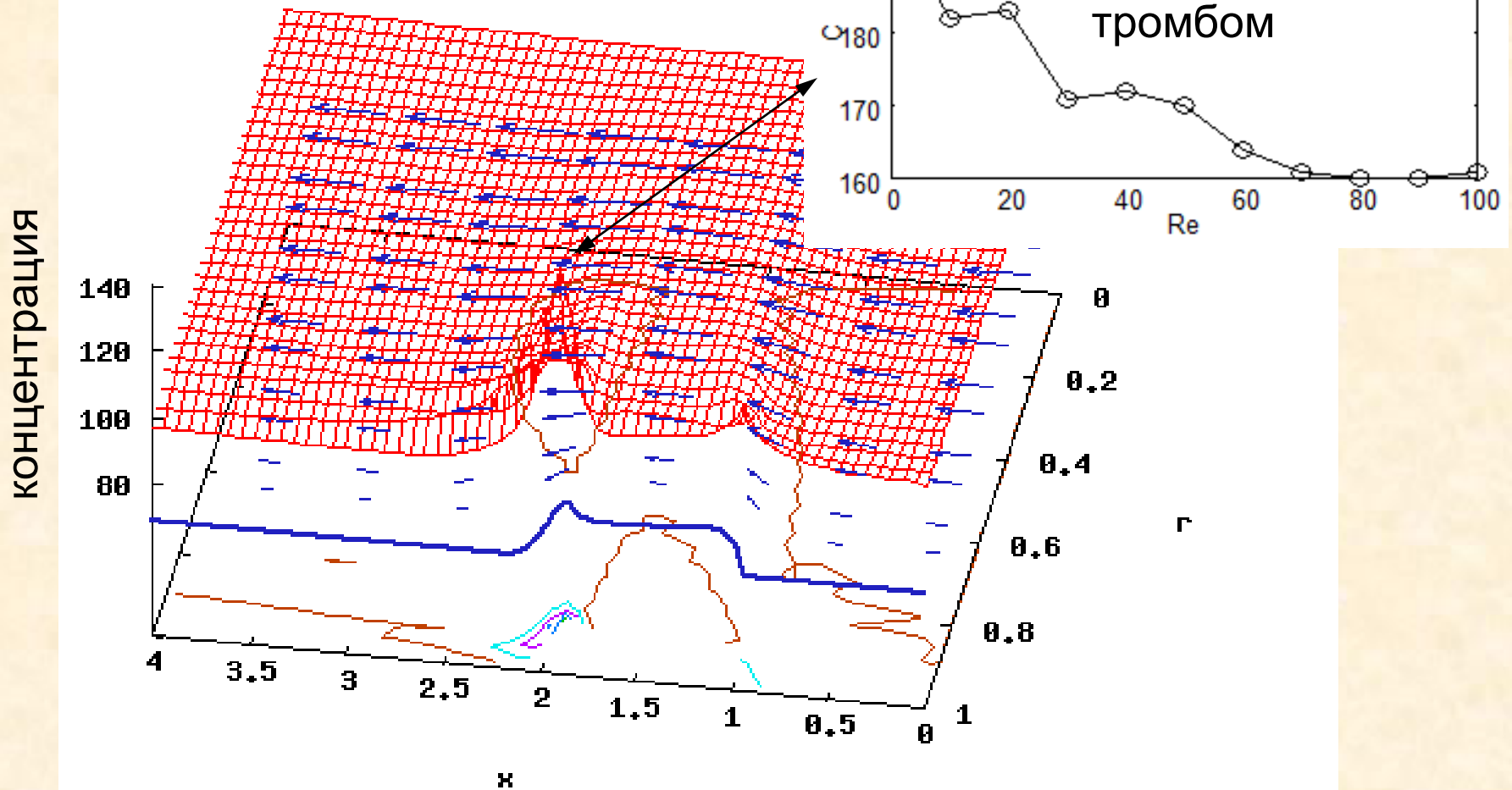
# Форма тромба $Re \sim 80$ , $t=0.5, 1, \dots, 4$



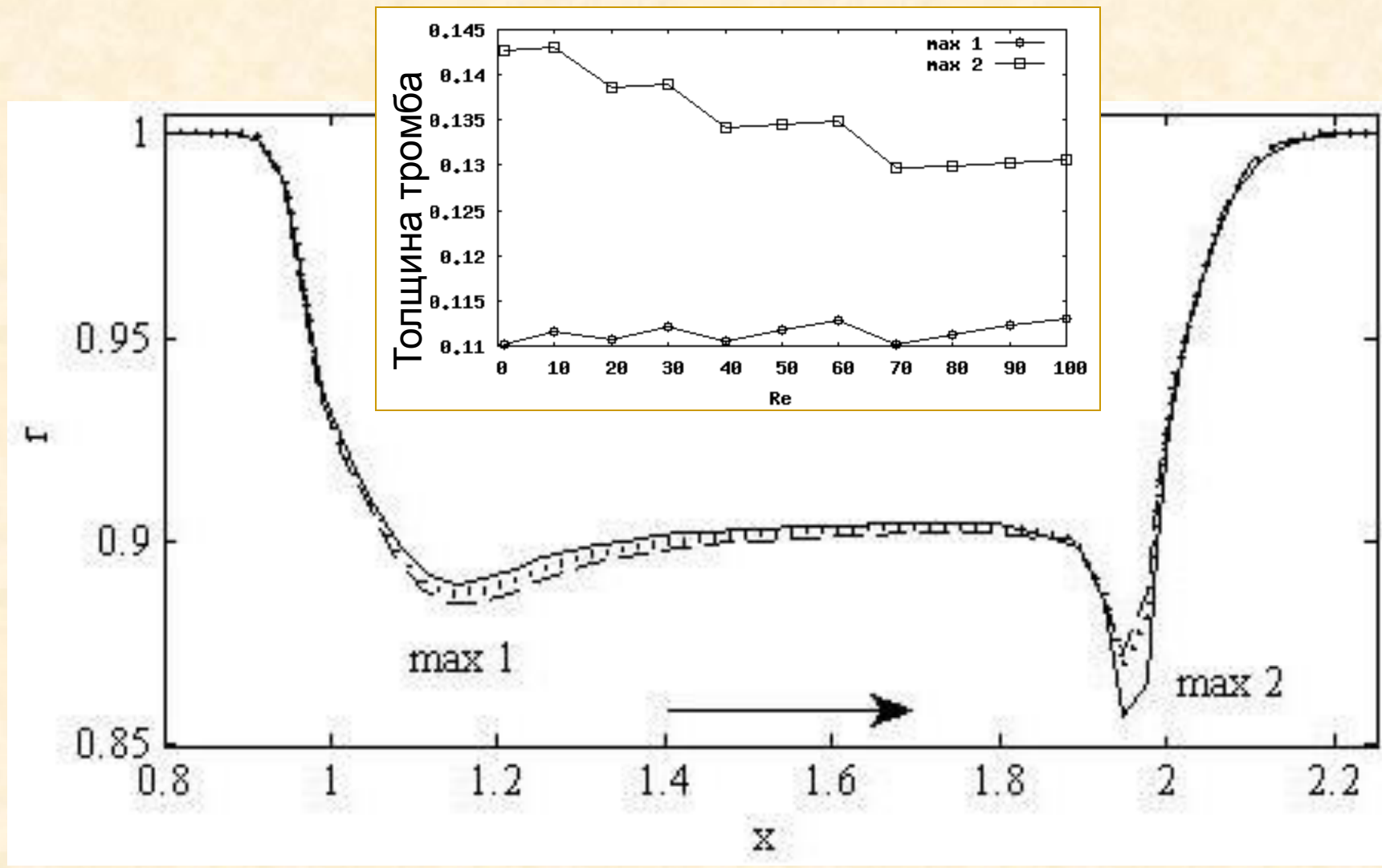


# Концентрация тромбоцитов, $Re \sim 80$ ,

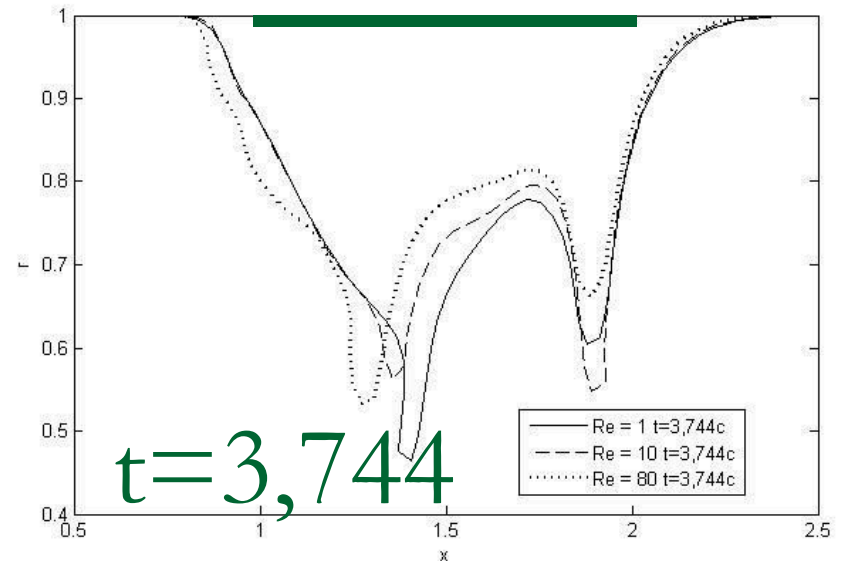
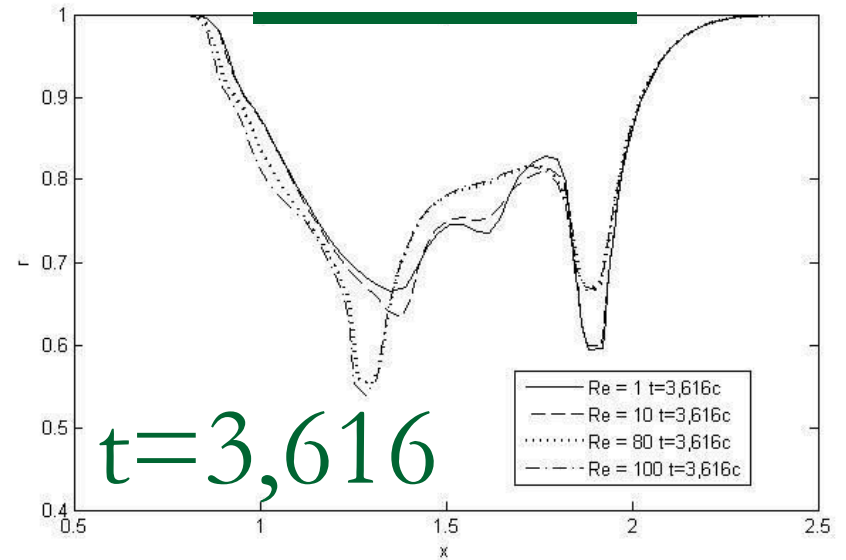
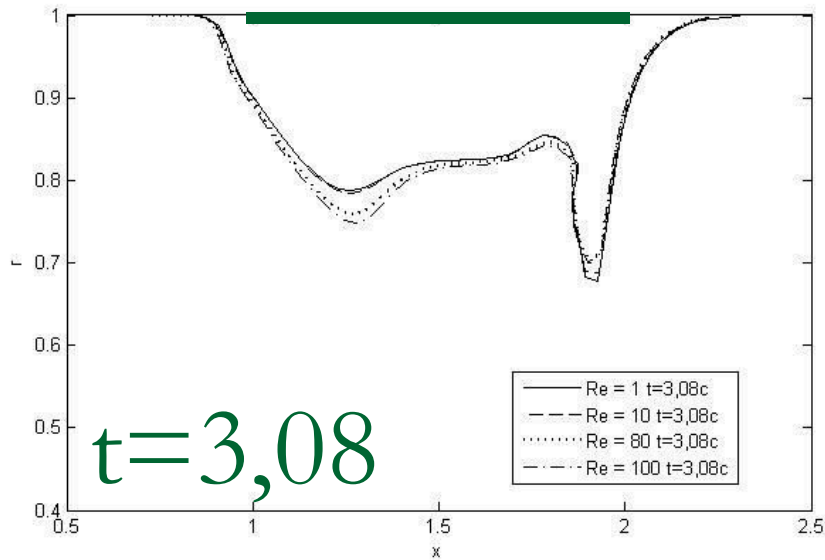
$t=2$



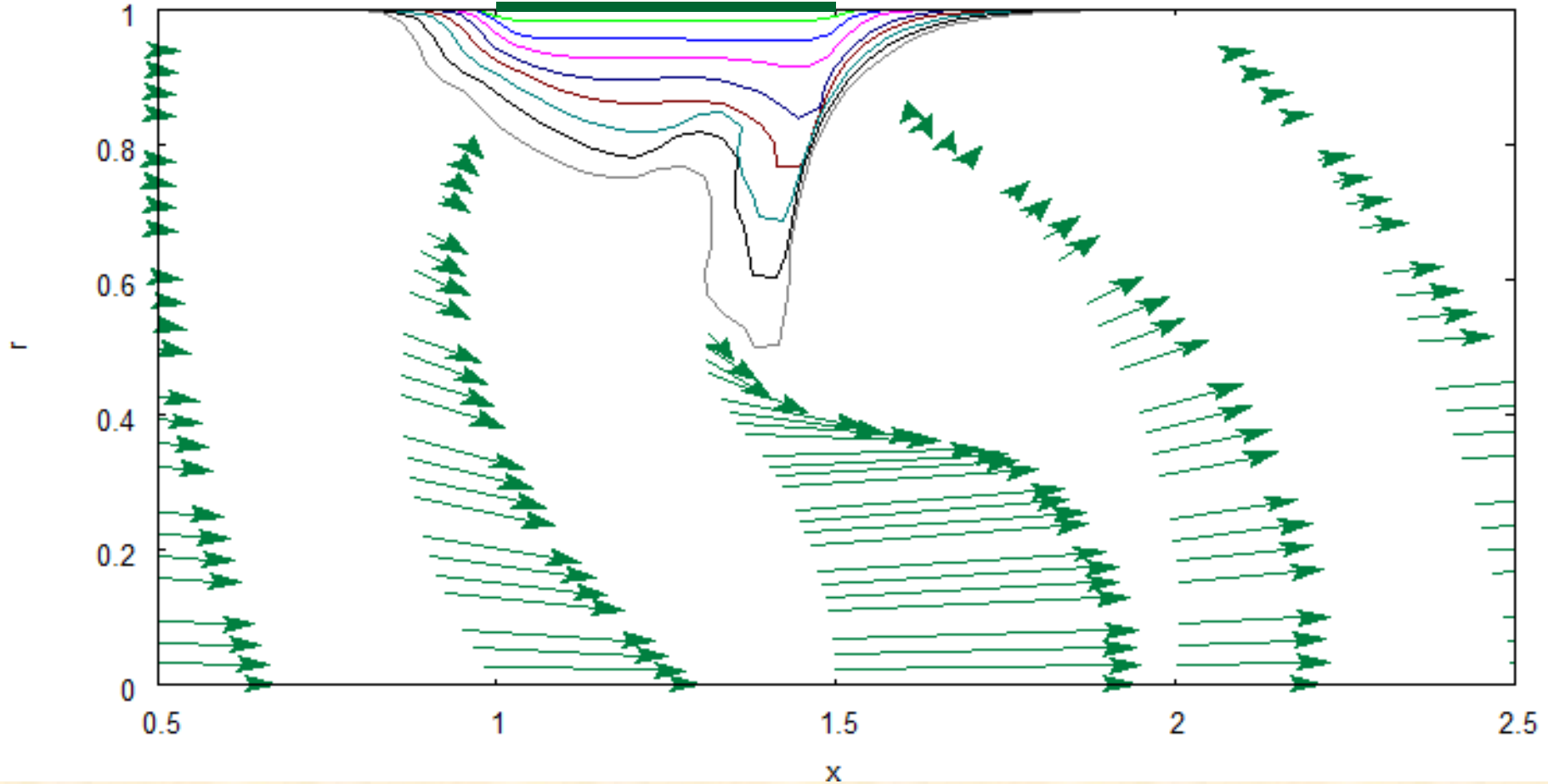
# Форма тромба при $Re \sim 1,100, 200$



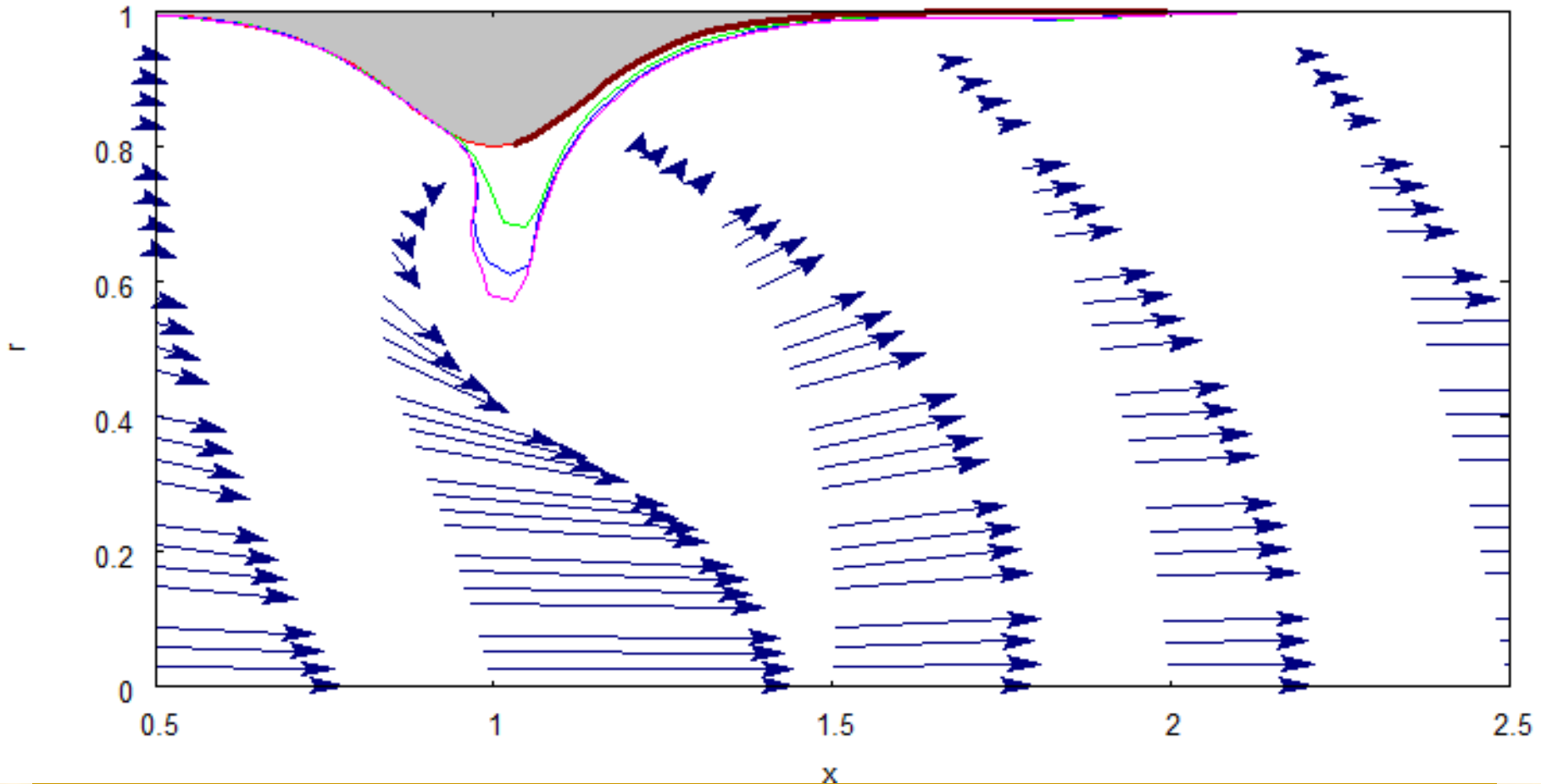
# Форма тромба, $Re \sim 1, 10, 80, 100$



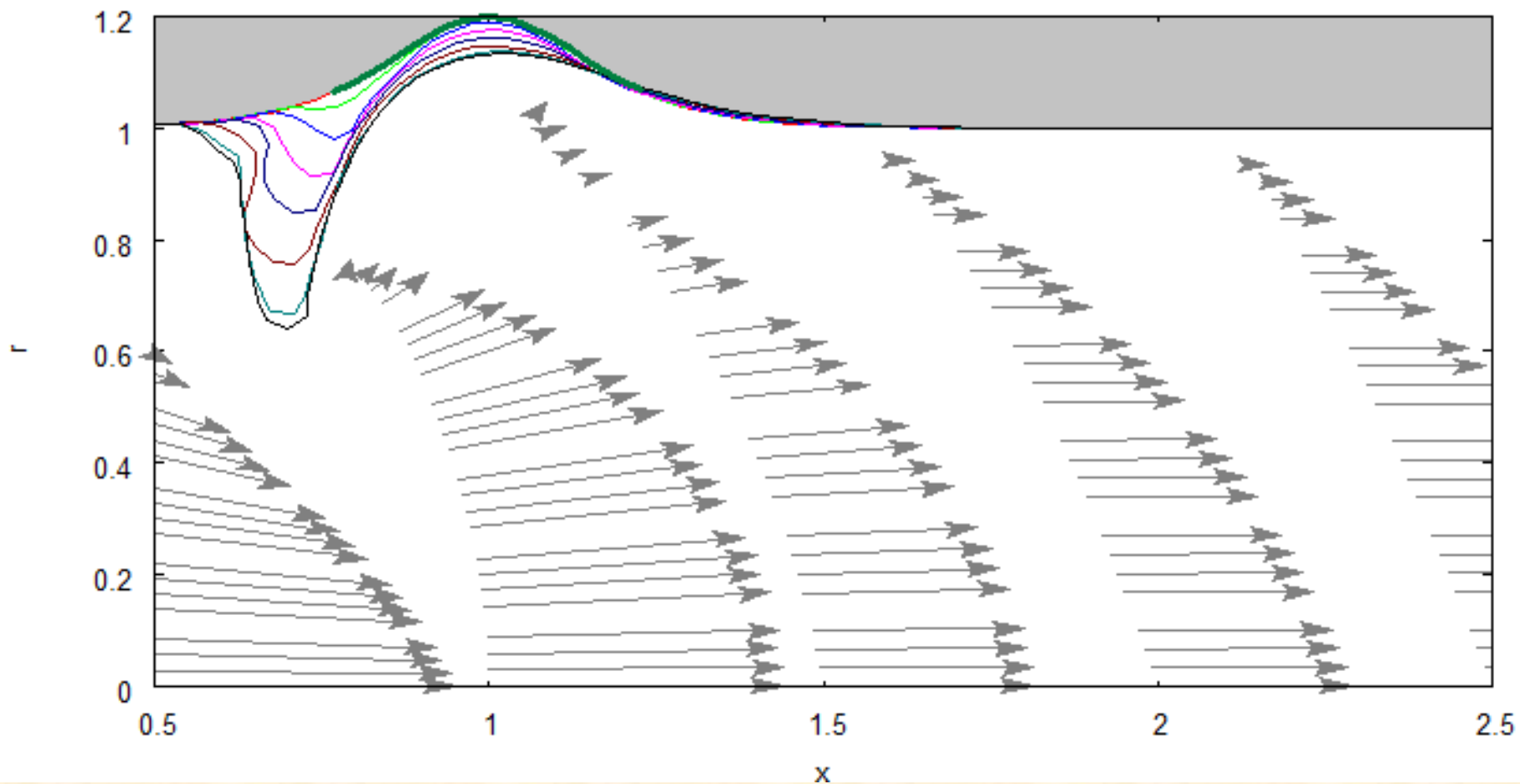
# Форма тромба на стенозе, $Re \sim 1$ , $t=0.5$ , 1...4



# Форма тромба на стенозе, $Re \sim 1$ , $t=0.5$ , 1, 1.5



# Форма тромба в аневризме, $Re \sim 1$ , $t = 0.5, 1 \dots 3$



# Результаты

- Модифицирован численный метод расчета уравнений модели переноса тромбоцитов в потоке крови в случае заполненной матрицы сдвиг-вызванной диффузии частиц.
- Сделана оценка компонентов матрицы сдвиг-вызванной диффузии недеформируемых сферических частиц.
- На основе численных расчетов показано, что рост тромба зависит от числа Рейнольдса.