

Исследование устойчивости распределенных асимметрических репликаторных систем

Якушкина Татьяна Сергеевна

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

конференция
**Математические модели и численные методы в
биоматематике**

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф. **Братусь А.С.**

ИВМ РАН
11 октября 2012г.

Часть 1: Задачи, приводящие к репликаторной системе

- ▶ Биологические задачи (эволюционная теория игр)
- ▶ Экономические задачи теории игр

Часть 2: Анализ распределенной системы

- ▶ Пространственно однородные решения
- ▶ Пространственно неоднородные решения
- ▶ Распределенный аналог равновесия по Нэшу
- ▶ Двумерные задачи

Рассматривается модель взаимодействия популяций:

- ▶ Два вида, n и m популяций соответственно.
- ▶ x_i, y_i – численности i -ых популяций.
- ▶ Введение относительной численности для обоих видов

$$p_i = \frac{x_i}{\sum_{k=1}^n x_k}; \quad q_j = \frac{y_j}{\sum_{k=1}^m y_k};$$

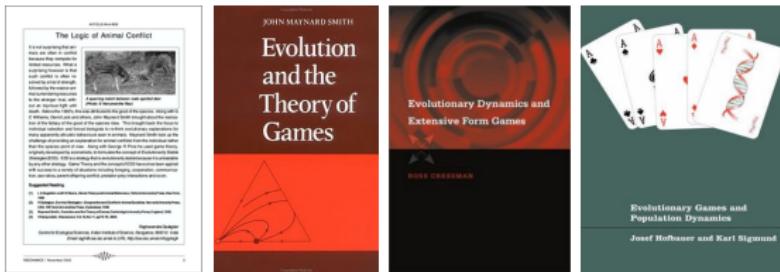
и использование закона воспроизведения позволяет записать систему

$$\begin{cases} \dot{p}_i = p_i ((Aq)_i - (p, Aq)); & i = \overline{1, n} \\ \dot{q}_j = q_j ((Bp)_j - (q, Bp)); & j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

A, B – матрицы соответствующих размерностей с постоянным элементами.

- ▶ Такую систему называют **репликаторной**.

- ▶ Hawk-Dove (Owner-Intruder)
- ▶ Battle of sexes
- ▶ Selfishness



- $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрицы выплат в игре.
- $u_i(t), v_i(t)$ – вероятности выбора i -й стратегии первым и вторым игроками соответственно ($i = \overline{1, n}$).

Динамическая система, описывающая игру:

$$\begin{cases} \dot{u}_i &= u_i ((Av)_i - (u, Av)); \quad i = \overline{1, n} \\ \dot{v}_j &= v_j ((Bu)_j - (v, Bu)); \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i = 1, \sum_{j=1}^n v_j = 1;$$

$$(Av)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j, (Bu)_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} u_i.$$

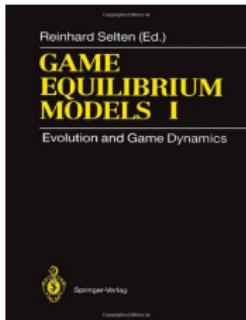
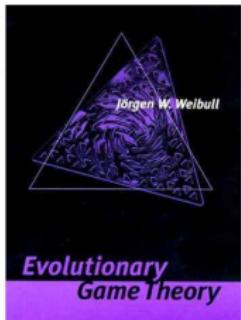
- ▶ Положение равновесия находится из системы

$$(Av)_1 = (Av)_2 = \dots = (Av)_n = \beta_1;$$

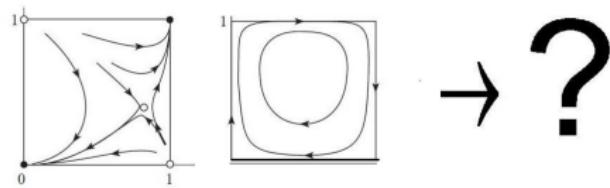
$$(Bu)_1 = (Bu)_2 = \dots = (Bu)_n = \beta_2.$$

- ▶ Равновесие по Нэшу всегда существует;
- ▶ Строгое равновесие есть чистая стратегия;
- ▶ Равновесие по Нэшу игры является положением равновесия динамической системы;
- ▶ Из устойчивости по Ляпунову п.р. следует равновесие по Нэшу.

- ▶ Chain-Store
- ▶ Partnership
- ▶ Дilemma заключенного



- ▶ Выявление стабилизирующего и дестабилизирующего влияния диффузии.
- ▶ Связь устойчивости по Ляпунову и равновесия по Нэшу для распределенной системы.
- ▶ Существование пространственно неоднородных решений.



- ▶ d_i^1, d_i^2 – коэффициенты диффузии; $i = \overline{1, n}$.
- ▶ $x \in D$ – пространственная переменная, D – ограниченное множество с кусочно-гладкой границей.
- ▶ $u_i(x, t), v_i(x, t)$ дифференцируемы по t и принадлежат пространству Соболева $W_2^k(D)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i ((Av)_i - f^1) + d_i^1 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}; & i = \overline{1, n} \\ \frac{\partial v_j}{\partial t} = v_j ((Bu)_j - f^2) + d_i^2 \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2}; & j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2)$$

$$f^1 = \int_D (u, Av) dx; \quad f^2 = \int_D (v, Bu) dx;$$

$$\forall t : \sum_{i=1}^n \int_D u_i(x, t) dx = 1; \quad \sum_{i=1}^n \int_D v_i(x, t) dx = 1.$$

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial n} \right|_{x \in \Gamma} = 0; \quad \left. \frac{\partial v_i}{\partial n} \right|_{x \in \Gamma} = 0; \quad u(x, 0) = \phi^1(x); \quad v(x, 0) = \phi^2(x).$$

Понятие о равновесии системы с диффузией

Стационарная система :

$$\begin{aligned} d_i^1 \Delta w^{(1)}(x) + w_i^{(1)} \left((Aw^{(2)})_i - f^1 \right) &= 0; \quad i = \overline{1, n}; \\ d_i^2 \Delta w^{(2)}(x) + w_i^{(2)} \left((Bw^{(1)})_i - f^2 \right) &= 0; \quad i = \overline{1, n}; \end{aligned} \quad (3)$$

- ▶ $w_i^{(k)}(x), k = 1, 2$, принадлежат пространству Соболева при $i = \overline{1, n}$,
- ▶ На границе $\frac{\partial w_i^1}{\partial n} = 0; \frac{\partial w_i^2}{\partial n} = 0$.
- ▶ $\sum_{i=1}^n \int_D w_i^{(k)} dx = 1; \quad k = 1, 2;$
- ▶ $f^1 = \sum_{i=1}^n \int_D (w^{(1)}, Aw^{(2)})_i; \quad f^2 = \sum_{i=1}^n \int_D (w^{(2)}, Bw^{(1)})_i$.

Верно:

1. Точки покоя исходной системы 1 удовлетворяют стационарным уравнениям 3.
2. Такие решения – **пространственно однородные** решения системы с диффузией 3.
3. Пространственно однородные решения системы 3 – положения равновесия 2.

Утверждение

Пусть (\hat{u}, \hat{v}) – устойчивое положение равновесия сосредоточенной репликаторной системы (1). Чтобы это пространственно однородное равновесие распределенной репликаторной системы было устойчиво, необходимо, чтобы

$$\sum_{i=1}^n (d_i^1 + d_i^2) > \frac{\theta}{\lambda_1};$$

где λ_1 – первое ненулевое собственное значение задачи
 $\Delta\psi(x) + \lambda\psi(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \delta_n\psi|_{x \in \Gamma} = 0.$

$$\theta = (\hat{u}, A\hat{v})(\hat{v}, B\hat{u}).$$

Запишем стационарную систему с диффузией в виде:

$$\begin{cases} \frac{dw_i^1}{dx} = p_i(x); \\ \frac{dp_i}{dx} = -\frac{1}{d_i^1} w_i^1 ((Aw^2)_i - f^1); \\ \frac{dw_i^2}{dx} = q_i(x); \\ \frac{dq_i}{dx} = -\frac{1}{d_i^2} w_i^2 ((Bw^1)_i - f^2); \end{cases} \quad (4)$$

Здесь переменную x можно интерпретировать как время.

$$f^1 = (w^1, Aw^2); \quad f^2 = (w^2, Bw^1).$$

$$p_i(0) = q_i(0) = 0 \Rightarrow w_i^k = 0; k = 1, 2; i = \overline{1, n}.$$

Определение

Будем говорить, что пара $(\hat{w}^1(x), \hat{w}^2(x)) \in S_n(\Omega) \times S_n(\Omega)$ является распределенным равновесием по Нэшу, если

$$\int_{\Omega} (u(x, t), A\hat{w}^2(x)) dx \leq \int_{\Omega} (\hat{w}^1(x), A\hat{w}^2(x)) dx;$$

$$\int_{\Omega} (v(x, t), B\hat{w}^1(x)) dx \leq \int_{\Omega} (\hat{w}^2(x), B\hat{w}^1(x)) dx;$$

$$\forall (u(x, t), v(x, t)) \in S_n(\Omega) \times S_n(\Omega) : u \neq \hat{w}^1; v \neq \hat{w}^2.$$

Теорема

Если $(\hat{w}^1(x), \hat{w}^2(x)) \in int(S_n \times S_n)$ является устойчивым по Ляпунову решением системы

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i ((Av)_i - f^1) + d_i^{(1)} \Delta u_i; \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} = v_i ((Bu)_i - f^2) + d_i^{(2)} \Delta v_i; \end{cases} i = \overline{1, n};$$

тогда $(\hat{w}^1(x), \hat{w}^2(x))$ – распределенное равновесие по Нэшу.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

Точка покоя системы

$$F = \left(\frac{b_{12}}{b_{12} + b_{21}}, \frac{b_{21}}{b_{12} + b_{21}}, \frac{a_{12}}{a_{12} + a_{21}}, \frac{a_{21}}{a_{12} + a_{21}} \right).$$

Введем параметр:

$$t = \frac{a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}}{(a_{12} + a_{21})(b_{12} + b_{21})}$$

Утверждение

- ▶ Введение диффузии оказывает стабилизирующий эффект на неустойчивую точку, если выполнено условие:

$$\prod_{i,j=1,2} d_i^{(j)} > \frac{t^2}{\mu_1^4}.$$

- ▶ Существуют такие наборы коэффициентов диффузии, что устойчивая точка дестабилизируется.
- ▶ Существуют такие наборы коэффициентов диффузии, что устойчивая точка сохраняет устойчивость.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & C/2 \\ G - C/2 - E & G - C/2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & G - C/2 - E \\ G - C & G - C/2 \end{bmatrix}.$$

Где $0 < E < G < C < 2(G - E)$

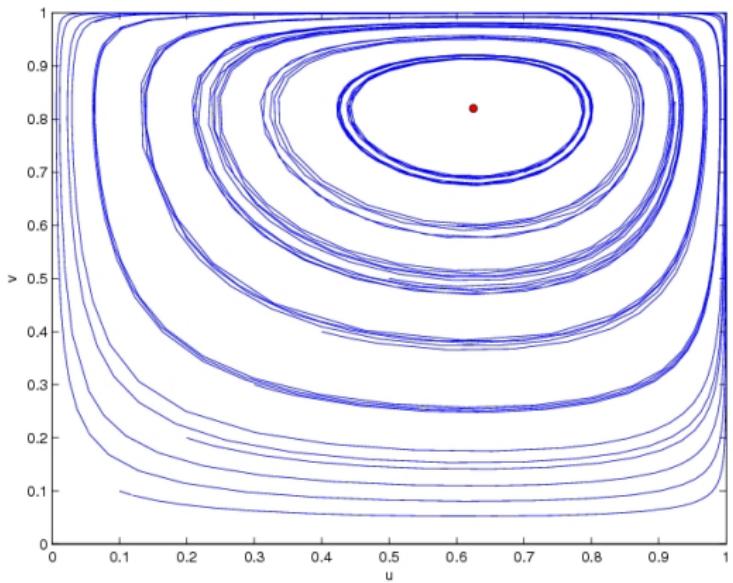
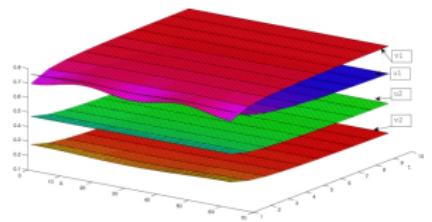
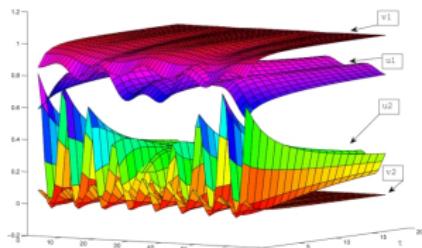


Рис.. Фазовый портрет системы без диффузии.

Иллюстрации: эффект диффузии



(а) стабилизация



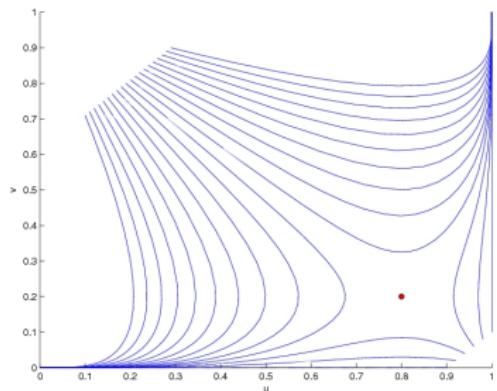
(б) дестабилизация

Рис.. Потеря устойчивости.

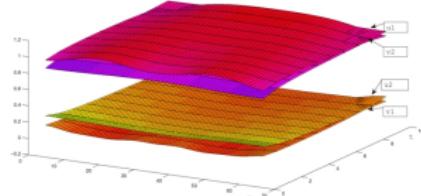
Иллюстрации: стабилизирующий эффект

Исследование
репликаторной
системы

Якушкина Т.С.



(а) без диффузии



(б) с диффузией

Рис.. Стабилизация.

-  *Sigmund K., Hofbauer J., Evolutionary games and population dynamics.* — Cambridge University Press, 1998.
-  *Cressman R., Evolutionary dynamics and extensive form games.* — The MIT Press, 2003.
-  *А.С. Братусь, А.С. Новожилов, А.П. Платонов. Динамические системы и модели биологии.* — М.: Изд-во Физматлит, 2010.
-  *Л. Коллатц, Задачи на собственные значения.* — М.: Издательство "Наука", 1968.
-  *J. Maynard Smith, Evolution and the theory of Games.* — Cambridge University Press, 1982.
-  *Sigmund K., Hofbauer J., Evolutionary game dynamics.* — Bulletin of American Mathematical Society, 40(4):479-519, 2003.
-  *Bratus A., Novozhilov A., Posvyanskii V. A note on the replicator equation with explicit space and global regulation.* — Mathematical Biosciences, Math Biosci Eng. 2011 Jul;8(3):659-76.



Karev G., Novozhilov A., Berezovskaya F. Novel Methods to analyse the replicator equation and asymptotical behavior of its solutions. 2009.



Bratus A., Novozhilov A., Posvyanskii V. Existence and stability of stationary solutions to spatially extended autocatalytic and hypercyclic systems under global regulation and with nonlinear growth rates. — Nonlinear Analysis: Real World Applications, 11:1897-1917, 2010.

Спасибо за внимание!