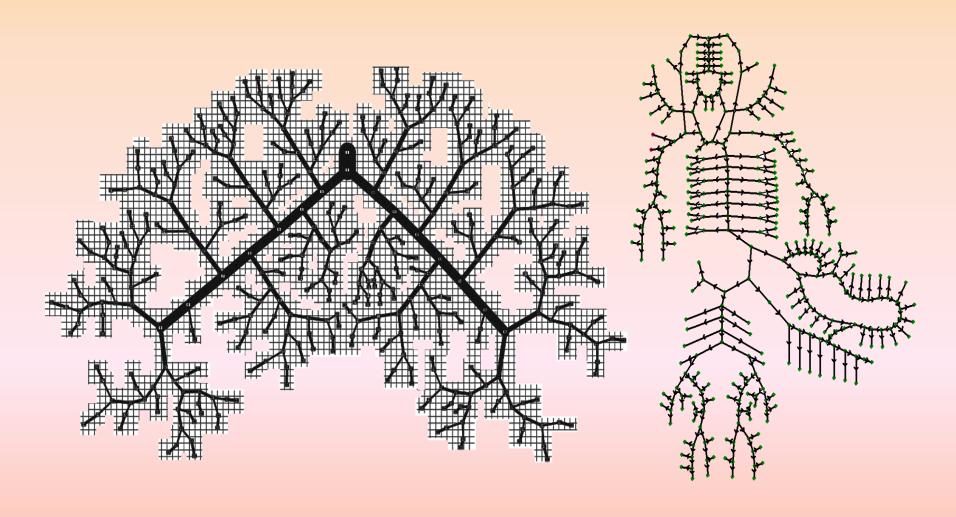
IV рабочая встреча МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В БИОМАТЕМАТИКЕ

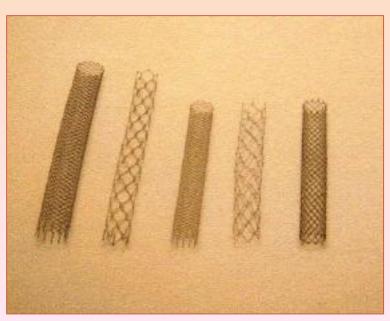
О некоторых аспектах разработки виртуальной системы кровообращения

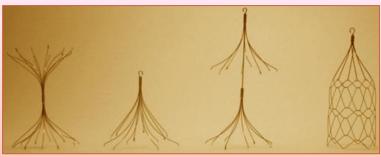
Добросердова Татьяна (МГУ), Иванов Юрий (ИВМ РАН), Крамаренко Василий (МФТИ)

Модель глобального кровообращения



Учет патологий, сосудистых имплантантов

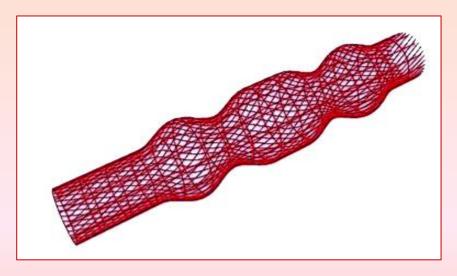




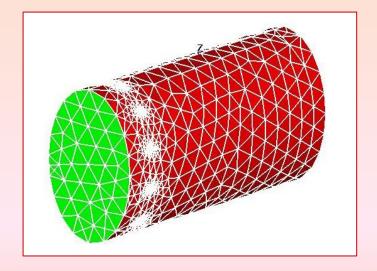


Методы учета патологий и сосудистых имплантантов

- Изменение уравнения состояния (описание эластичных свойств стенки сосуда)
- Замена одномерного участка сосуда трехмерной областью



Волоконная модель эластичной стенки сосуда

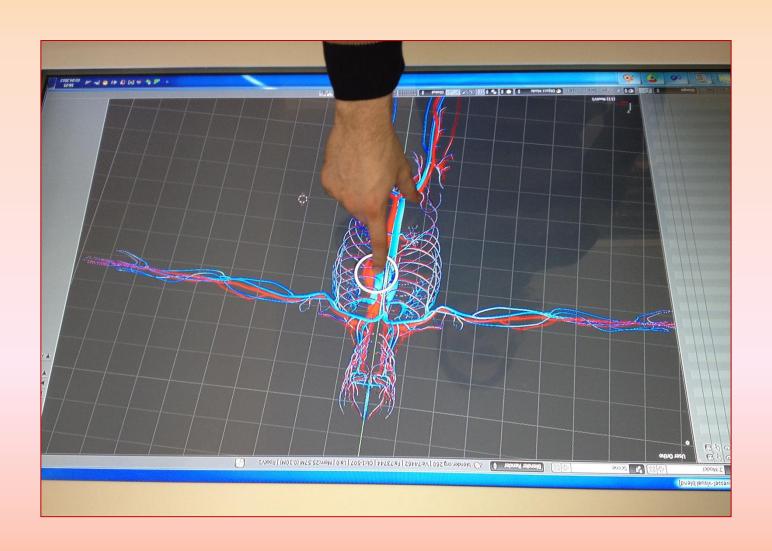


Модель течения жидкости (уравнения Навье-Стокса)

Адаптация модели под конкретного пациента



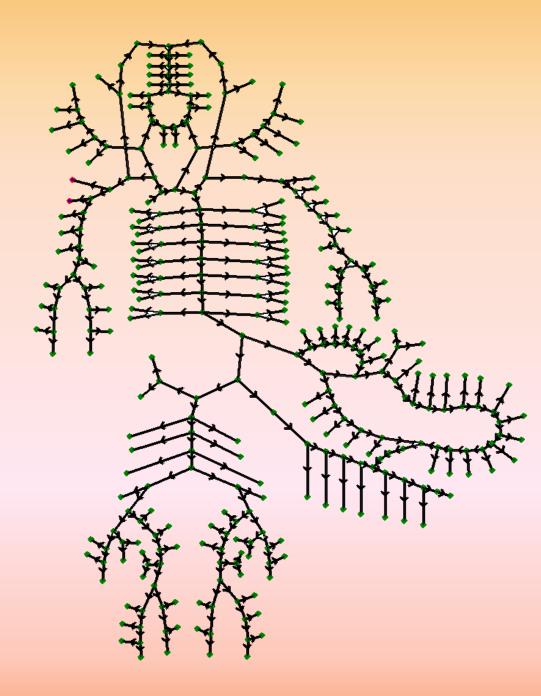
Удобный графический интерфейс



Некоторый аспекты разработки виртуальной системы кровообращения

- Трехмерное моделирования течения жидкости в некоторой окрестности.
 Граничные условия на стыке трехмерной и одномерной областей
- Задача о восстановлении формы сосуда
- Адаптация модели глобального кровообращения под конкретного пациента
- Программно-аппаратная реализация интерфейса

Модель глобальной циркуляции крови



Система уравнений

1. Баланс массы

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (uS)}{\partial x} = 0$$

2. Баланс импульса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = -16\mu u \frac{\eta(S)}{Sd^2}, \quad \eta(S) = \begin{cases} 2, S > S_0 \\ \frac{S}{S_0} + \frac{S_0}{S}, S \le S_0 \end{cases}$$

3. Уравнение состояния

$$p = \rho c^2 f(S), f(S) = \begin{cases} \exp\left(\frac{S}{S_0} - 1\right) - 1, S > S_0 \\ \ln\left(\frac{S}{S_0}\right), S \le S_0 \end{cases}$$

Граничные условия

Граничные условия:

1. Закон сохранения массы:

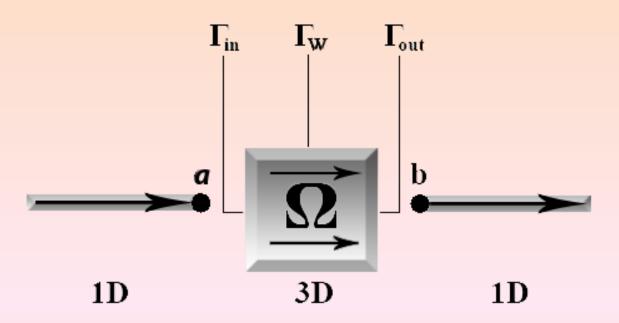
$$\sum_{k=k_1,...,k_M} \alpha_k^m Q_k = 0, \alpha_k^m = \pm 1, Q_k = u_k S_k$$

2. Закон Пуазейля:

$$p_{k}\left(t,x_{k}\right)-p_{m}^{node}\left(t\right)=\alpha_{k}R_{k}^{m}Q_{k},x_{k}=0,L_{k}$$

3. Уравнения совместности (условия, накладываемые характеристиками, покидающими область интегрирования)

Замена участка 3D областью



Постановка задачи в 3D области

• Уравнения Навье-Стокса:

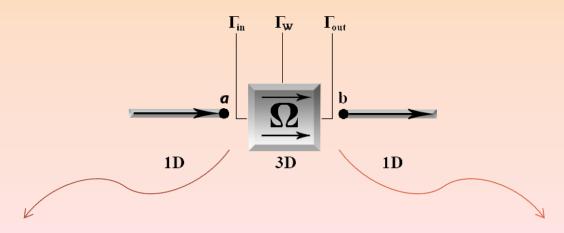
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \mathbf{B} \Omega \times [0, T],$$

$$div \mathbf{u} = 0 \mathbf{B} \Omega \times [0, T]$$

• Граничные условия:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}$$
 на $\Gamma_{in} \times [0, T]$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ на $\Gamma_{W} \times [0, T]$, $-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p\mathbf{n} = p_b \mathbf{n}$ на $\Gamma_{out} \times [0, T]$

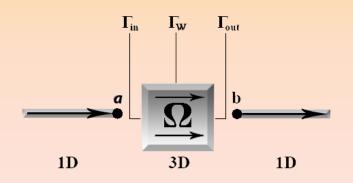
Граничные условия на стыке одномерной и трехмерной областей



$$|\Gamma_{in}|^{-1}\int\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s=\overline{u}_a$$
 $(|\Gamma_{in}|^{-1}\int\widetilde{\mathbf{g}}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s=1,\,\mathbf{u}_{in}=\overline{u}_a\widetilde{\mathbf{g}})$ 1D: $(\mathrm{Su})_{\,\,\,x}=0,$ Уравнение совместности

$$|\Gamma_{out}|^{-1}\int \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{ds} = \overline{u}_b$$
 $(-v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p\mathbf{n}) = p_b\mathbf{n}$ 1D: Уравнение совместности.

Алгоритм



$$ar{u}^n$$
, $ar{p}^n$, S^n , ${f u}^n$, p^n - известно $ar{u}^{n+1}$, $ar{p}^{n+1}$, S^{n+1} , ${f u}^{n+1}$, p^{n+1} - ищем

- 1. Решаем систему уравнений в 1D
- 2. $\mathbf{u}_{in}=\bar{u}_a \tilde{\mathbf{g}}$. \bar{p}^* , S^* интерполяция \bar{p} , S с двух предыдущих шагов:

$$\frac{1}{2\Delta t} (3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}) - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + (2\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \nabla \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = f^n,$$

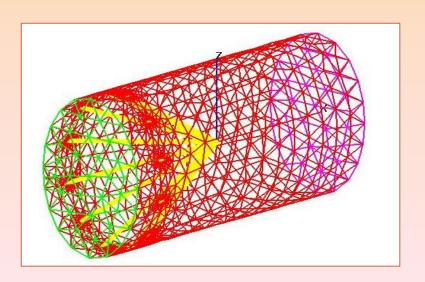
$$div \mathbf{u} = 0,$$

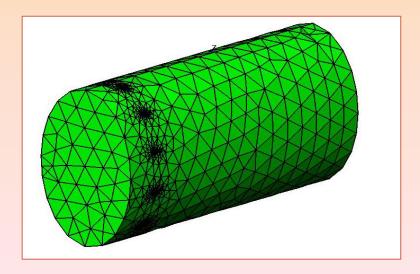
$$|\mathbf{u}^{n+1}|_{\Gamma_{in}} = \mathbf{u}_{in}, \, \mathbf{u}^{n+1}|_{\Gamma_0} = 0, \, (-\nu \frac{\partial \mathbf{u}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} + p^{n+1}\mathbf{n})|_{\Gamma_{out}} = \bar{p}^* \, \mathbf{n}.$$

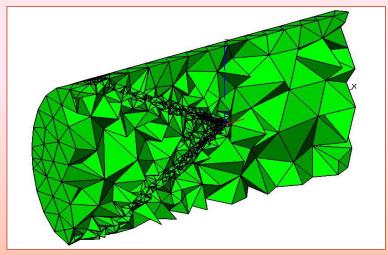
3. Вычисляем \bar{u}_b :

$$\bar{p}^* \int \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \, ds + \frac{\rho}{2} \int |\mathbf{u}^{n+1}|^2 \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \, ds = (\bar{p}^* S^* \bar{u}^{n+1} + \frac{\rho}{2} S^* (\bar{u}^{n+1})^3)|_b$$

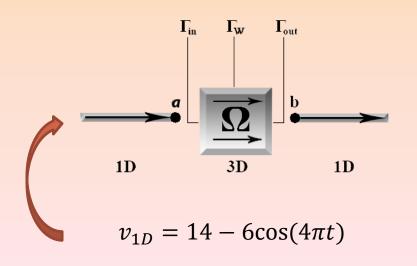
Пример сетки для кава-фильтра

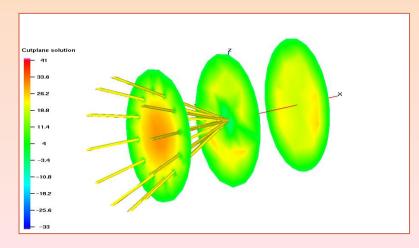




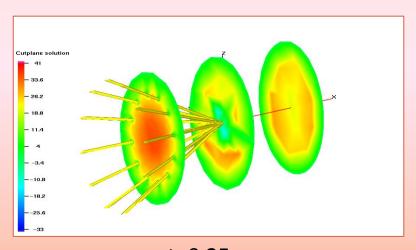


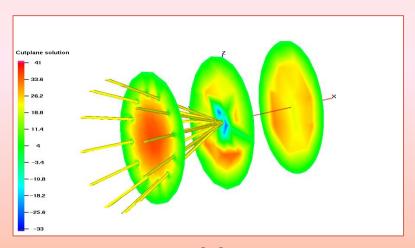
Пример расчета гемодинамики в системе сосудов с кава-фильтром





t=0.19

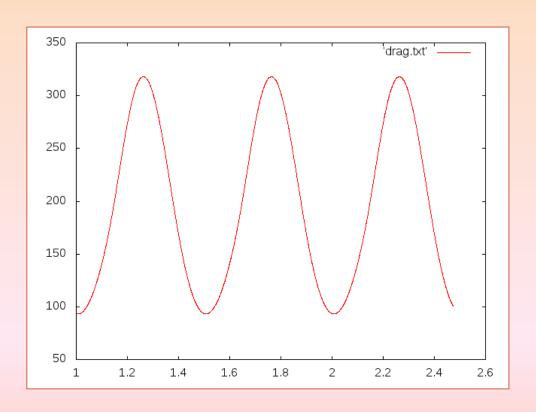




t=0.25

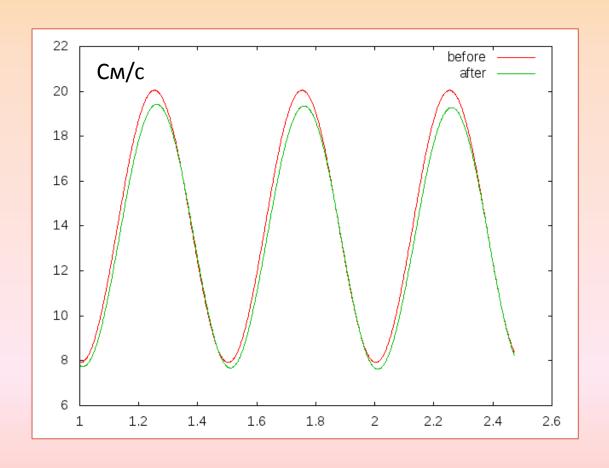
t = 0.35

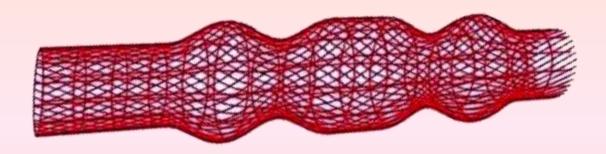
График силы, действующей на кава-фильтр

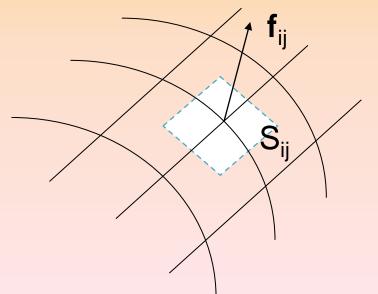


$$F = \int (\rho v \frac{\partial v_t}{\partial \mathbf{n}} n_y - p n_x) dS \quad [10^{-5} \text{H}]$$

График скорости в 1D сосудах







 $ilde{h}$ - толщина стенки сосуда

Пусть непрерывная плотность силы кусочно-постоянная функция:

$$\vec{F}(x) = \vec{f}_{ij}, x \in S_{ij}$$

Тогда сила упругости в элементарном объёме стенки

$$\vec{\mathcal{F}} = \int_{S_{ij} \times \widetilde{h}} \vec{F}(x) \approx \vec{f}_{ij} S_{ij} \widetilde{h}$$

Баланс сил, при трансмуральном давлении р:

$$p \cdot S_{ij} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}_{ij} \Rightarrow p = (\overrightarrow{f}_{ij}, \overrightarrow{n}_{ij})$$

$$(\vec{f}_{ij}, \vec{n}_{ij})\tilde{h} = p_{ij}, i = 0, ..., N, j = 0, ..., M,$$

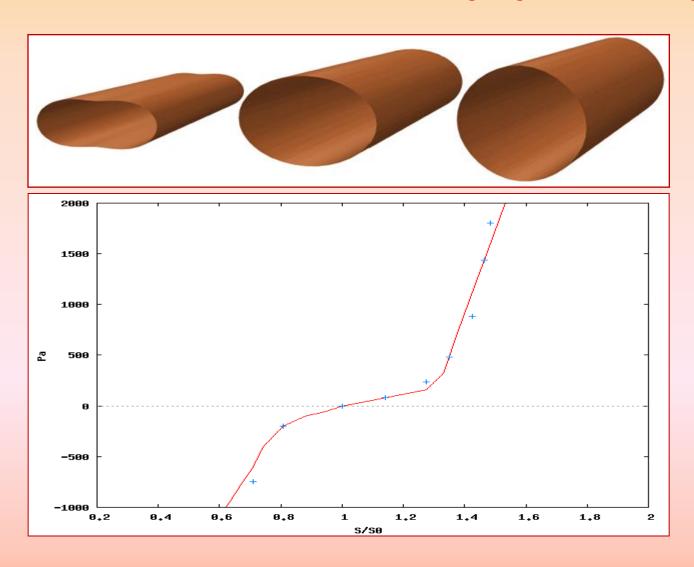
$$\vec{f}_{ij} = \vec{f}_{ij}(\vec{x}_{i|j-1}, \vec{x}_{i-1|j}, \vec{x}_{i|j}, \vec{x}_{i|j+1}, \vec{x}_{i+1|j}),$$

$$\vec{n}_{ij} = \vec{n}(\vec{x}_{i-1|j}, \vec{x}_{i|j-1}, \vec{x}_{i|j+1}, \vec{x}_{i+1|j}),$$

Будем считать, что перемещение осуществляется только в радиальном направлении, тогда система будет иметь вид:

$$\widehat{F_{ij}}(r_{i j-1}, r_{i-1 j}, r_{ij}, r_{i j+1}, r_{i+1 j})\widetilde{h} = p_{ij}$$

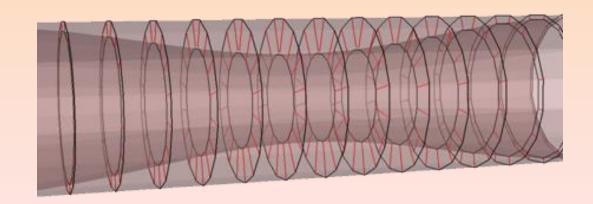
Система нелинейных уравнений решается неточным методом Ньютона.



Модель атеросклероза

Волоконно-пружинная модель:

стенка артерии и фиброзный покров атеросклеротической бляшки моделируются кольцевыми волокнами, а липидный слой — пружинами



Свойства биологических слоев:

	Модуль Юнга Е _с , КПа	Коэф. Пуассона v
Стенка артерии	50	0.48
Липидный слой	1	0.48
Фибр. покров	1000	0.48

Модель атеросклероза

Модуль упругости волокон (внешний и внутренний слои):

$$S = E/(1 - v^2)$$

Модуль упругости пружинок, моделирующих внутренний липидный слой:

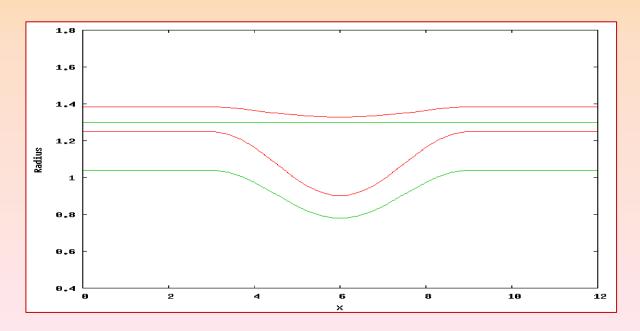
$$E_{sp} = \frac{aE_c}{(a+b)(1-2\nu_c)(1+\nu_c)}(1+(1-2\nu_c)\frac{b^2}{r^2})$$

Запись баланса сил для внешнего и внутреннего слоя даст следующую систему уравнений для нахождения формы:

$$(\vec{f}_{ij}^{cap}, \vec{n}_{ij}^{cap}) \cdot \tilde{h}_{ij}^{cap} + E_{sp}(a) \Delta_{ij} (\vec{l}_{ij}, \vec{n}_{ij}^{cap}) = p, \ \Delta_{ij} = \frac{|\vec{l}_{ij}^{0}| - l_{ij}^{0}}{l_{ij}^{0}},$$

$$E_{sp}(b) \Delta_{ij} (\vec{l}_{ij}, \vec{n}_{ij}^{art}) = (\vec{f}_{ij}^{art}, \vec{n}_{ij}^{art}) \cdot \tilde{h}_{ij}^{cap}, \ \vec{l}_{ij} = x_{ij}^{cap} - \vec{x}_{ij}^{art}$$

Модель атеросклероза



	p, KPa	$u_{(an)}(a)$, cm	$u_{(m)}(a)$, cm	$u_{(an)}(b)$, cm	$u_{(m)}(b)$, cm
a = 0.9192 cm	5	0.0316	0.0321	0.0206	0.0226
b = 1.3 cm	8	0.0506	0.0515	0.0330	0.0365
$h_1 = 0.1 \text{ cm}$	10	0.0632	0.0645	0.0413	0.0457
$h_2 = 0.1 \text{ cm}$	13	0.0822	0.0840	0.0536	0.0596
	15	0.0948	0.0969	0.0619	0.0688

Положение внешнего и внутреннего слоев сосуда при нулевом (зеленым) и в 5 КПа (красным) трансмуральном давлении.

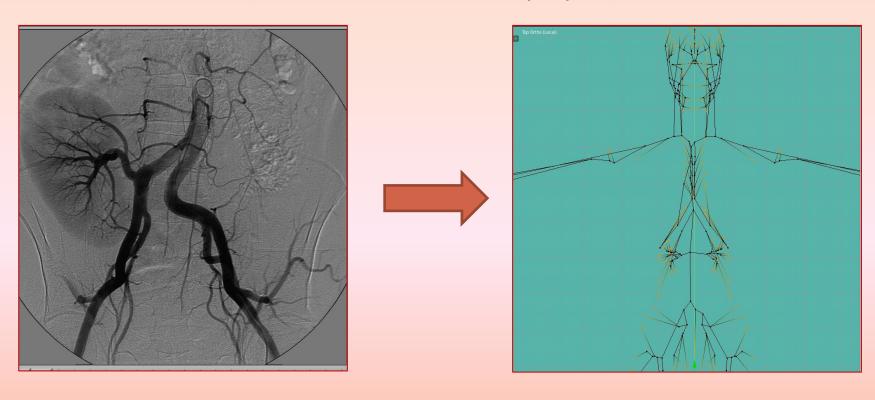
Сравнение смещений слоев при различных давлениях, полученных при помощи модели и аналитического решения, для простого случая — атеросклероза цилиндрической формы

Адаптация виртуальной системы кровообращения под конкретного пациента



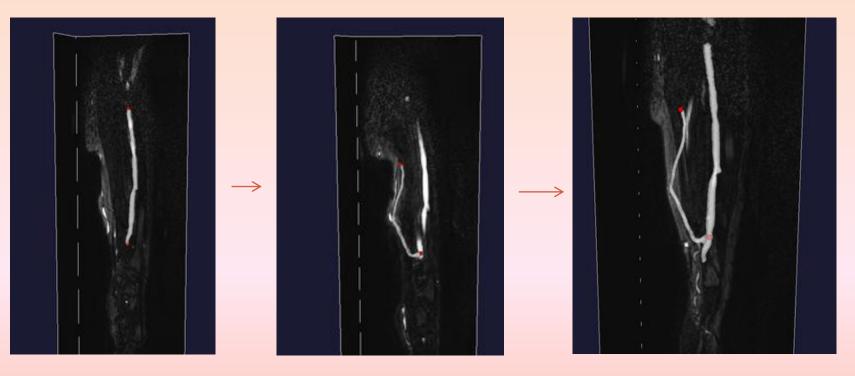
Трехмерная реконструкция сосудов по томографическим изображениям

Извлечение геометрии сосудов из DICOM-файлов (данные MPT, ангиографии)



Трехмерная реконструкция сосудов по томографическим изображениям

Сегментация:



Последовательная сегментация сосудов

Результат объединения двух сегментированных вен

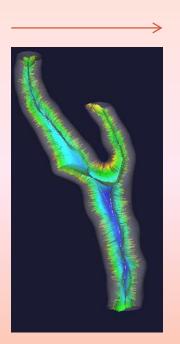
Трехмерная реконструкция сосудов по томографическим изображениям

Технологии:

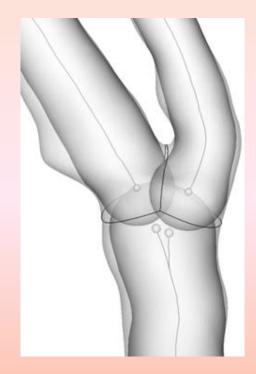
- VMTK The Vascular Modeling Toolkit (vmtk.org)
- 3D Slicer Software package for visualization and medical image computing (slicer.org)
- 3D Slicer + VMTK



Сегментация

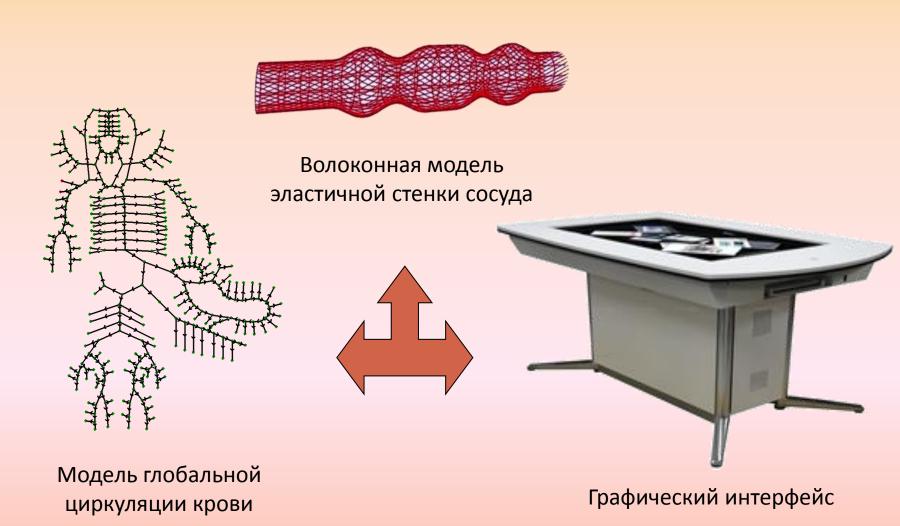


Вычисление центральных осей



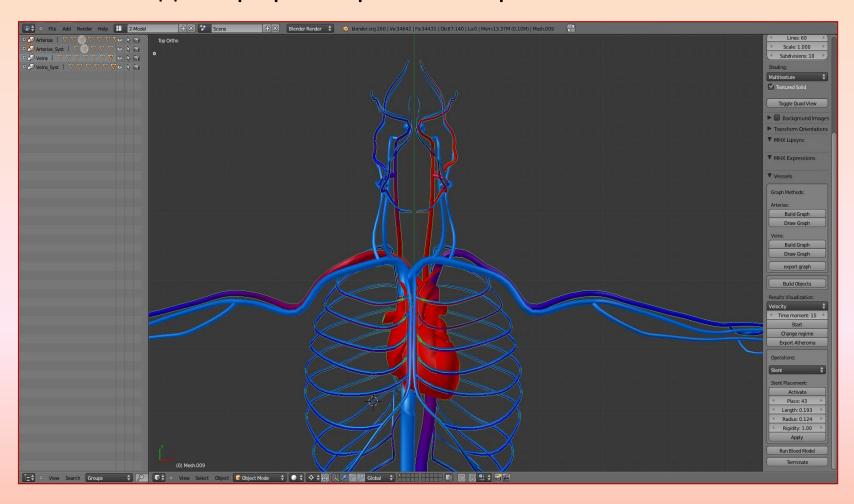
Анализ геометрии

Структура комплекса



Программная основа интерфейса

Редактор трехмерных изображений Blender



Аппаратная основа интерфейса

Мультисенсорная панель



Технология Windows Multitouch



Multitouch message



Используется в большинстве приложений.

Удобен при встраивании в программу и практически не требует написания дополнительного кода.

Отсутствует возможность расширения и написания своих движений

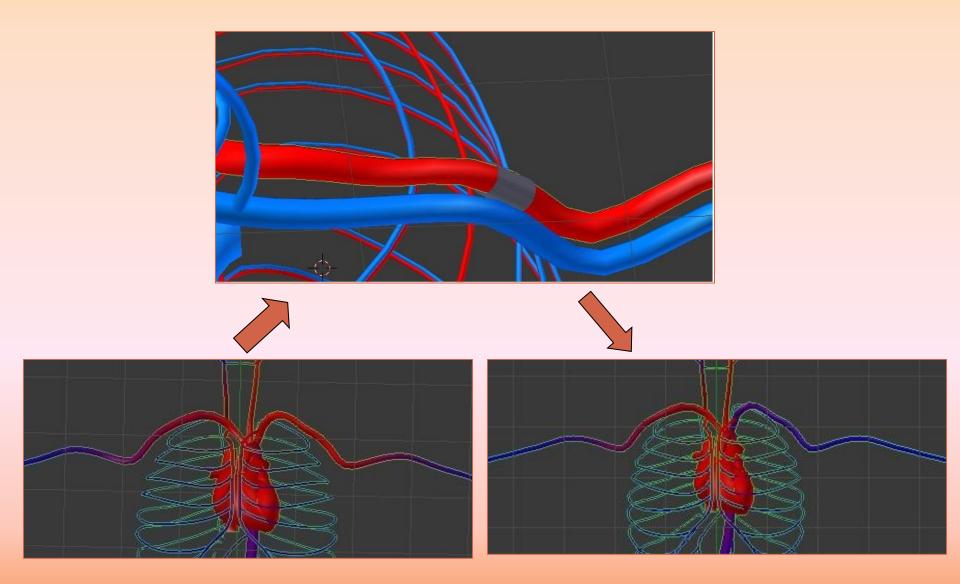


Выдает сырой набор точек касания

Для их интерпретации необходим свой модуль распознавания

Возможно написание своих движений

Пример использования интерфейса



Задачи и перспективы

- Добавление функционала
- Разработка интерфейса для работы с удаленным сервером
- Добавление взаимодействия с 3D блоком

Спасибо за внимание!