Применение метода монотонных операторов и М-матриц к исследованию решений некоторых моделей живых систем

Н.В.Перцев

Омский филиал Института математики
им. С.Л.Соболева СО РАН

1. Системы линейных Д/У с матрицами специального вида

Рассмотрим систему линейных д/у

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $x = x(t) \in R^m$, $F = (f_{ij})$ – заданная матрица, для всех $i, j = 1, \ldots, m$, верно: $f_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$, $f_{ii} < 0$.

Для исследования асимптотической устойчивости решения $x(t) = 0$ системы (1) воспользуемся тем, что матрица F имеет специальный вид, и к ней применим критерий Севастьянова–Котелянского:

F устойчива (все ее собстенные числа имеют отрицательные действительные части) $\Longleftrightarrow (-1)^i M_i > 0, \ 1 \leq i \leq m,$

где M_i – главный минор порядка i матрицы F (см., например, учебник Гантмахера Ф.Р.).

Рассмотрим систему линейных д/у с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k x(t-\omega_k) + \int_{-r}^{0} A(\theta)x(t+\theta)d\theta - Bx(t), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

где $x = x(t) \in R^m$, $\dot{x}(t)$ – правосторонняя производная, $A_k = (a_{ij}^k)$ – матрицы размером $m \times m$ с неотрицательными элементами, $0 \leq \omega_k \leq r < \infty$, $1 \leq k \leq n$,
$A(\theta) = (a_{ij}(\theta))$ – $m \times m$ матрица с неотрицательными, измеримыми, интегрируемыми элементами, $\theta \in [-r, 0]$,
$B = diag(b_1, \ldots, b_m)$, $b_i > 0$, $1 \leq i \leq m$.

<u>Результат Оболенского А.Ю.</u> Решение $x(t) = 0$ системы (2) асимптотически устойчиво $\Longleftrightarrow$ матрица

$$G = \sum_{k=1}^{n} A_k + \int_{-r}^{0} A(\theta)d\theta - B$$

является устойчивой (выполняется критерий Севастьянова–Котелянского).

Матрицы F и G, описанные выше, имеют специальный вид. В приложениях используются матрицы и другого вида.

Пусть $C = (c_{ij})$ – $m \times m$ матрица, элементы которой таковы: $c_{ij} \le 0$ для всех $i \ne j$, $i, j = 1, \ldots, m$.
Матрица C называется невырожденной М–матрицей, если выполняется одно из 50 эквивалентных условий.
Некоторые из них:

- все собственные числа матрицы C имеют положительные действительные части, т.е. $-C$ является устойчивой;
- матрица C^{-1} существует и имеет неотрицательные элементы, причем в каждой строке и в каждом столбце стоит хотя бы по одному положительному элементу;
- все главные миноры C положительны;
- существует $\xi \in R^m$, $\xi > 0$ (по–компонентно) такой, что $C\xi > 0$ (по–компонентно).

2. Системы нелинейных Д/У со смешанной монотонностью правых частей: асимптотическая устойчивость положений равновесия и построение их областей притяжения.

Будем изучать достаточные условия существования ограниченных решений задачи Коши

$$\dot{x}(t) = f(x_t) - \lambda\, x(t), \quad t \geq 0, \tag{3}$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in I = [-\omega, 0] \tag{4}$$

и их предельное поведение при $t \to +\infty$. Здесь:

$x(t) \in R^m$ – искомая функция, $\dot{x}(t)$ – ее правосторонняя производная,
$\psi(t) \in R^m$ – непрерывная начальная функция,
$\lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_m)$ – диагональная матрица, $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq m$,
$0 < \omega < \infty$ – максимальная величина запаздывания,
$x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in I = [-\omega, 0]$,
$f(x_t)$ – непрерывное отображение, $f(z) : C(I, D) \to R^m$,
где $C(I, D)$ – множество непрерывных функций $z : I \to D$ с нормой $||z||_C = \max_{\theta \in I} |z(\theta)|$, D – выпуклое подмножество R^m, $|\cdot|$ – одна из норм векторов из R^m.

Система д/у (3) рассматривается при следующем основном предположении. Полагаем, что для любых $z \in C(I, D)$ имеет место представление

$$f(z) = g(z, z), \tag{5}$$

где отображение $g(x, y) : C(I, D) \times C(I, D) \to R^m$ непрерывно, изотонно по x и антитонно по y, т.е.

$$g(x^1, y^1) \leq g(x^2, y^2)$$

для любых пар $(x^i, y^i) \in C(I, D) \times C(I, D)$, $i = 1, 2$, таких, что $x^1 \leq x^2$, $y^1 \geq y^2$.

Последнее равносильно тому, что для всех $s \in I$ верно

$$x^1(s) \leq x^2(s), \;\; y^1(s) \geq y^2(s).$$

Неравенства между векторами из R^m понимаем как неравенства между их компонентами.

Определим функцию $h(u,w) : D \times D \to R^m$ по формуле

$$h(u,w) = \lambda^{-1} g(u,w). \tag{6}$$

Пусть пара $(u^0, w^0) \in D \times D$ удовлетворяет неравенствам

$$u^0 \le w^0, \quad u^0 \le h(u^0, w^0), \quad w^0 \ge h(w^0, u^0). \tag{7}$$

Наряду с (7) рассмотрим систему уравнений

$$u = h(u,w),\ w = h(w,u),\ u^0 \le u,\ w \le w^0. \tag{8}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть неравенства (7) имеют решение (u^0, w^0). Тогда для любой начальной функции ψ, удовлетворяющей условию $u^0 \le \psi(t) \le w^0$, $t \in I$, существует решение $x(t)$ задачи (3), (4), определенное на $[0, \infty)$. Для решения $x(t)$ справедливы неравенства

$$u^0 \le x(t) \le w^0, \quad 0 \le t < \infty, \tag{9}$$

$$u^0 \le u^* \le \liminf_{t\to+\infty} x(t) \le \limsup_{t\to+\infty} x(t) \le w^* \le w^0, \tag{10}$$

в которых пара (u^*, w^*) является решением системы (8). Если, кроме того, $u^* = w^*$, то существует $\lim_{t\to+\infty} x(t) = x^*$, где $x^* = u^* = w^*$ – единственное положение равновесия системы уравнений (3) на множестве $u^0 \le u \le w^0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $x^* \in D$ – (внутреннее) положение равновесия системы (3), для которого: функция $h(u, w)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка в некоторой окрестности пары (x^*, x^*); $(I - A^*)$ является невырожденной M–матрицей, где $A^* = (a_{ik}), 1 \leq i,\ k \leq m$,

$$a_{ik} = \partial h_i(x^*, x^*)/\partial u_k - \partial h_i(x^*, x^*)/\partial w_k \geq 0. \tag{11}$$

Тогда:

1) существует

$$\xi^* \in R^m,\ \ \xi^* > 0,\ \ (I - A^*)\,\xi^* > 0, \tag{12}$$

такой, что пара $u^0 = x^* - \xi^*,\ \ w^0 = x^* + \xi^*$ удовлетворяет неравенствам (7);

2) для любой начальной функции

$$\psi(t) \in \Psi_0 = \{\psi \in R^m : u^0 \leq \psi \leq w^0\},\ t \in I,$$

задача (3), (4) имеет решение $u^0 \leq x(t) \leq w^0$, $t \in [0, \infty)$ и $x(t) \to x^*$ при $t \to +\infty$.

Практическое применение теоремы 1 — довольно трудоемкая задача: поиск решений системы неравенств (7).

Легко проверяемый критерий разрешимости этой системы дается в условиях теоремы 2 и связан со свойствами матрицы $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^*)$, которая должна быть невырожденной M–матрицей.

Предположения теоремы 2 задают достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия $\boldsymbol{x}^*$ системы (3).

Параллелепипед $\Psi_0 = \{\psi \in R^m : u^0 \le \psi \le w^0\}$, фигурирующий в теореме 2, указывает на границы изменения решения $x(t)$ и служит оценкой области притяжения положения равновесия x^*.
Этот параллелепипед строится в симметричной форме относительно точки x^*.

Вместе с тем, можно рассмотреть более общий случай, когда границы Ψ_0 задаются в виде

$$u^0 = x^* - z^1, \; w^0 = x^* + z^2,$$

где $z^1 \ge 0$, $z^2 \ge 0$ – некоторые искомые векторы.
Здесь можно построить целое семейство параллелепипедов

$$\Psi_{i0} = \{\psi \in R^m : x^* - \xi^*_{\ell i} \le \psi \le x^* + \xi^*_{ri}\},$$

которые служат более «богатой» оценкой области притяжения положения равновесия x^*.

3. Примеры

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k x(t-\omega_k) + \int_{-r}^{0} A(\theta)x(t+\theta)d\theta - Bx(t), \quad t \geq 0,$$

в которой элементы матриц A_k и матрицы $A(\theta)$ могут иметь произвольные знаки. Тогда теорема 2 приводит к следующему результату.

Решение $x(t) = 0$ представленной системы асимптотически устойчиво, если матрица

$$G^+ = \sum_{k=1}^{n} A_k^+ + \int_{-r}^{0} A^+(\theta)d\theta - B$$

является устойчивой, где $A_k^+ = (|a_{ij}^k|)$, $A^+(\theta) = (|a_{ij}(\theta)|)$.

Этот результат использован для изучения устойчивости нетривиальных положений равновесия математической модели противовирусного иммунного ответа (Марчук Г.И., Петров Р.В.). Были найдены асимптотически устойчивые положения равновесия, которые интерпретируются как иммунодефицитные состояния.

Пример 2. Рассмотрим систему нелинейных Д/У, описывающих распространение ВИЧ–инфекции (Романюха А.А., Носова Е.А., 2011):

$$\dot{x}_1 = -(\mu_1 + \gamma_{12})\, x_1 - \sum_{j=5}^{8} \alpha_{15j}\, x_j\, x_1 + \gamma_{21} x_2 + f_1,$$

$$\dot{x}_2 = -(\mu_2 + \gamma_{21} + \gamma_{23} + \gamma_{24})\, x_2 - \sum_{j=5}^{8} \alpha_{26j}\, x_j\, x_2 + \gamma_{12} x_1 + \gamma_{32} x_3 + \gamma_{42} x_4 + f_2,$$

$$\dot{x}_3 = -(\mu_3 + \gamma_{32})\, x_3 - \sum_{j=5}^{8} \alpha_{37j}\, x_j\, x_3 + \gamma_{12} x_1 + \gamma_{23} x_2,$$

$$\dot{x}_4 = -(\mu_4 + \gamma_{42})\, x_4 - \sum_{j=5}^{8} \alpha_{48j}\, x_j\, x_4 + \gamma_{12} x_1 + \gamma_{24} x_2,$$

(эта подсистема описывает численности групп неинфицированных индивидуумов с учетом их социальной дезадаптации)

$$\dot{x}_5 = -\mu_5\, x_5 + \sum_{j=5}^{8} \alpha_{15j}\, x_j\, x_1 + \gamma_{65} x_6,$$

$$\dot{x}_6 = -(\mu_6 + \gamma_{65})\, x_6 + \sum_{j=5}^{8} \alpha_{26j}\, x_j\, x_2 + \gamma_{76} x_7 + \gamma_{86} x_8,$$

$$\dot{x}_7 = -(\mu_7 + \gamma_{76})\, x_7 + \sum_{j=5}^{8} \alpha_{37j}\, x_j\, x_3,$$

$$\dot{x}_8 = -(\mu_8 + \gamma_{86})\, x_8 + \sum_{j=5}^{8} \alpha_{48j}\, x_j\, x_4,$$

(эта подсистема описывает численности групп ВИЧ–инфицированных индивидуумов с учетом их социальной дезадаптации)

$+$ НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ.

Все параметры модели положительны, начальные данные неотрицательны.

Система уравнений модели имеет положение равновесия

$$x_i^* > 0,\ i = 1,2,3,4,\quad x_j^* = 0,\ j = 5,6,7,8,$$

которое интерпретируется как отсутствие в популяции ВИЧ–инфекции.
Если исследовать это положение на асимптотическую устойчивость, то матрица системы линейного приближения $\dot{x} = Ax,\ x = (x_1, \dots, x_8)^T$, будет иметь блочный вид, и все будет определять подматрица C, отвечающая за динамику переменных $x_5(t), \dots, x_8(t)$:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{12} & -c_{13} & -c_{14} \\ -c_{21} & c_{22} & -c_{23} & -c_{24} \\ -c_{31} & -c_{32} & c_{33} & -c_{34} \\ -c_{41} & -c_{42} & -c_{43} & c_{44} \end{pmatrix},$$

$$c_{11} = \mu_5 - \alpha_{155}\, x_1^*,\ c_{12} = \gamma_{65} + \alpha_{156}\, x_1^*,\ c_{13} = \alpha_{157}\, x_1^*,\ c_{14} = \alpha_{158}\, x_1^*,$$
$$c_{21} = \alpha_{265}\, x_2^*,\ c_{22} = \mu_6 + \gamma_{65} - \alpha_{266}\, x_2^*,\ c_{23} = \gamma_{76} + \alpha_{267}\, x_2^*,\ c_{24} = \gamma_{86} + \alpha_{268}\, x_2^*,$$
$$c_{31} = \alpha_{375}\, x_3^*,\ c_{32} = \alpha_{376}\, x_3^*,\ c_{33} = \mu_7 + \gamma_{76} - \alpha_{377}\, x_3^*,\ c_{34} = \alpha_{378}\, x_3^*,$$
$$c_{41} = \alpha_{485}\, x_4^*,\ c_{42} = \alpha_{486}\, x_4^*,\ c_{43} = \alpha_{487}\, x_4^*,\ c_{44} = \mu_8 + \gamma_{86} - \alpha_{488}\, x_4^*.$$

Если C – невырожденная М–матрица, то изучаемое положение равновесия асимптотически устойчиво.

Более того, можно записать уравнения модели в интегральной форме

$$x(t) = x^0(t) + \int_0^t K(t,s)\, r(x(s))ds = (Hx)(t),\ t \geq 0,$$

и получить оценку

$$0 \leq x(t) = (Hx)(t) \leq (Lx)(t),\ t \geq 0,$$

где $(Lx)(t)$ линейный интегральный оператор (Вольтерра 2 рода), ядро которого содержит подматрицу C.

Если C – невырожденная М–матрица, то для любых начальных данных

$$x_i(t) \to x_i^* > 0,\ \ i = 1,2,3,4, \quad x_j(t) \to 0,\ \ j = 5,6,7,8, \quad t \to +\infty,$$

что означает искоренение ВИЧ–инфекции.

Пример 3. Рассмотрим систему д/у с запаздыванием

$$\dot{x}_1(t) = \gamma\, x_2(t-\omega_2) - \lambda_1\, x_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = r(x_1(t-\omega_1)) - \lambda_2\, x_2(t),\ \ t > 0,$$

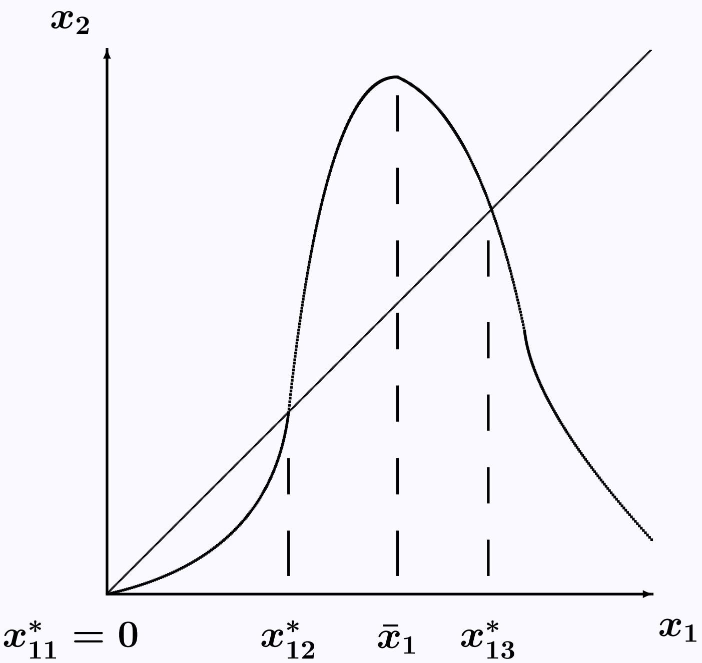
$$x_1(t) = \psi_1(t), \quad x_2(t) = \psi_2(t),$$

$$-\max\{\omega_1,\, \omega_2\} \le t \le 0.$$

Эта система может описывать регуляцию некоторых физиологических процессов с помощью отрицательных и положительных обратных связей.

Все параметры модели положительны, $r(u_1) \ge 0$ непрерывная при $0 \le u_1 < \infty$ функция, $r(0) = 0$, и представляет собой унимодальную функцию. Полагаем, что $r(u_1)$ имеет непрерывную, ограниченную по модулю производную на всем промежутке $0 \le u_1 < \infty$.

Начальные функции $\psi_1(t), \psi_2(t)$ — неотрицательны.



Типичный график $r(u_1)$ и возможные положения равновесия.

Положения равновесия находятся из системы ($\bar{\tau}_1 = 1/\lambda_1$, $\bar{\tau}_2 = 1/\lambda_2$):

$$x_1 = \bar{\tau}_1 \, \gamma \, x_2, \;\; x_2 = \bar{\tau}_2 \, r(x_1), \;\; x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0.$$

Нулевое решение модели асимптотически устойчиво при $\bar{\tau}_1 \, \bar{\tau}_2 \, \gamma \, r'(0) < 1$.

Рассмотрим положение равновесия $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, для которого $x_1^* > \bar{x}_1$.

Оно будет асимптотически устойчивым при выполнении неравенства $\bar{\tau}_1 \, \bar{\tau}_2 \, \gamma \, |r'(x_1^*)| < 1$.

Пусть, в частности, $r(u_1) = k\,u_1 \exp(-a\,u_1^2 + b\,u_1)$, где $k > 0$, $a > 0$, $b > 0$ – некоторые параметры.

Эти параметры выберем так, чтобы система уравнений имела три положения равновесия с неотрицательными компонентами ($\gamma = 2$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, $k = 2$, $a = 4.8$, $b = 5$).

Тогда $\bar{x}_1 = 0.675$, а третье положение равновесия x^*_{III} имеет компоненты $x^*_{1,III} = 0.727$, $x^*_{2,III} = 1.09$.

Получаем, что $|r'(x^*_{1,III})| = 2.618 < \lambda_1\,\lambda_2/\,\gamma = 6$ – верно.

Границы области притяжения для положения равновесия x^*_{III} таковы:

$$\Psi = \{\psi \in R^2 : 0.456 \le \psi_1 \le 0.997,\ 0.632 \le \psi_2 \le 1.548\}.$$

Тогда, если $\psi(t) \in \Psi$ при всех $-\max\{\omega_1,\,\omega_2\} \le t \le 0$, то $x(t) \to x^*_{III}$ при $t \to +\infty$.

4. Некоторые обобщения

4.1. В некоторых случаях системы уравнений могут иметь вид, отличный от (3). Рассмотрим систему которая описывает динамику численности популяции в условиях воздействия вредных веществ

$$\dot{z}_1(t) = \beta z_1(t) - \gamma z_1^2(t) - \frac{\sigma}{\omega}\int_{-\omega}^{0} \theta(z_2(t+s))ds \cdot z_1(t),$$

$$\dot{z}_2(t) = p - \theta(z_2(t))z_1(t) - \delta z_2(t),\ t \geq 0,$$

$$z_1(0) = z_1^0 > 0,\ z_2(t) = z_2^0(t) \geq 0,\ -\omega \leq t \leq 0.$$

В этой системе все параметры положительны, $0 < \omega < \infty$, $z_2^0(t)$ – заданная непрерывная функция, $-\omega \leq t \leq 0$.

Функция $\theta(z_2)$ обладает следующими свойствами: 1) $\theta(z_2)$ неотрицательна и непрерывна, $\theta(0) = 0$, 2) $\theta(z_2)$ имеет непрерывную неотрицательную производную, 3) существует конечный $\lim_{z_2 \to +\infty} \theta(z_2) = \bar{\theta}$.

Используя положительность z_1^0 и, как следствие, положительность $z_1(t)$, перейдем к новым переменным

$$x_1(t) = 1/z_1(t),\ x_2(t) = z_2(t).$$

Вместо решений исходной системы будем изучать решения системы

$$\dot{x}_1(t) = -\beta x_1(t) + \gamma + \frac{\sigma}{\omega}\int_{-\omega}^{0} \theta(x_2(t+s))ds \cdot x_1(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = p - \theta(x_2(t))\frac{1}{x_1(t)} - \delta x_2(t), t \geq 0,$$

$$x_1(t) = \psi_1(t) > 0,\ x_2(t) = \psi_2(t) \geq 0, -\omega \leq t \leq 0,$$

где $\psi_1(t) = 1/z_1^0,\ \psi_2(t) = z_2^0(t),\ \ -\omega \leq t \leq 0.$

4.2. Описанный подход может быть применен к изучению асимптотического поведения решений систем интегральных уравнений вида

$$\boldsymbol{x(t) = \int\limits_t^\infty R^0(a)\varphi(t-a)\,da + \int\limits_0^t R(a)f(x_{t-a})\,da, \quad t \geq 0,}$$

$$\boldsymbol{x(t) = \int\limits_0^\infty R^0(a)\varphi(t-a)\,da, \quad t \in I = [-\omega, 0],}$$

где
$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))^T$ – искомая функция,
отображение $f(x_t) = (f_1(x_t), \ldots, f_m(x_t))^T \geq 0$,
функция $\varphi(s) = (\varphi_1(s), \ldots, \varphi_m(s))^T \geq 0$,
матрицы

$$R^0(a) = diag(R_1^0(a), \ldots, R_m^0(a)) \geq 0,$$

$$R(a) = diag(R_1(a), \ldots, R_m(a)) \geq 0$$

и параметр $0 < \omega < \infty$ считаются заданными.