Репликаторное уравнение. Учет пространственной структуры

Александр Сергеевич Братусь,
Владимир Посвянский & Артем Новожилов

МИИТ, Кафедра «Прикладная математика–1»

Конференция

Математические модели и численные методы в биоматематике

ИВМ РАН

11 января 2011

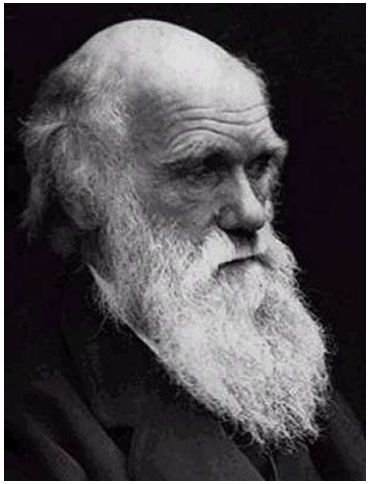
Содержание доклада:

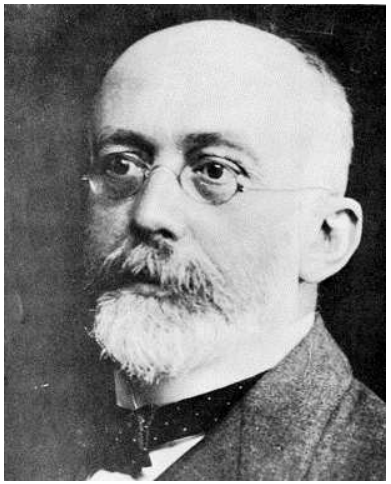
- **Часть 1:** Биологические задачи, приводящие к репликаторному уравнению
  - Теоретическая популяционная генетика
  - Химическая эволюция
  - Эволюционная теория игр
- **Часть 2:** Анализ распределенного репликаторного уравнения
  - Пространственно однородные решения
  - Пространственно неоднородные решения
  - Принцип конкурентного исключения
  - Распределенные аналоги равновесия Нэша и эволюционно устойчивого состояния

Теоретическая популяционная генетика:

Определение

Эволюция — изменение частот аллелей из поколения в поколение в общем пуле генов.





Дарвин+Мендель+Харди+Вайнберг=Селективная система

Теоретическая популяционная генетика:

Система Холдейна–Фишера–Райта (ХФР) с естественным отбором

$$\dot{p}_i = p_i\big((\mathbf{M}\mathbf{p})_i - \langle \mathbf{p}, \mathbf{M}\mathbf{p}\rangle\big), \quad i = 1, \ldots, k,$$

где p_i — частота i-ой аллели (разновидности гена), вектор $\mathbf{p} \in S_k = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \colon p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1\}$, $\mathbf{M}$ — симметрическая матрица приспособленностей диплоидных генотипов с элементами $m_{ij} = m_{ji}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение. Часто интересует полностью полиморфное равновесие $\hat{\mathbf{p}} \in \operatorname{int} S_k$.

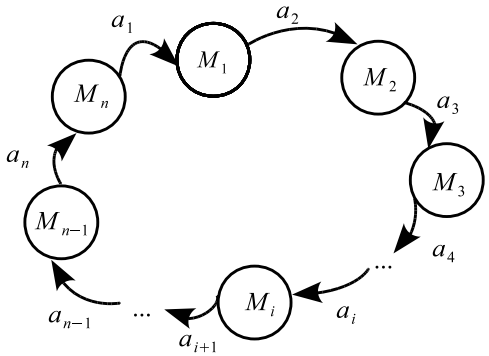
Теоретическая популяционная генетика:

$$\dot{p}_i = p_i\big((\mathbf{Mp})_i - \langle \mathbf{p}, \mathbf{Mp}\rangle\big), \quad i = 1, \ldots, k.$$

1. Средняя приспособленность $\bar{m}(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{Mp}\rangle$ — строгая функция Ляпунова;
2. Полностью полиморфное равновесие асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда является локальным максимумом функции $\bar{m}(\mathbf{p})$;
3. Любая траектория сходится к положению равновесия;
4. Система ХФР — градиентная система в метрике Свирежева–Шахшахани;
5. Асимптотически устойчивое полностью полиморфное положение равновесия — устойчиво глобально;
6. Сколько одновременно возможно устойчивых положений равновесия?

Химическая эволюция:

Так как первые макромолекулы на Земле не могли иметь большую длину в силу высокой частоты ошибок копирования, которая в свою очередь могла бы обеспечиваться сложными ферментами, для которых необходимы длинные макромолекулы...



Решение парадокса — гиперцикл!

Химическая эволюция:

Пусть a_i — скорость ингибирования репликации $i+1$ вида молекул (считая по модулю k), $p_i = [M_i]$ — относительная концентрация i-го типа молекул. Тогда динамика системы описывается системой

$$\dot{p}_i = p_i\big(a_{i-1}p_{i-1} - \sum_j a_j p_j p_{j-1}\big), \quad i = 1, \ldots, k, \quad p_0 \equiv p_k,$$

или, в матричных обозначениях,

$$\dot{p}_i = p_i\big((\mathbf{Ap})_i - \langle \mathbf{p}, \mathbf{Ap} \rangle\big), \quad i = 1, \ldots, k, \quad p_0 \equiv p_k.$$

Химическая эволюция:

$$\dot{p}_i = p_i\big(a_{i-1}p_{i-1} - \sum_j a_j p_j p_{j-1}\big), \quad i = 1, \ldots, k, \quad p_0 \equiv p_k.$$

1. Гиперциклическое уравнение имеет глобально устойчивое внутреннее положение равновесия, если $k \leq 4$;
2. Гиперциклическое уравнение имеет глобально устойчивый предельный цикл, если $k > 4$;
3. Гиперциклическое уравнение перманентно (биологически устойчиво);
4. В результате конкуренции гиперциклов выживает сильнейший, а эволюция гиперциклов происходит в силу появления связанных гиперциклов;
5. Устойчивость к паразитам?

Эволюционная теория игр:

Играет ли природа в «камень–ножницы–бумага»?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & -b_3 \\ -b_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & -b_2 & 0 \end{pmatrix},$$

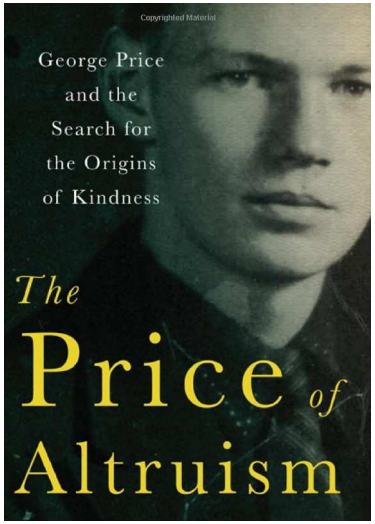
где a_i, $b_i > 0$.

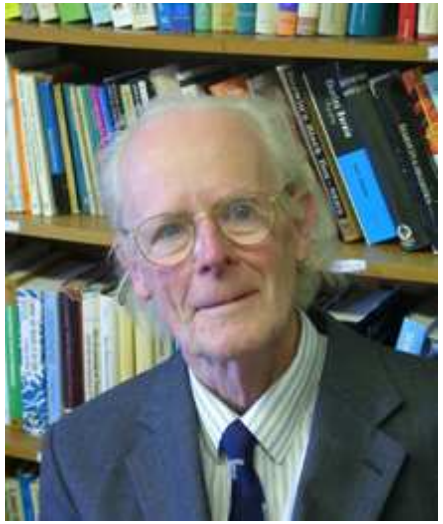
Эволюционная теория игр:

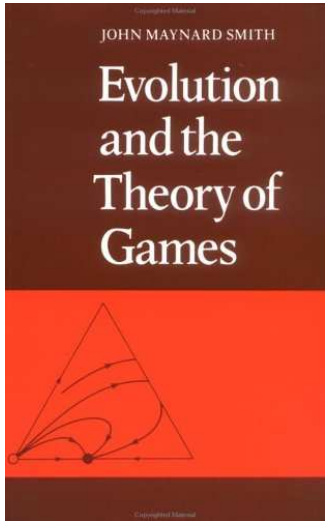
Отождествив выигрыш с приспособленностями различных индивидуумов, придерживающихся тех или иных стратегий, получим **репликаторное уравнение**:

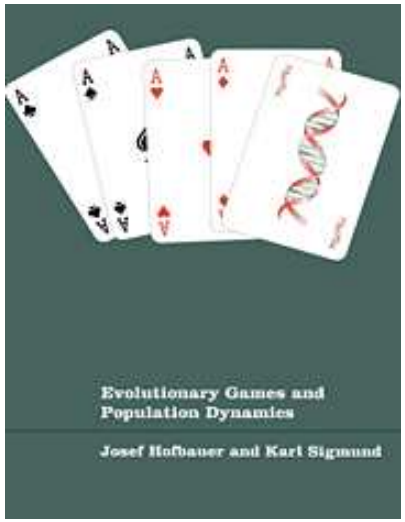
$$\dot{p}_i = p_i\big((\mathbf{Ap})_i - \langle \mathbf{p}, \mathbf{Ap}\rangle\big), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Динамический подход к статической теории игр!









Эволюционная теория игр:

Определение

Стратегия $\hat{\mathbf{p}} \in S_k$ — равновесие Нэша в игре с матрицей $\mathbf{A}$, если

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}} \rangle \leq \langle \hat{\mathbf{p}}, \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}} \rangle$$

для любых $\mathbf{p} \in S_k$. Если равенство выполняется только для $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}$, то равновесие строгое.

- Если $\hat{\mathbf{p}}$ — равновесие Нэша, то $\hat{\mathbf{p}}$ — положение равновесия репликаторного уравнения;
- Если $\hat{\mathbf{p}}$ — строгое, то $\hat{\mathbf{p}}$ — асимптотически устойчиво;
- Если $\hat{\mathbf{p}}$ устойчиво, то $\hat{\mathbf{p}}$ — равновесие Нэша;
- Любая игра имеет по крайней мере одно равновесие Нэша.

Эволюционная теория игр:

Определение

Вектор $\hat{\mathbf{p}} \in S_k$ называется эволюционно устойчивым состоянием (ESS) в игре с матрицей $\mathbf{A}$, если

$$\langle \hat{\mathbf{p}}, \mathbf{A}\mathbf{p} \rangle > \langle \mathbf{p}, \mathbf{A}\mathbf{p} \rangle$$

для любых $\mathbf{p} \neq \hat{\mathbf{p}}$ в некоторой окрестности $\hat{\mathbf{p}} \in S_k$.

- Если $\hat{\mathbf{p}}$ — ESS, то $\hat{\mathbf{p}}$ — асимптотически устойчивое положение репликаторного уравнения;
- Если $\hat{\mathbf{p}} \in \operatorname{int} S_k$ — ESS, то $\hat{\mathbf{p}}$ — глобально асимптотически устойчиво.

Эволюционная теория игр:

- Нелинейная функция приспособленности;
- Имитационная динамика;
- Несчетное число стратегий;
- Адаптивная динамика;
- Дискретные репликаторные системы;
- Системы клеточных автоматов;
- Конечный размер популяции и стохастическая динамика;
- **Диффузионные модели**.

Ref: Hofbauer & Sigmund: Evolutionary game dynamics, Bull AMS, 2003, 40: 479–519

Обозначения:

Рассматривается сосредоточенное репликаторное уравнение (РУ):

$$\dot{v}_i = v_i \left[(\mathbf{A}\mathbf{v})_i - f^{loc}(t) \right], \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{РУ}$$

где $f^{loc}(t) = \langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{A}\mathbf{v})_i v_i$, для которого, очевидно, $\sum_i v_i = 1$. Здесь $(\mathbf{A}\mathbf{v})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j(\mathbf{x}, t)$
Одновременно рассматривается распределенное репликаторное уравнение (РРУ)

$$\partial_t u_i = u_i \left[(\mathbf{A}\mathbf{u})_i - f^{sp}(t) \right] + d_i \Delta u_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad t > 0, \tag{РРУ}$$

где $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, Δ — оператор Лапласа.

Обозначения:

Для распределенного репликаторного уравнения (РРУ) условие постоянства концентраций заменяется условием глобального регулирования (УГР):

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} u_i(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = 1 \qquad \text{(УГР)}$$

Для (РРУ) имеем, что распределенная средняя приспособленность

$$f^{sp}(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} u_i (\mathbf{A}\mathbf{u})_i\, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \langle \mathbf{A}\mathbf{u},\, \mathbf{u} \rangle\, d\mathbf{x}. \qquad \text{(РСП)},$$

Обозначим $\Omega_t = \Omega \times [0, \infty)$ и рассмотрим пространство функций $B(\Omega_t)$ с нормой

$$\|y\|_B = \max_{t \geq 0} \left\{ \|y(\mathbf{x}, t)\|_{W_2^k} + \|\frac{\partial y}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\|_{W_2^k} \right\},$$

где $k = 1$, если $n = 1$, $k = 2$, если $n = 2, 3$. Решения задачи (РРУ) рассматриваются в множестве $S_n(\Omega_t)$, которое состоит из неотрицательных функций из $B(\Omega_t)$, для которых выполняется (УГР).

Обозначения:

Стационарные положения равновесия описываются эллиптической системой (стационарной репликаторной системой)

$$d_i \Delta w_i + w_i \left[(\mathbf{A}\mathbf{w})_i - f^{sp} \right] = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{РРУ'}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} w_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1. \tag{УГР'}$$

$$f^{sp} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \langle \mathbf{A}\mathbf{w},\, \mathbf{w} \rangle \, d\mathbf{x}, \tag{РСП'}$$

Решения задачи (РРУ') рассматриваются в множестве $S_n(\Omega)$, которое состоит из неотрицательных функций из пространства Соболева W_2^k, для которых выполнено (УГР')

Частные случаи:

Частные случаи (РРУ) — распределенная автокаталитическая система (РАС)

$$\partial_t v_i = v_i(a_i v_i - f_1(t)) + d_i \Delta v_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0. \quad \text{(РАС)}$$

и распределенная гиперциклическая система (РГС)

$$\partial_t v_i = v_i(a_i v_{i-1} - f_2(t)) + d_i \Delta v_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0, \ \text{(РГС)}$$

с очевидными выражениями для $f_1(t)$, $f_2(t)$ и аналогичными эллиптическими задачами (РАС') и (РГС'). Здесь $a_i, d_i > 0$

Устойчивость пространственно однородных положений равновесия:

Теорема

Пусть $\hat{\mathbf{v}} \in \operatorname{int} S_n$ *— асимптотически устойчивое положение равновесия репликаторного уравнения (РУ). Чтобы это пространственно однородное равновесие распределенного репликаторного уравнения было асимптотически устойчиво, необходимо, чтобы*

$$\sum_{i=1}^{n} d_i > \frac{\beta}{\lambda_1}, \quad \beta = \langle \mathbf{A}\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}} \rangle,$$

где λ_1 *— первое ненулевое собственное значение задачи*

$$\Delta\psi(\mathbf{x}) + \lambda\psi(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \partial_{\mathbf{n}}\psi|_{\boldsymbol{x}\in\Gamma} = 0.$$

Устойчивость пространственно однородных положений равновесия. Частные случаи:

$$\partial_t v_i = v_i(a_i v_i - f_1(t)) + d_i \Delta v_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad t > 0. \quad \text{(PAC)}$$

Теорема

Все пространственно однородные равновесия распределенного автокаталитического уравнения неустойчивы, если

$$0 < \frac{d_i}{a_i} < \frac{1}{\lambda_1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Вершины симплекса $R_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, n$ *устойчивы, если*

$$\frac{d_i}{a_i} > \frac{1}{\lambda_1}.$$

Устойчивость пространственно однородных положений равновесия. Частные случаи:

$$\partial_t v_i = v_i(a_i v_{i-1} - f_2(t)) + d_i \Delta v_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad t > 0, \text{ (РГС)}$$

Теорема

Пространственно однородное положение равновесия $P_2 \in \operatorname{int} S_n$ распределенной гиперциклической системы неустойчиво, если

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{d_i}{a_i} < \left(\frac{1}{\beta\lambda_1}\right)^n.$$

Если выполнено обратное неравенство, то P_2 устойчиво только для $n = 2, 3, 4$.

Существование пространственно неоднородных положений равновесия:

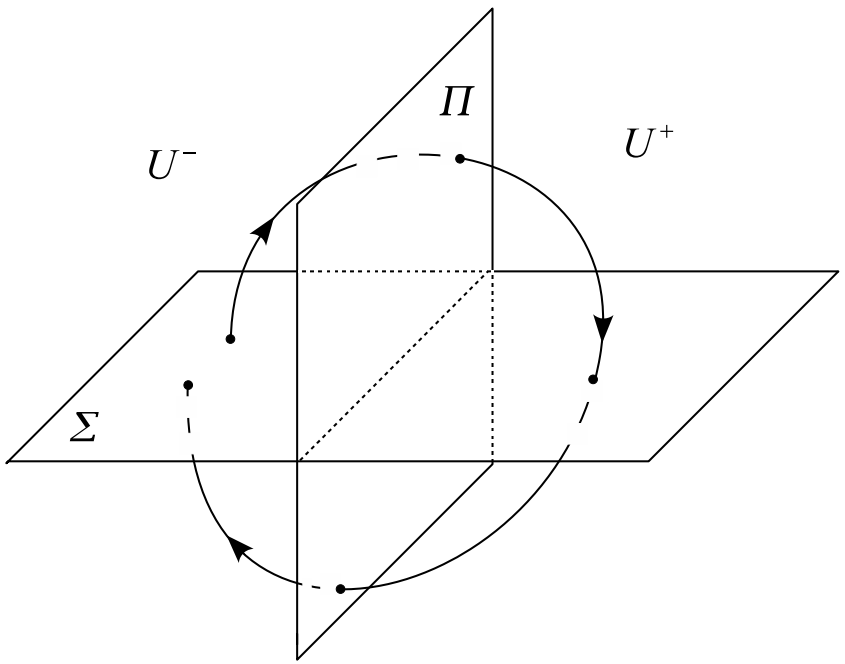
Для некоторых матриц $\mathbf{A}$ появляются пространственно неоднородные положения равновесия распределенного репликаторного уравнения. Наводящие соображения основаны на записи (РРУ') в форме

$$\frac{dw_i}{dx} = p_i,$$
$$d_i \frac{dp_i}{dx} = -w_i \left[(\mathbf{A}\mathbf{w})_i - f^{sp} \right],$$

Значительно больше можно сказать для автокаталитической и гиперциклической распределенных систем.

Существование пространственно неоднородных положений равновесия:

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \colon p_i = 0,\ i = 1, \ldots, n\}, \\
U^- &= \{\mathbf{w} \in S_n \colon (\mathbf{A}\mathbf{w})_i - f^{sp} < 0,\ i = 1, \ldots, n\}, \\
U^+ &= \{\mathbf{w} \in S_n \colon (\mathbf{A}\mathbf{w})_i - f^{sp} > 0,\ i = 1, \ldots, n\}, \\
\Pi &= \{\mathbf{w} \in S_n \colon w_i = \hat{v}_i,\ i = 1, \ldots, n\}.
\end{aligned}
$$

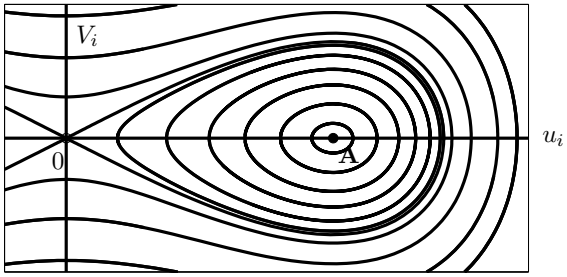


Существование пространственно неоднородных положений равновесия. Частные случаи:

Теорема

Пространственно неоднородное положение равновесия распределенной автокаталитической системы существует, если

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d_i}{a_i}\right) < \left(\frac{1}{\pi^2}\right).$$



Здесь существуют параметрические решения задачи

$$\frac{du_i}{dx_i} = V_i,$$
$$\frac{dV_i}{dx_i} = \frac{1}{d_i}(\bar{f}_1 - a_i u_i)u_i.$$

Существование пространственно неоднородных положений равновесия. Частные случаи:

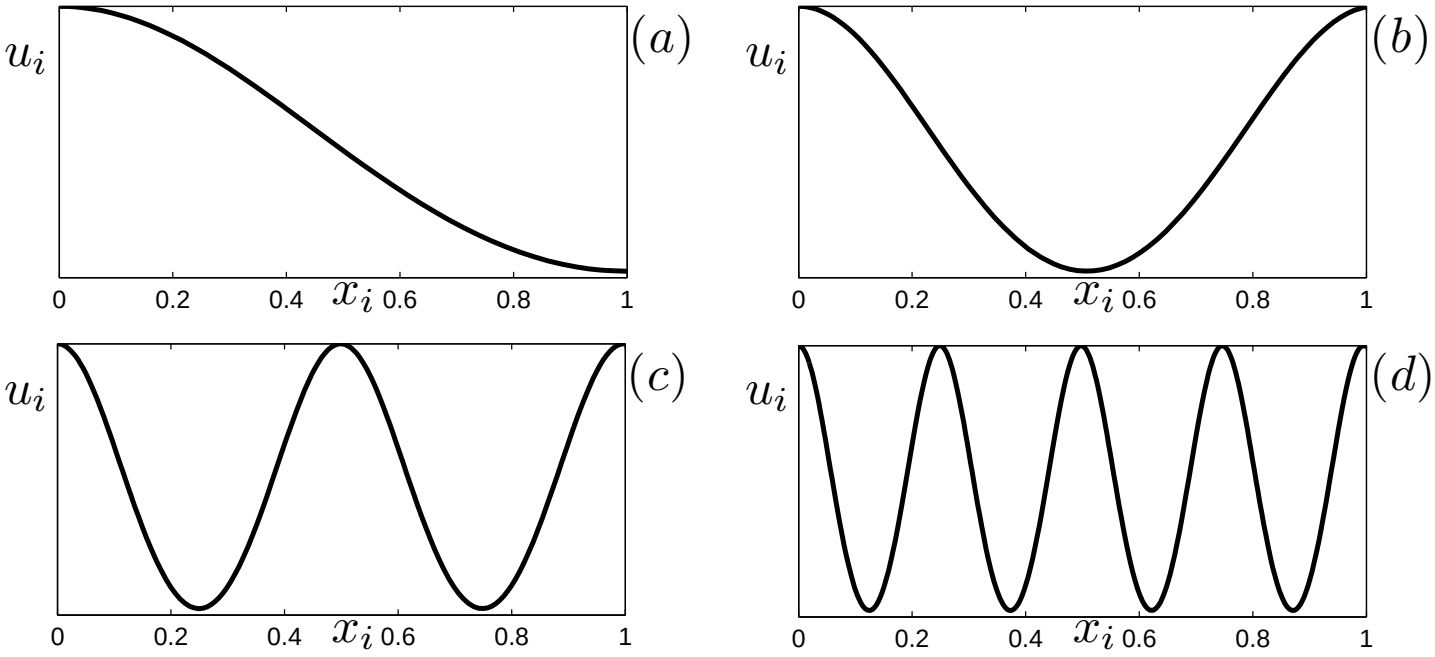


Рис.: Пространственно неоднородные стационарные решения распределенной автокаталитической системы, которые удовлетворяют условию $|x_i^1 - x_i^2| = 1$. (a) Половина цикла; (b) полный цикл; (c) два полных цикла; (d) четыре полных цикла

Устойчивость в среднем:

Определение

Назовем стационарные решения $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \in S_n(\Omega)$ распределенного репликаторного уравнения устойчивыми в смысле среднего интегрального значения, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для начальных условий $\varphi_i(\mathbf{x})$, которые удовлетворяют

$$|\bar{\varphi}_i - \hat{\bar{w}}_i| < \delta, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где

$$\bar{\varphi}_i = \int_\Omega \varphi_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \hat{\bar{w}}_i = \int_\Omega \hat{w}_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

следует, что

$$|\bar{u}_i(t) - \hat{\bar{w}}_i| < \varepsilon$$

для всех $i = 1, \ldots, n$ и $t > 0$.
Здесь $\bar{u}_i(t) = \int_\Omega u_i(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}$ и $u_i(\mathbf{x}, t)$, $i = 1, \ldots, n$ — решения распределенного репликаторного уравнения, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in S_n(\Omega_t)$.

Принцип конкурентного исключения для распределенной автокаталитической системы:

Теорема

Для почти всех начальных условий $\varphi_i(x)$, $\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \varphi_i(x)dx = 1$ *существует индекс* j, $1 \le j \le n$ *(который зависит от* $\varphi_i(x)$*) такой, что* $v_i(x,t) \to 0$ *для всех* $i \ne j$, *и* $\int_\Omega v_j(x,t) \to 1$, *когда* $t \to \infty$.

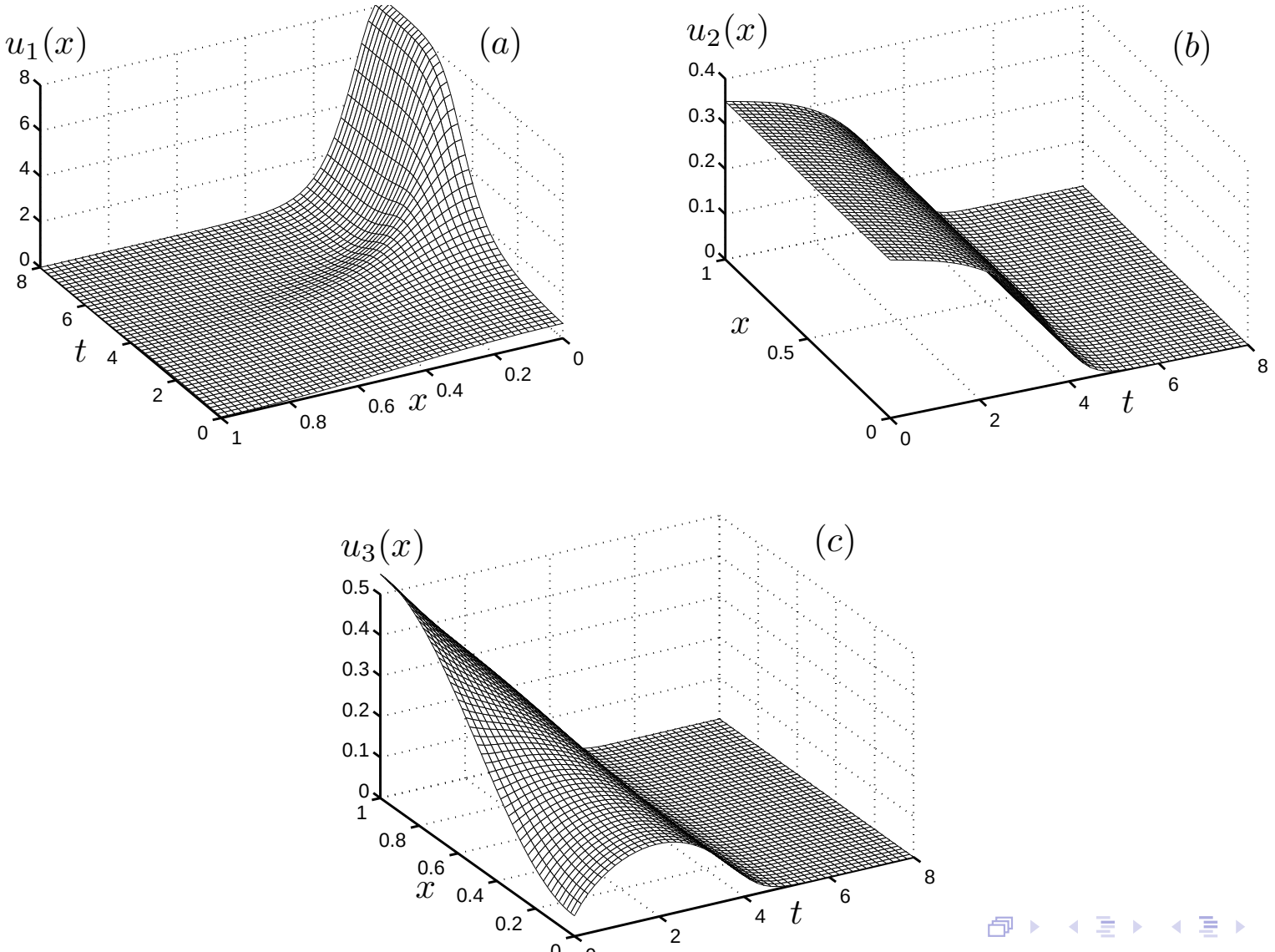
Теорема

Предположим, что для всех $i = 1, \ldots, n$ *выполнены неравенства.*

$$\frac{d_i}{a_i} < \frac{1}{\lambda_1}\,.$$

Тогда все пространственно неоднородные положения равновесия задачи (PAC) в форме $U^j(x) = (0, \ldots, 0, u_j(x), 0, \ldots, 0)$ *устойчивы в среднем интегральном смысле.*

Принцип конкурентного исключения для распределенной автокаталитической системы. Численный пример:

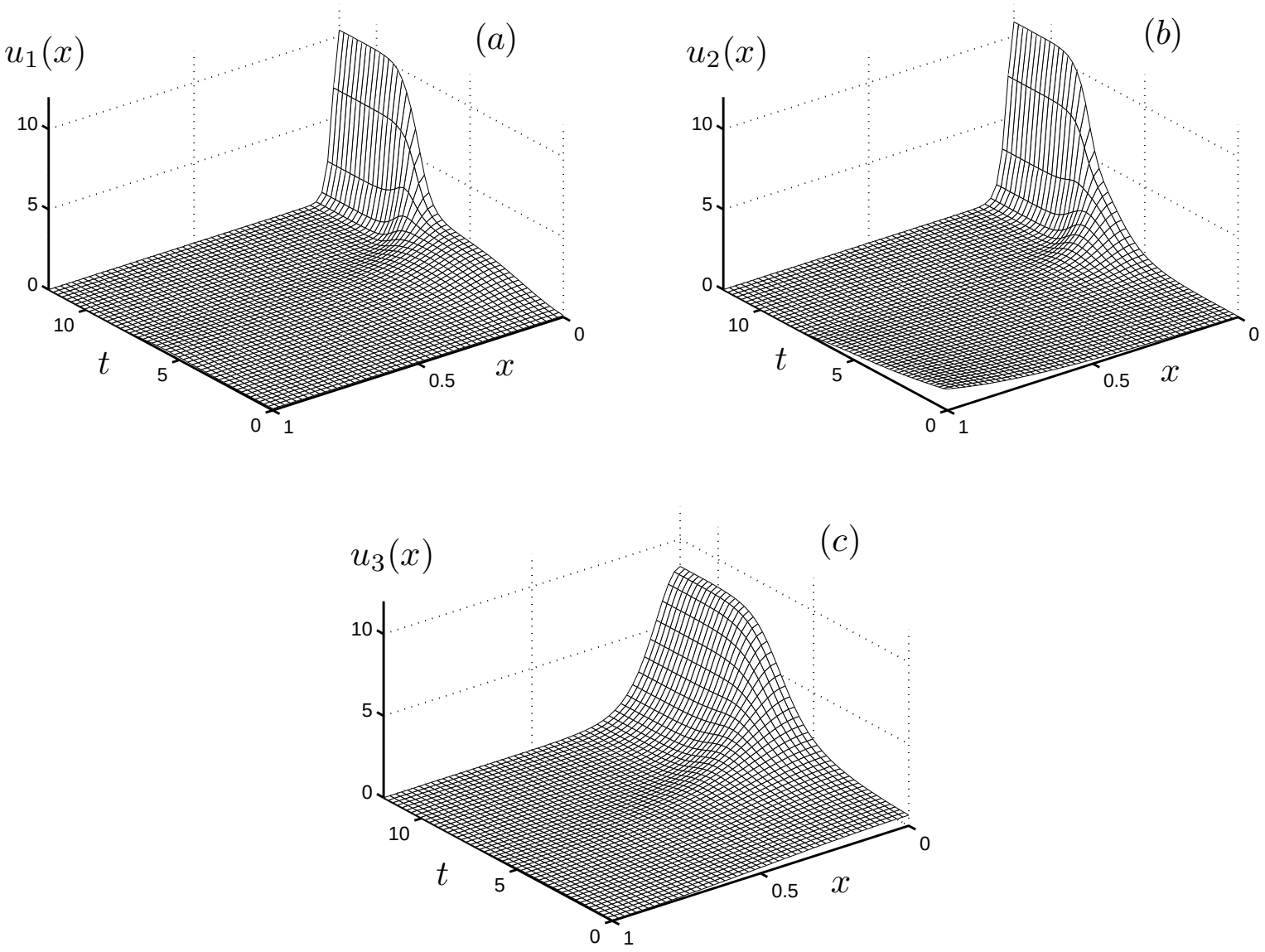


Распределенная гиперциклическая система. Перманентность:

Теорема

Пусть $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$ *— пространственно неоднородное положение равновесия распределенной гиперциклической системы такое, что* $\bar{u} = P_2 \in \operatorname{int} S_k$. *Тогда* $u(x)$ *устойчиво в среднем интегральном смысле.*

Распределенная гиперциклическая система. Численный пример:



Распределенное равновесие Нэша:

Определение

Функцию $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \in S_n(\Omega)$ назовем распределенным равновесием Нэша, если

$$\int_\Omega \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t),\ \mathbf{A}\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x})\rangle\, d\mathbf{x} \le \int_\Omega \langle \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}),\ \mathbf{A}\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x})\rangle\, d\mathbf{x}$$

для любой вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in S_n(\Omega_t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \ne \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x})$.

Теорема

Если $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \in \operatorname{int} S_n(\Omega)$ — устойчивое по Ляпунову положение равновесие распределенного репликаторного уравнения, то $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x})$ — распределенное равновесие Нэша.

Распределенное эволюционно устойчивое состояние (DESS):

Определение

Функцию $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \in S_n(\Omega)$ назовем распределенным эволюционно устойчивым состоянием (DESS), если

$$\int_\Omega \langle \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}),\, \mathbf{A}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\rangle d\mathbf{x} > \int_\Omega \langle \mathbf{u}(\mathbf{x},t),\, \mathbf{A}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\rangle\, d\mathbf{x}$$

для всех $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) \in S_n(\Omega_t)$ из окрестности $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \in S_n(\Omega)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) \neq \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{x})$.

Теорема

Пусть $\hat{\mathbf{w}} \in \operatorname{int} S_n$ — пространственно однородное положение равновесие распределенного репликаторного уравнения. Если $\hat{\mathbf{w}}$ — DESS, то $\hat{\mathbf{w}}$ асимптотически устойчиво в смысле среднего интегрального значения.

Достаточные условия для DESS:

Теорема

Положение равновесия $\hat{\mathbf{w}} \in \operatorname{int} S_n$ *— DESS, если*

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{c}^0(t), \mathbf{c}^0(t) \rangle \leq -\gamma^2 |\mathbf{c}^0(t)|^2, \quad \gamma > 0$$

для всех $\mathbf{c}^0(t)$*, удовлетворяющих*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^0(t) = 0.$$

Примеры:

Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a < c,\, d < b.$$

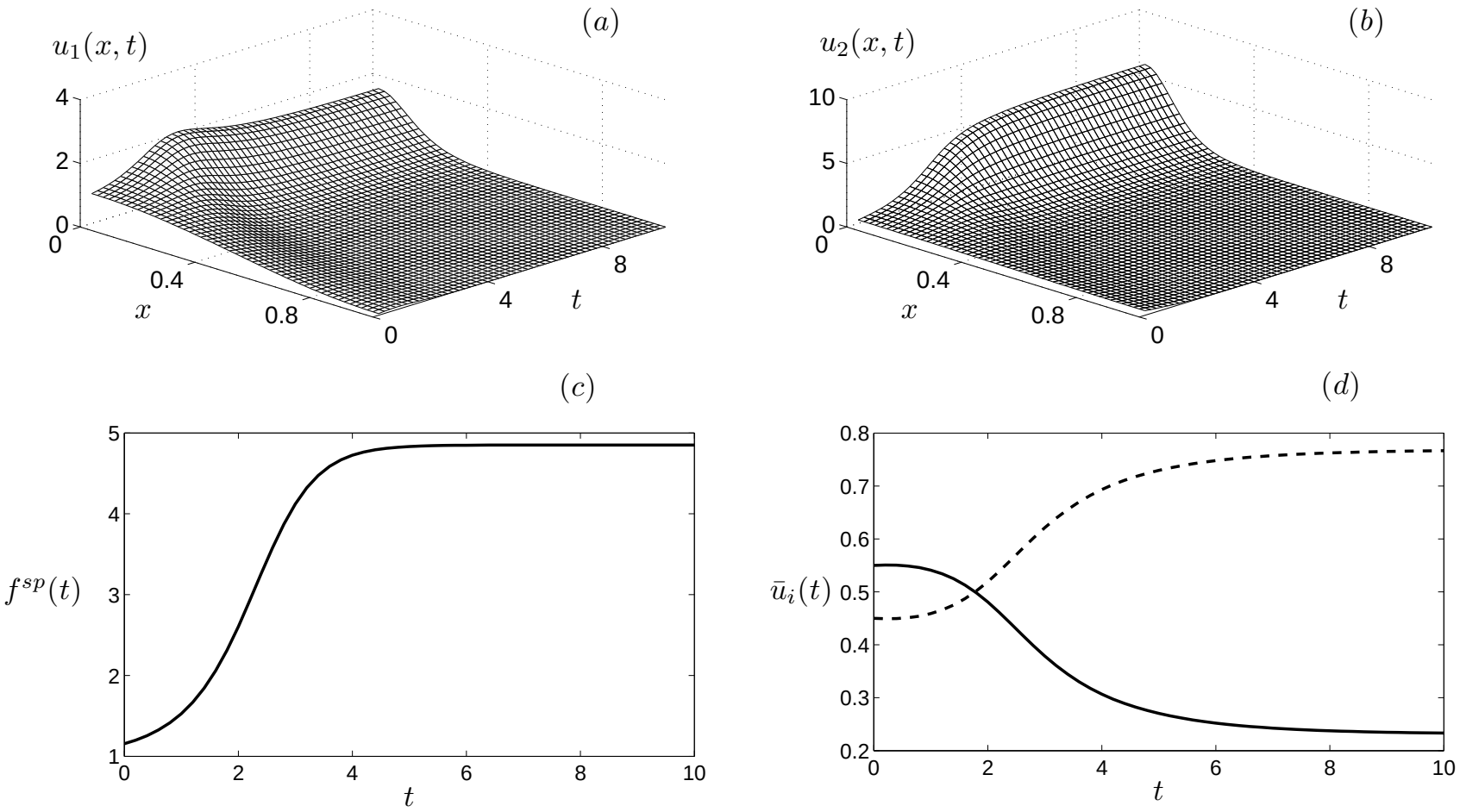
Имеем

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{c}^0(t), \mathbf{c}^0(t) \rangle = -(c_1^0)^2(b - a + c - d),$$

и следовательно пространно однородное положение равновесия — DESS, если $\gamma^2 = b - a + c - d > 0$.

Примеры:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.8 & 1.1 \\ 1.2 & 0.9 \end{pmatrix}.$$



Примеры:

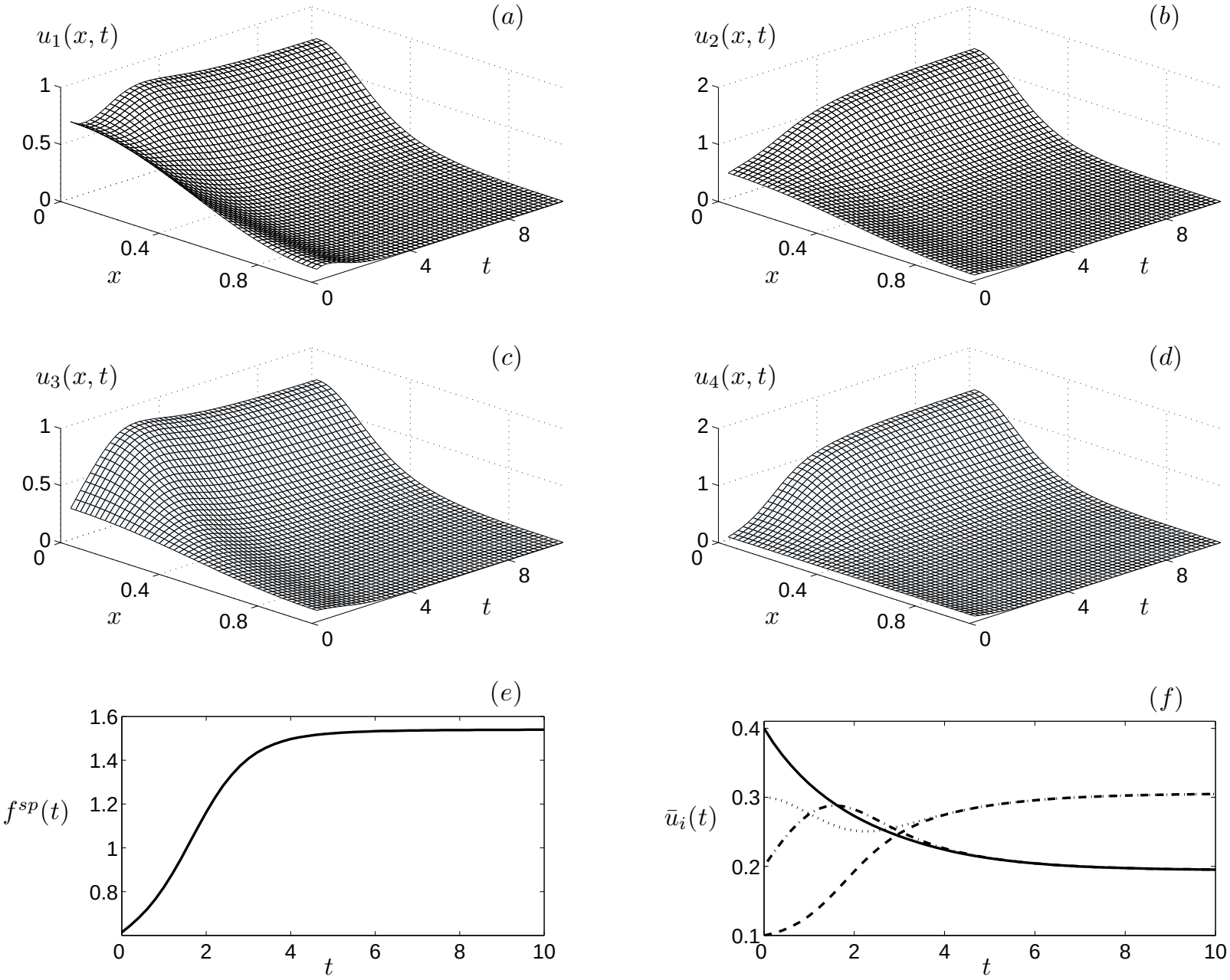
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & 0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & 0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $a_1 + a_3 > a_2$. Собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ имеют вид

$$\lambda_1 = a_1 + a_2 + a_2$$
$$\lambda_2 = -a_1 - a_2 - a_3$$
$$\lambda_{3,4} = -a_2 \pm i(a_1 + a_3)$$

λ_1 отвечает собственному вектору $\mathbf{u} = (1, 1, 1, 1)$, который ортогонален любому вектору $\mathbf{c}^0$. Остальные собственные значения имею отрицательные действительные части, следовательно $\mathbf{A}$ отрицательно определена.

Примеры:


(a)
$u_1(x,t)$
1
0.5
0
0
0.4
0.8
x
0
4
8
t
(b)
$u_2(x,t)$
2
1
0
0
0.4
0.8
x
0
4
8
t
(c)
$u_3(x,t)$
1
0.5
0
0
0.4
0.8
x
0
4
8
t
(d)
$u_4(x,t)$
2
1
0
0
0.4
0.8
x
0
4
8
t
(e)
$f^{sp}(t)$
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0
2
4
6
8
10
t
(f)
$\bar{u}_i(t)$
0.4
0.3
0.2
0.1
0
2
4
6
8
10
t

Публикации:

- А. С. Братусь, А. С. Новожилов, А. П. Платонов. Динамические системы и математические модели биологии. М.: Физматлит, 2010.
- A. S. Bratus and V. P. Posvyanskii. Stationary solutions in a closed distributed Eigen–Schuster evolution system. Differential Equations, 42(12):1762–1774, 2006.
- A. S. Bratus and E. N. Lukasheva. Stability and the limit behavior of the open distributed hypercycle system. Differential Equations, 45(11):1564–1576, 2009.
- A. S. Bratus, V. P. Posvyanskii, and A. S. Novozhilov. Existence and stability of stationary solutions to spatially extended autocatalytic and hypercyclic systems under global regulation and with nonlinear growth rates. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 11:1897–1917, 2010.
- A. S. Bratus, V. P. Posvyanskii, and A. S. Novozhilov. A note on the replicator equation with explicit space and global regulation, Math Biosc and Eng, *in press*.

Collaborators:

- Ю.С. Семенов, МГУ ПС, Прикладная математика–1, Россия;
- Е.Н. Лукашева, МГУ, ВМК, Россия;
- G.P. Karev, NCBI/NLM/NIH, USA;
- F.S. Berezovskaya, Howard University, USA.

Исследования частично поддерживаются грантом РФФИ # 10-01-00374.

Артем Новожилов поддерживается грантом МГУ ПС для молодых преподавателей.

Спасибо за внимание!

Вопросы?

e-mail: `anovozhilov@gmail.com`

Тексты могут быть найдены по адресам:

`arxiv.org` (type “Artem Novozhilov” in the search box)
`https://sites.google.com/site/anovozhilov/home`