

УДК 517.968+517.958:535.4

## МЕТОД ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ТЕЛЕ

© 2015 г. Е. В. Захаров, А. В. Сетуха, Е. Н. Безобразова

Задача электромагнитной дифракции в кусочно-однородной среде, которая может состоять из областей с различными диэлектрическими свойствами и содержать идеально проводящие включения в виде телесных объектов и экранов, сводится к системе интегральных уравнений с гиперсингулярными интегралами по поверхностям раздела сред с различными диэлектрическими свойствами. Доказывается эквивалентность полученной системы интегральных уравнений и исходной краевой задачи. Построена численная схема решения возникающих интегральных уравнений, основанная на методах кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций и применимая на поверхностях достаточно произвольной формы.

DOI: 10.1134/S03740641150

**Введение.** В современной прикладной электродинамике часто возникает необходимость изучения электродинамических процессов в средах сложной структуры, в которых могут находиться тела различной физической природы (идеально проводящие тела или экраны, диэлектрики). В задачах электромагнитной дифракции классическим методом исследования является метод граничных интегральных уравнений Фредгольма второго рода, который служит основой как для доказательства разрешимости возникающих при этом краевых задач [1], так и для построения вычислительных алгоритмов.

Вместе с тем в последнее время при численном решении трехмерных прикладных задач электродинамики все шире используются методы, основанные на сведении этих задач к интегральным уравнениям с сингулярными и гиперсингулярными интегралами. Особенность такого подхода состоит в его применимости как к задачам дифракции на телах, так и к задачам дифракции на тонких экранах. Метод гиперсингулярных интегральных уравнений оказался универсальным при построении эффективных вычислительных алгоритмов для моделирования широкого класса электродинамических процессов.

При численном решении гиперсингулярных интегральных уравнений используется подход, основанный на раскрытии сильной особенности в смысле конечного значения по Адамару с применением для дискретизации этих уравнений методов кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций. Численные методы, основанные на таком способе дискретизации интегральных уравнений с сильными особенностями, нашли широкое применение в аэродинамике, где решаются краевые задачи для уравнения Лапласа (см. [2]). Развитые при этом дискретные схемы хорошо переносятся на краевые задачи для скалярного уравнения Гельмгольца, описывающего, например, дифракцию акустических волн [3–6]. Важной особенностью этих методов – то, что задача сводится к системе линейных уравнений с заполненной матрицей, в которой преобладают диагональные элементы. Это позволяет эффективно применять к матрицам таких систем алгоритмы сжатия и быстрого матричного умножения, а для решения самих систем строить быстро сходящиеся итерационные алгоритмы [7, с. ??; 8].

Для задачи дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем экране численная схема такого типа на основе дискретизации граничного гиперсингулярного интегрального уравнения предложена в работе [9]. При этом задача сводится к системе линейных уравнений, коэффициенты которой выражаются через интегралы с сильной особенностью по ячейкам

разбиения. Эти интегралы в указанной работе сведены к контурным интегралам, вычисляемым численно на основе параметризации поверхности. В работе [10] аналогичный подход применен к задаче дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом объекте. В работе [11] построена численная схема решения трехмерной задачи электромагнитной дифракции на системе идеальнопроводящих тел и экранов. При этом для дискретизации интегральных операторов с сильной особенностью на основе кусочно-постоянных аппроксимаций получены формулы для коэффициентов системы линейных уравнений, в которых используются только элементарные геометрические характеристики ячеек разбиения, применимые на поверхностях достаточно произвольной формы. Построенная численная схема протестирована на ряде классических задач дифракции на идеально проводящих телах.

В настоящей работе данный подход применяется к задаче электромагнитной дифракции в кусочно-однородной среде, которая может состоять из областей с различными диэлектрическими свойствами и содержать идеально проводящие включения в виде телесных объектов и экранов. Задача сводится к системе интегральных уравнений с сильными особенностями. Доказывается эквивалентность полученных интегральных уравнений исходной краевой задаче. Для возникающих интегральных уравнений строится численная схема, использующая квадратурные формулы для гиперсингулярных интегралов, разработанные и протестированные в работе [11] применительно к задачам дифракции на идеально проводящих объектах.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается трехмерная задача о распространении электромагнитной волны в системе диэлектрических сред, которая может содержать идеально проводящие включения в виде телесных объектов или тонких экранов.

Рассмотрим данную задачу на примере среды, которая состоит из нескольких вложенных друг в друга областей  $\Omega_m$ ,  $m = \overline{1, M+1}$ , разделенных замкнутыми поверхностями  $\Sigma_m$ ,  $m = \overline{1, M}$  (рисунок). В каждой области среда предполагается однородной, изотропной и характеризуется диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon_m$  и  $\mu_m$ .

Всюду далее будем считать, что каждая из поверхностей  $\Sigma_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ , является простой ориентируемой кусочно-гладкой поверхностью, состоящей из компонент класса  $C^3$ . Область  $\Omega_m$ ,  $m = \overline{2, M}$ , расположена между поверхностями  $\Sigma_{m-1}$  и  $\Sigma_m$ ,  $\Omega_1$  – внешняя,  $\Omega_{M+1}$  – внутренняя области. Пусть также  $\vec{n} = \vec{n}(x)$ ,  $x \in \Sigma_m$ , – орт вектора внешней нормали к поверхности  $\Sigma_m$ .

Будем искать монохроматические электрические и магнитные поля  $\vec{E}^*(x, t)$  и  $\vec{H}^*(x, t)$  соответственно вида

$$\vec{E}^*(x, t) = \vec{E}_{\text{full}}(x)e^{-i\omega t}, \quad \vec{H}^*(x, t) = \vec{H}_{\text{full}}(x)e^{-i\omega t},$$

где  $t$  – время,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$  – точки пространства,  $\vec{E}_{\text{full}}$  и  $\vec{H}_{\text{full}}$  – пространственные составляющие напряженностей полных электрического и магнитного полей. Предполагается, что напряженности электрического и магнитного полей  $\vec{E}_{\text{full}}$  и  $\vec{H}_{\text{full}}$  возникают под воздействием первичного электромагнитного поля и представимы в виде

$$\vec{E}_{\text{full}}(x) = \vec{E}_0(x) + \vec{E}_{\text{ref}}(x), \quad \vec{H}_{\text{full}}(x) = \vec{H}_0(x) + \vec{H}_{\text{ref}}(x),$$

где  $\vec{E}_0$  и  $\vec{H}_0$  – напряженности первичных электрического и магнитного полей,  $\vec{E}_{\text{ref}}$  и  $\vec{H}_{\text{ref}}$  – неизвестные напряженности вторичных электрического и магнитного полей. Будем считать, что первичное поле обусловлено падающей плоской волной и сторонними источниками, которые могут находиться в каждой из областей  $\Omega_m$ ,  $m = \overline{1, M+1}$ , так, что

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 &= \vec{E}_{\text{ent}} + \vec{E}_1^0, \quad \vec{H}_0 = \vec{H}_{\text{ent}} + \vec{H}_1^0 \quad \text{в } \Omega_1, \\ \vec{E}_0 &= \vec{E}_m^0, \quad \vec{H}_0 = \vec{H}_m^0 \quad \text{в } \Omega_m, \quad m = \overline{2, M+1}, \end{aligned}$$

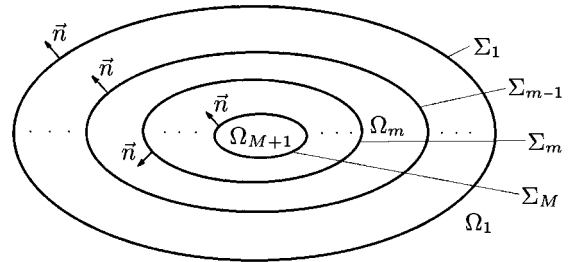


Рисунок. Конфигурация системы диэлектрических сред.

$\vec{E}_{\text{ent}}, \vec{H}_{\text{ent}}$  – напряженности электрического и магнитного полей падающей плоской волны ( $\vec{E}_{\text{ent}}(x) = \vec{E}_{\text{ent}}^0 e^{i\vec{k}\vec{r}}, \vec{H}_{\text{ent}}(x) = \vec{H}_{\text{ent}}^0 e^{i\vec{k}\vec{r}}, \vec{r}$  – радиус-вектор точки  $x$ ,  $\vec{k}$  – заданный волновой вектор,  $|\vec{k}| = k_1, k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1, \vec{E}_{\text{ent}}^0$  – постоянный вектор, ортогональный вектору  $\vec{k}, \vec{H}_{\text{ent}}^0 = [\vec{k} \times \vec{E}_{\text{ent}}^0]/(\omega \mu_1)$ ),  $\vec{E}_m, \vec{H}_m$  – напряженности электрического и магнитного полей, возбуждаемых сторонними источниками  $\vec{j}_{E,\text{ent}}(x), \vec{j}_{M,\text{ent}}(x)$ , расположенными в области  $\Omega_m, m = \overline{1, M+1}$ . При этом электромагнитное поле должно удовлетворять уравнениям Максвелла (во всех рассматриваемых областях)

$$\text{rot } \vec{H}_{\text{full}} = -i\omega \varepsilon_m \vec{E}_{\text{full}} + \vec{j}_{E,\text{ent}}, \quad \text{rot } \vec{E}_{\text{full}} = i\omega \mu_m \vec{H}_{\text{full}} - \vec{j}_{M,\text{ent}} \quad \text{в } \Omega_m, \quad m = \overline{1, M+1}. \quad (1)$$

На поверхностях  $\Sigma_m, m = \overline{1, M}$ , должны выполняться граничные условия

$$\vec{E}_{\text{full}}^+ \times \vec{n} = \vec{E}_{\text{full}}^- \times \vec{n}, \quad \vec{H}_{\text{full}}^+ \times \vec{n} = \vec{H}_{\text{full}}^- \times \vec{n}. \quad (2)$$

Кроме того, ставятся условие локальной интегрируемости  $\vec{E}_{\text{full}} \in L_2^{\text{loc}}(\Omega_m), \vec{H}_{\text{full}} \in L_2^{\text{loc}}(\Omega_m), m = \overline{1, M+1}$ , и условие Зоммерфельда на бесконечности для напряженностей  $\vec{E}(x)$  и  $\vec{H}(x)$  вторичного поля [12, с. 43, 51].

Как частный случай этой задачи, исследуем случай, когда внутренняя поверхность  $\Sigma_M$  является поверхностью идеально проводящего тела. В этом случае электромагнитное поле в области  $\Omega_{M+1}$  не рассматривается, а на поверхности  $\Sigma_M$  (со стороны области  $\Omega_M$ ) ставится граничное условие

$$\vec{E}_{\text{full}} \times \vec{n} = 0. \quad (3)$$

Возможен также случай, когда внутренний идеально-проводящий объект – тонкий экран. Такой экран будем моделировать как разомкнутую поверхность  $\Sigma_M$  с краем и будем считать, что  $\Omega_M$  – область, ограниченная снаружи замкнутой поверхностью  $\Sigma_{M-1}$ , с разрезом по поверхности  $\Sigma_M$ . При этом на обеих сторонах поверхности экрана  $\Sigma_M$  ставится условие (3),  $\vec{n} = \vec{n}(x)$  – орт вектора нормали в направлении одной из сторон поверхности  $\Sigma_M$ , выбранной произвольным образом.

**2. Сведение задачи к системе граничных интегральных уравнений.** Неизвестные напряженности вторичных электрического и магнитных полей будем искать в интегральном виде с использованием теоремы об эквивалентности. Пусть  $\Sigma$  – некоторая поверхность (замкнутая или разомкнутая),  $\vec{j} = \vec{j}(x), x \in \Sigma$ , – векторное поле на поверхности  $\Sigma$ , направленное в каждой точке  $x \in \Sigma$  по касательной к поверхности. Введем следующие операторы:

$$K_m[\Sigma, \vec{j}](x) = \int_{\Sigma} \{ \text{grad}_x \text{div}_x [\vec{j}(y) \Phi_m(x-y)] + k_m^2 \vec{j}(y) \Phi_m(x-y) \} d\sigma_y, \quad (4)$$

$$R_m[\Sigma, j](x) = \int_{\Sigma} \text{rot}_x [\vec{j}(y) \Phi_m(x-y)] d\sigma_y, \quad (5)$$

где

$$k_m^2 = \omega^2 \varepsilon_m \mu_m, \quad \vec{j}(x) \vec{n}(x) = 0, \quad x \in \Sigma, \quad \Phi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_m r}}{r}, \quad r = |x-y|,$$

$\Phi_m$  – функция Грина (фундаментальное решение) скалярного уравнения Гельмгольца, в случае замкнутой поверхности, как и ранее, полагаем, что вектор  $\vec{n}$  – вектор внешней нормали. Считаем, что данные операторы могут рассматриваться при всех  $x \in R^3$ . Значения, получаемые непосредственно из выражений (4), (5), при  $x \in \Sigma$  будем называть прямыми значениями на поверхности  $\Sigma$ . Индекс  $m$  в выражениях (4), (5) указывает на зависимость данных операторов от значений  $k_m$  и  $\varepsilon_m$  как от параметров.

Отметим также, что если  $\Sigma$  – гладкая поверхность класса  $C^3$ , а  $\vec{j}$  – векторное поле класса  $C^2$ , то, как показано в работе [11], поле  $\vec{F} = K_m[\Sigma, \vec{j}]$ , определенное вне поверхности  $\Sigma$ , имеет на ней краевые значения, для которых выполнено соотношение

$$\vec{n} \times \vec{F}^+ = \vec{n} \times \vec{F}^- = \vec{n} \times \vec{F}, \quad (6)$$

где  $\vec{F}(x) = K_m[\Sigma, \vec{j}](x)$ ,  $x \in \Sigma$ , – прямое значение интегрального оператора, если интеграл понимать в смысле конечного значения по Адамару.

Векторное поле  $\vec{G} = R_m[\Sigma, \vec{j}]$  представимо в виде

$$\vec{G}(x) \equiv R_m[\Sigma, \vec{j}] = - \int_{\Sigma} [\vec{j}(y) \times \text{grad}_x \Phi_m(x-y)] d\sigma_y. \quad (7)$$

**Теорема 1.** Если касательное векторное поле  $\vec{j}$  непрерывно по Гёльдеру на поверхности  $\Sigma$ , то векторное поле  $G$ , определяемое равенством (7), имеет краевые значения на поверхности  $\Sigma$ , для которых справедливо соотношение

$$\vec{n} \times \vec{G}^{\pm} = \vec{n} \times \vec{G} \pm \frac{1}{2} \vec{j}, \quad (8)$$

где  $\vec{G} = \vec{G}(x)$  – прямое значение, определяемое выражением (7) при  $x \in \Sigma$ .

**Доказательство.** Для любого фиксированного вектора  $\vec{a}$  выполняется равенство

$$(\vec{a}, \vec{G}(x)) = \int_{\Sigma} \vec{p}(y) \text{grad}_x \Phi_m(x-y) d\sigma_y, \quad \vec{p}(y) = \vec{j}(y) \times \vec{a}, \quad x \in R^3.$$

Представим вектор  $\vec{p}$  в координатном виде  $\vec{p} = p_1 \vec{e}_1 + p_2 \vec{e}_2 + p_3 \vec{e}_3$ , где  $\vec{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – орты декартовой системы координат, и пусть

$$u_i(x) = \int_{\Sigma} p_i(y) \Phi_m(x-y) d\sigma_y, \quad x \in R^3.$$

Тогда при  $x \notin \Sigma$  имеем

$$(\vec{a}, \vec{G}(x)) = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \text{grad } u_i(x).$$

Из свойств потенциала простого слоя [1, с. 62] следует, что

$$(\text{grad } u_i(x))^{\pm} = \int_{\Sigma} p_i(y) \text{grad}_x \Phi_m(x-y) d\sigma_y \mp \frac{1}{2} p_i(x) \vec{n}(x), \quad x \in \Sigma.$$

Тогда

$$(\vec{a}, \vec{G}(x))^{\pm} = \int_{\Sigma} \vec{p}(y) \text{grad}_x \Phi_m(x-y) d\sigma_y \mp \frac{1}{2} \vec{p}(x) \vec{n}(x) = (\vec{a}, \vec{G}(x)) \mp \frac{1}{2} \vec{a} [\vec{n}(x) \times \vec{j}(x)], \quad x \in \Sigma.$$

В силу произвольности вектора  $\vec{a}$  имеем  $\vec{G}^{\pm} = \vec{G} \mp [\vec{n} \times \vec{j}]/2$ , откуда получаем требуемое соотношение (8). Теорема доказана.

Пусть

$$\vec{E} = \vec{E}_m^0 + \vec{E}_{\text{ref}}, \quad \vec{H} = \vec{H}_m^0 + \vec{H}_{\text{ref}} \quad \text{в } \Omega_m, \quad m = \overline{1, M+1},$$

при этом

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{full}} &= \vec{E} + \vec{E}_{\text{ent}}, & \vec{H}_{\text{full}} &= \vec{H} + \vec{H}_{\text{ent}} \quad \text{в } \Omega_1, \\ \vec{E}_{\text{full}} &= \vec{E}, & \vec{H}_{\text{full}} &= \vec{H} \quad \text{в } \Omega_m, \quad m = \overline{2, M+1}.\end{aligned}\tag{9}$$

В соответствии с теоремой эквивалентности неизвестные поля  $E$  и  $H$  представляются в виде [12, с. 35]

$$\vec{E} = \frac{i}{\omega \varepsilon_1} K_1[\Sigma_1, \vec{j}_E^+] - R_1[\Sigma_1, \vec{j}_M^+] + \vec{E}_0^1, \quad \vec{H} = \frac{i}{\omega \mu_1} K_1[\Sigma_1, \vec{j}_M^+] + R_1[\Sigma_1, \vec{j}_E^+] + \vec{H}_1^0\tag{10}$$

в области  $\Omega_1$ ;

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{i}{\omega \varepsilon_m} K_m[\Sigma_{m-1}, \vec{j}_E^-] - R_m[\Sigma_{m-1}, \vec{j}_M^-] + \frac{i}{\omega \varepsilon_m} K_m[\Sigma_m, \vec{j}_E^+] - R_m[\Sigma_m, \vec{j}_M^+] + E_m^0, \\ \vec{H} &= \frac{i}{\omega \mu_m} K_m[\Sigma_{m-1}, \vec{j}_M^-] + R_m[\Sigma_{m-1}, \vec{j}_E^-] + \frac{i}{\omega \mu_m} K_m[\Sigma_m, \vec{j}_M^+] + R_m[\Sigma_m, \vec{j}_E^+] + H_m^0\end{aligned}\tag{11}$$

в областях  $\Omega_m$ ,  $2 \leq m \leq M$ ;

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{i}{\omega \varepsilon_{M+1}} K_{M+1}[\Sigma_M, \vec{j}_E^-] - R_{M+1}[\Sigma_M, \vec{j}_M^-] + E_{M+1}^0, \\ \vec{H} &= \frac{i}{\omega \mu_{M+1}} K_{M+1}[\Sigma_M, \vec{j}_M^-] + R_{M+1}[\Sigma_M, \vec{j}_E^-] + H_{M+1}^0\end{aligned}\tag{12}$$

в области  $\Omega_{M+1}$ , где  $\vec{j}_E^\pm$  и  $\vec{j}_M^\pm$  – эквивалентные электрические и магнитные токи, размещенные на поверхностях  $\Sigma_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ , и связанные с неизвестным электромагнитным полем соотношениями

$$\vec{j}_E^+ = \vec{n} \times \vec{H}^+, \quad \vec{j}_E^- = -\vec{n} \times \vec{H}^-, \quad \vec{j}_M^+ = -\vec{n} \times \vec{E}^+, \quad \vec{j}_M^- = \vec{n} \times \vec{E}^-, \tag{13}$$

$\vec{E}^+$ ,  $\vec{H}^+$  – краевые значения полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на внешней стороне поверхности  $\Sigma_m$ ,  $\vec{E}^-$ ,  $\vec{H}^-$  – краевые значения полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на внутренней стороне поверхности  $\Sigma_m$ .

Обозначим  $\vec{j}_E = \vec{j}_E^+$ ,  $\vec{j}_M = \vec{j}_M^+$  на всех поверхностях. Выразим токи  $\vec{j}_E^-$  и  $\vec{j}_M^-$  через токи  $\vec{j}_E^+$  и  $\vec{j}_M^+$  на основе граничных условий (2).

На поверхности  $\Sigma_1$  справедливы соотношения

$$\vec{n} \times \vec{H}_{\text{full}}^+ = \vec{j}_E^+ + \vec{j}_{E,\text{ent}}, \quad \vec{n} \times \vec{E}_{\text{full}}^+ = -\vec{j}_M^+ - \vec{j}_{M,\text{ent}}, \quad \vec{n} \times \vec{H}_{\text{full}}^- = -\vec{j}_E^-, \quad \vec{n} \times \vec{E}_{\text{full}}^- = \vec{j}_M^-, \tag{14}$$

где использованы обозначения

$$\vec{j}_{E,\text{ent}} = \vec{n} \times \vec{H}_{\text{ent}}^+, \quad \vec{j}_{M,\text{ent}} = -\vec{n} \times \vec{E}_{\text{ent}}^+.\tag{15}$$

На всех остальных поверхностях  $\Sigma_m$ ,  $m = \overline{2, M}$ , выполнены соотношения

$$\vec{n} \times \vec{H}_{\text{full}}^+ = \vec{j}_E^+, \quad \vec{n} \times \vec{E}_{\text{full}}^+ = -\vec{j}_M^+, \quad \vec{n} \times \vec{H}_{\text{full}}^- = -\vec{j}_E^-, \quad \vec{n} \times \vec{E}_{\text{full}}^- = \vec{j}_M^-.\tag{16}$$

Из равенств (14)–(16) и граничных условий (2) следуют соотношения

$$\vec{j}_E^- = -\vec{j}_E - \vec{j}_{E,\text{ent}}, \quad \vec{j}_M^- = -\vec{j}_M - \vec{j}_{M,\text{ent}} \quad \text{на поверхности } \Sigma_1,\tag{17}$$

$$\vec{j}_E^- = -\vec{j}_E, \quad \vec{j}_M^- = -\vec{j}_M \quad \text{на поверхностях } \Sigma_m, \quad m = \overline{2, M}.\tag{18}$$

Теперь запишем уравнения для неизвестных эквивалентных токов. Умножая равенства (10)–(12) для поля  $\vec{E}$  векторно на вектор нормали  $\vec{n}$  и используя соотношения (6), (8) и (17), (18), будем иметь

$$\vec{n} \times \vec{E}^+ = \frac{i}{\omega\varepsilon_1} \vec{n} \times K_1[\Sigma_1, \vec{j}_E] - \vec{n} \times R_1[\Sigma_1, \vec{j}_M] - \frac{1}{2} \vec{j}_M + \vec{n} \times \vec{E}_1^0 \quad \text{на } \Sigma_1,$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \vec{E}^- &= -\frac{i}{\omega\varepsilon_2} \vec{n} \times K_2[\Sigma_1, \vec{j}_E] + \vec{n} \times R_2[\Sigma_1, \vec{j}_M] + \frac{i}{\omega\varepsilon_2} \vec{n} \times K_2[\Sigma_2, \vec{j}_E] - \vec{n} \times R_2[\Sigma_2, \vec{j}_M] - \\ &- \frac{i}{\omega\varepsilon_2} \vec{n} \times K_2[\Sigma_1, \vec{j}_{E,\text{ent}}] + \vec{n} \times R_2[\Sigma_1, \vec{j}_{M,\text{ent}}] + \vec{n} \times E_2^0 - \frac{1}{2} \vec{j}_M - \frac{1}{2} \vec{j}_{M,\text{ent}} \quad \text{на } \Sigma_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \vec{E}^+ &= -\frac{i}{\omega\varepsilon_2} \vec{n} \times K_2[\Sigma_1, \vec{j}_E] + \vec{n} \times R_2[\Sigma_1, \vec{j}_M] + \frac{i}{\omega\varepsilon_2} \vec{n} \times K_2[\Sigma_2, \vec{j}_E] - \vec{n} \times R_2[\Sigma_2, \vec{j}_M] - \\ &- \frac{1}{2} \vec{j}_M + \vec{n} \times E_2^0 - \frac{i}{\omega\varepsilon_2} \vec{n} \times K_2[\Sigma_1, \vec{j}_{E,\text{ent}}] + \vec{n} \times R_2[\Sigma_1, \vec{j}_{M,\text{ent}}] \quad \text{на } \Sigma_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \vec{E}^- &= -\frac{i}{\omega\varepsilon_{m+1}} \vec{n} \times K_{m+1}[\Sigma_m, \vec{j}_E] + \vec{n} \times R_{m+1}[\Sigma_m, \vec{j}_M] + \frac{i}{\omega\varepsilon_{m+1}} \vec{n} \times K_{m+1}[\Sigma_{m+1}, \vec{j}_E] - \\ &- \vec{n} \times R_{m+1}[\Sigma_{m+1}, \vec{j}_M] + \vec{n} \times E_{m+1}^0 - \frac{1}{2} \vec{j}_M \quad \text{на } \Sigma_m, \quad m = \overline{2, M-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \vec{E}^+ &= -\frac{i}{\omega\varepsilon_m} \vec{n} \times K_m[\Sigma_{m-1}, \vec{j}_E] + \vec{n} \times R_m[\Sigma_{m-1}, \vec{j}_M] + \frac{i}{\omega\varepsilon_m} \vec{n} \times K_m[\Sigma_m, \vec{j}_E] - \\ &- \vec{n} \times R_m[\Sigma_m, \vec{j}_M] - \frac{1}{2} \vec{j}_M + \vec{n} \times E_m^0 \quad \text{на } \Sigma_m, \quad m = \overline{3, M}, \end{aligned}$$

$$\vec{n} \times \vec{E}^- = -\frac{i}{\omega\varepsilon_{m+1}} \vec{n} \times K_{m+1}[\Sigma_m, \vec{j}_E] + \vec{n} \times R_{m+1}[\Sigma_m, \vec{j}_M] + \vec{n} \times E_{m+1}^0 - \frac{1}{2} \vec{j}_M \quad \text{на } \Sigma_m, \quad m = M.$$

Учитывая соотношения (13), получаем уравнения

$$-\frac{1}{2} \vec{j}_M - \frac{i}{\omega\varepsilon_1} \vec{n} \times K_1[\Sigma_1, \vec{j}_E] + \vec{n} \times R_1[\Sigma_1, \vec{j}_M] = f_1^+ \quad \text{на } \Sigma_1, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \vec{j}_M + \frac{i}{\omega\varepsilon_m} \vec{n} \times K_m[\Sigma_{m-1}, \vec{j}_E] - \vec{n} \times R_m[\Sigma_{m-1}, \vec{j}_M] - \frac{i}{\omega\varepsilon_m} \vec{n} \times K_m[\Sigma_m, \vec{j}_E] + \\ + \vec{n} \times R_m[\Sigma_m, \vec{j}_M] = f_m^+ \quad \text{на } \Sigma_m, \quad m = \overline{2, M}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \vec{j}_M + \frac{i}{\omega\varepsilon_{m+1}} \vec{n} \times K_{m+1}[\Sigma_m, \vec{j}_E] - \vec{n} \times R_{m+1}[\Sigma_m, \vec{j}_M] - \frac{i}{\omega\varepsilon_{m+1}} \vec{n} \times K_{m+1}[\Sigma_{m+1}, \vec{j}_E] + \\ + \vec{n} \times R_{m+1}[\Sigma_{m+1}, \vec{j}_M] = f_m^- \quad \text{на } \Sigma_m, \quad m = \overline{1, M-1}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$-\frac{1}{2} \vec{j}_M + \frac{i}{\omega\varepsilon_{m+1}} \vec{n} \times K_{m+1}[\Sigma_m, \vec{j}_E] - \vec{n} \times R_{m+1}[\Sigma_m, \vec{j}_M] = f_m^- \quad \text{на } \Sigma_m, \quad m = M, \quad (22)$$

$$f_m^+ = \vec{n} \times E_m^0, \quad m = \overline{1, M}, \quad f_2^+ = \vec{n} \times E_2^0 - \frac{i}{\omega\varepsilon_2} \vec{n} \times K_2[\Sigma_1, \vec{j}_{E,\text{ent}}] + \vec{n} \times R_2[\Sigma_1, \vec{j}_{M,\text{ent}}],$$

$$f_m^- = \vec{n} \times E_{m+1}^0, \quad m = \overline{2, M}, \quad f_1^- = \vec{n} \times E_2^0 - \frac{i}{\omega\varepsilon_2} \vec{n} \times K_2[\Sigma_1, \vec{j}_{E,\text{ent}}] + \vec{n} \times R_2[\Sigma_1, \vec{j}_{M,\text{ent}}] + \frac{1}{2} \vec{j}_{M,\text{ent}}.$$

Таким образом, рассматриваемая задача свелась к системе интегральных уравнений (19)–(22) относительно неизвестных функций  $\vec{j}_E$  и  $\vec{j}_M$ .

Установим связь между исходной краевой задачей для электромагнитного поля и полученной системой интегральных уравнений. Рассмотрим случай, когда все поверхности  $\Sigma_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ , гладкие класса  $C^3$ .

Непосредственно из вывода уравнений (19)–(22) следует

**Теорема 2.** Если поля  $\vec{E}_{\text{full}}$  и  $\vec{H}_{\text{full}}$  являются решением задачи (1), (2), то эти поля представляются в виде (9)–(12), где функции  $\vec{j}_E^\pm$ ,  $\vec{j}_M^\pm$  определяются соотношениями (13), и при этом функции  $\vec{j}_E = \vec{j}_E^+$ ,  $\vec{j}_M = \vec{j}_M^+$  удовлетворяют уравнениям (19)–(22).

Справедливо и обратное утверждение.

**Теорема 3.** Если функции  $\vec{j}_E$  и  $\vec{j}_M$  класса  $C^2$  удовлетворяют уравнениям (19)–(22), то поля  $\vec{E}_{\text{full}}$  и  $\vec{H}_{\text{full}}$ , определяемые равенствами (9)–(12) с функциями  $\vec{j}_E^\pm$ ,  $\vec{j}_M^\pm$ , задаваемыми соотношениями (17), (18), являются решением рассматриваемой краевой задачи (1), (2).

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $\vec{j}_E$ ,  $\vec{j}_M$  – касательные векторные поля на поверхностях  $\Sigma_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ , класса  $C^2$ , поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  определяются равенствами (10)–(12) с  $\vec{H}_m^0 \equiv 0$ ,  $\vec{E}_m^0 \equiv 0$  в области  $\Omega_m$  для всех  $m = \overline{1, M+1}$  и с функциями  $\vec{j}_E^\pm = \pm \vec{j}_E$ ,  $\vec{j}_M^\pm = \pm \vec{j}_M$ . Тогда если выполнено условие  $\vec{E} \equiv 0$ ,  $\vec{H} \equiv 0$  во всех областях  $\Omega_m$  для всех  $m = \overline{1, M+1}$ , то  $\vec{j}_E = 0$ ,  $\vec{j}_M = 0$  на всех поверхностях  $\Sigma_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ .

**Доказательство.** Докажем равенство нулю токов на поверхности  $\Sigma_1$ . Построим область  $\tilde{\Omega}_2$ , являющуюся внутренней для поверхности  $\Sigma_1$ . Пусть  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{H}_1$  – поля, определяемые равенствами (10), а  $\vec{E}_2$ ,  $\vec{H}_2$  – равенствами (11) с  $m = 2$ , причем будем считать, что поля  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{H}_1$  определены указанными равенствами в областях  $\Omega_1$  и  $\tilde{\Omega}_2$ , а поля  $\vec{E}_2$ ,  $\vec{H}_2$  в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . В силу сделанного предположения выполнены равенства

$$\vec{E}_1 = \vec{H}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \vec{E}_2 = \vec{H}_2 = 0 \quad \text{в } \Omega_2.$$

Из формул (6) и (8) следует, что на поверхности  $\Sigma_1$  выполнены соотношения

$$n \times \vec{E}_1^- = \vec{j}_M, \quad n \times \vec{H}_1^- = -\vec{j}_E, \quad n \times \vec{E}_2^+ = \vec{j}_M, \quad n \times \vec{H}_2^+ = -\vec{j}_E. \quad (23)$$

Построим векторные поля  $\vec{E}_0 = \vec{H}_0$ , определенные всюду вне поверхности  $\Sigma_1$  в виде  $\vec{E}_0 = \vec{E}_2$ ,  $\vec{H}_0 = \vec{H}_2$  в области  $\Omega_1$ ,  $\vec{E}_0 = \vec{E}_1$ ,  $\vec{H}_0 = \vec{H}_1$  в области  $\tilde{\Omega}_2$ . Тогда эти поля удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \vec{H}_0 = -i\omega\varepsilon\vec{E}_0, \quad \text{rot } \vec{E}_0 = i\omega\mu\vec{H}_0 \quad \text{вне поверхности } \Sigma_1 \quad (24)$$

с  $\varepsilon = \varepsilon_2$ ,  $\mu = \mu_2$  в области  $\Omega_1$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1$ ,  $\mu = \mu_1$  в области  $\tilde{\Omega}_2$ , условиям Зоммерфельда на бесконечности (см. [1, с. 126]) и имеют на поверхности  $\Sigma_1$  краевые значения, для которых в силу равенств (23) выполнены соотношения

$$n \times \vec{E}_0^+ = n \times \vec{E}_0^-, \quad n \times \vec{H}_0^+ = n \times \vec{H}_0^-. \quad (25)$$

Тогда можно показать, что  $\vec{E}_0 \equiv \vec{H}_0 \equiv 0$  в области  $\Omega_1$ . Действительно, воспользуемся второй векторной формулой Грина [1, с. 130]

$$\int_D \{(\vec{H}, \Delta \vec{F}) + (\text{rot } \vec{H}, \text{rot } \vec{F}) + \text{div } \vec{H} \text{ div } \vec{F}\} = \int_{\partial D} \{(\vec{n} \times \vec{H}, \text{rot } \vec{F}) + (\vec{n}, \vec{H}) \text{ div } \vec{F}\} d\sigma,$$

где  $D$  – область, ограниченная гладкой замкнутой поверхностью  $\partial D$ ,  $\vec{n}$  – орт вектора внешней нормали к поверхности  $\partial D$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{F}$  – векторные поля класса  $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ . Пусть  $D_R = \{x \in R^2 \mid |x| < R\}$  – открытый шар, содержащий внутри себя поверхность  $\Sigma_1$ . Применяя указанную формулу на объединении областей  $\tilde{\Omega}_2$  и  $D_R \cap \Omega_1$  к функциям  $\vec{H} = \vec{E}_0$ ,  $\vec{F} = \vec{E}_0^*/(\omega\mu)$ , где  $\vec{E}_0^*$  – поле, комплексно-сопряженное с полем  $\vec{E}_0$ , и используя равенства

$$\Delta \vec{E}_0 + k^2 \vec{E}_0 = 0, \quad \text{div } \vec{E}_0 = 0$$

(см. [1, с. 126]) и уравнения (24), находим

$$\begin{aligned} & \int_D \left\{ \omega\mu |\vec{H}_0|^2 - \frac{k^2 |\vec{E}_0|^2}{\omega\mu} \right\} dx = \\ & = \frac{1}{\omega\mu} \int_{|x|=R} (\vec{n} \times \vec{E}_0, \text{rot } \vec{E}_0^*) d\sigma - i \int_{\Sigma_1} \{ (\vec{n} \times \vec{E}_0^+, \vec{H}_0^{*+}) - (\vec{n} \times \vec{E}_0^-, \vec{H}_0^{*-}) \} d\sigma. \end{aligned} \quad (26)$$

В силу условий (25) имеем

$$(\vec{n} \times \vec{E}_0^+, \vec{H}_0^{*+}) - (\vec{n} \times \vec{E}_0^-, \vec{H}_0^{*-}) = (\vec{n} \times (\vec{E}_0^+ - \vec{E}_0^-), \vec{H}_0^{*+}) + ((\vec{H}_0^{*+} - \vec{H}_0^{*-}) \times \vec{n}, \vec{E}_0^-) = 0.$$

Записывая условия излучения на бесконечности в виде [1, с. 130]

$$\text{rot } \vec{E}_0 \times \frac{\vec{r}}{|x|} - i\omega\mu \vec{E}_0 = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \vec{r} - \text{радиус-вектор точки } x,$$

и приравнивая мнимые части в равенстве (26), получаем соотношение

$$\int_{|x|=R} |\vec{E}_0|^2 d\sigma \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty.$$

Тогда  $\vec{E}_0 \equiv 0$  в области  $\Omega_1$  [1, с. 140]. Значит,  $\vec{E}_0 \equiv 0$  в области  $\Omega_1$ . Из равенств (23) получаем, что  $\vec{j}_M = \vec{j}_E = 0$  на поверхности  $\Sigma_1$ .

Далее удалим поверхность  $\Sigma_1$  из рассмотрения. Область  $\Omega_2$  продолжим до бесконечности. Считаем, что поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  определены во всей расширенной области  $\Omega_2$  выражением (11) для  $m = 2$ . Учитывая их голоморфность в этой области, заключаем, что  $\vec{E} \equiv 0$ ,  $\vec{H} \equiv 0$  во всей расширенной области  $\Omega_2$ . Тем самым мы перешли к рассмотрению сформулированной леммы для конфигурации, в которой на одну поверхность стало меньше. Согласно проведенному выше рассуждению, заключаем, что  $\vec{j}_M = \vec{j}_E = 0$  на поверхности  $\Sigma_2$ . Применением принципа индукции завершаем доказательство. Лемма доказана.

**Доказательство теоремы 3.** Построим векторные поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  во всех областях по формулам (10)–(12) с использованием функций  $\vec{j}_E^\pm$ ,  $\vec{j}_M^\pm$ , указанных в формулировке теоремы 3. Эти поля удовлетворяют уравнениям Максвелла и условиям излучения на бесконечности [1, с. 126]. Построим также функции  $\vec{j}_E^{*\pm}$ ,  $\vec{j}_M^{*\pm}$  по формулам (13). Тогда рассматриваемые векторные поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  должны также представляться в виде (10)–(12) на основе эквивалентных токов  $\vec{j}_E^{*\pm}$ ,  $\vec{j}_M^{*\pm}$ .

Далее, построим токи  $\Delta \vec{j}_E^\pm = \vec{j}_E^\pm - \vec{j}_E^{*\pm}$ ,  $\Delta \vec{j}_M^\pm = \vec{j}_M^\pm - \vec{j}_M^{*\pm}$ . Подставляя в выражения (10)–(12) вместо токов  $\vec{j}_E^\pm$ ,  $\vec{j}_M^\pm$  токи  $\Delta \vec{j}_E^\pm$  и  $\Delta \vec{j}_M^\pm$  и полагая поля  $\vec{H}_m^0$ ,  $\vec{E}_m^0$  равными нулю во всех областях  $\Omega_m$ ,  $m = \overline{1, M+1}$ , получаем поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , тождественно равные нулю. Тогда из леммы 1 следует, что токи  $\vec{j}_E^\pm$ ,  $\vec{j}_M^\pm$  и  $\vec{j}_E^{*\pm}$ ,  $\vec{j}_M^{*\pm}$  совпадают, а из соотношений (17), (18) вытекают граничные условия (2). Теорема доказана.

Если внутренняя поверхность  $\Sigma_M$  является поверхностью идеально проводящего тела или идеально проводящим экраном, то неизвестные электрическое и магнитное поля в областях  $\Omega_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ , будем снова искать в виде (9)–(11), полагая на поверхности  $\Sigma_M$  токи  $\vec{j}_M$  равными нулю. Неизвестные токи  $\vec{j}_E$  и  $\vec{j}_M$  удовлетворяют уравнениям (19)–(21) (уравнение (22) не рассматривается). При этом уравнение (21) при  $m = M$  вытекает из условия (3).

**Аппроксимация интегральных операторов.** Рассмотрим аппроксимацию операторов  $K_m[\Sigma, \vec{j}]$  и  $R_m[\Sigma, \vec{j}]$ , определяемых равенствами (4), (5), где  $\Sigma$  – некоторая гладкая поверхность, которая может быть как замкнутой, так и разомкнутой с краем. Разобьем поверхность  $\Sigma$  на ячейки  $\sigma_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , на каждой ячейке выберем точку коллокации  $x^i$ , и пусть



$\vec{n}_i = \vec{n}(x^i)$  – вектор нормали к ячейке  $\sigma_i$  в точке  $x_i$ . Построим на каждой ячейке  $\sigma_i$  локальный ортонормированный базис  $\vec{e}_i^1, \vec{e}_i^2 = \vec{n}_i \times \vec{e}_i^1$  в плоскости, ортогональной вектору  $\vec{n}_i$ . При этом векторы  $\vec{e}_i^1, \vec{e}_i^2, \vec{n}_i$  образуют правую систему координат.

Пусть  $\vec{j}(x)$  – заданное на поверхности  $\Sigma$  касательное векторное поле (т.е.  $\vec{j}(x)\vec{n}(x) = 0$ ,  $x \in \Sigma$ ), удовлетворяющее условию Гёльдера с показателем  $\alpha \in (0, 1]$ , и пусть  $h$  – диаметр разбиения. Будем аппроксимировать векторное поле  $\vec{j}(x)$  набором значений  $\vec{j}_i = \vec{j}(x^i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Операторы  $K_m[\Sigma, \vec{j}]$  и  $R_m[\Sigma, \vec{j}]$  аппроксимируем выражениями

$$K_m[\Sigma, \vec{j}] = \sum_{i=1}^n K_m[\sigma_i, \vec{j}_i], \quad R_m[\Sigma, \vec{j}] = \sum_{i=1}^n R_m[\sigma_i, \vec{j}_i], \quad (27)$$

в записанных операторах считаем, что  $\vec{j}_i$  – векторное поле на ячейке  $\sigma_i$  с постоянным значением, причем  $\vec{j}_i \vec{n}_i = 0$ . Для аппроксимации операторов  $A_m[\sigma_i, \vec{j}_i]$ , содержащих гиперсингулярную особенность, используем квадратурные формулы из монографии [1, с. ??], которые основаны на выделении в явном виде главной особенности:

$$K_m[\Sigma, \vec{j}] = K_m^0[\Sigma, \vec{j}] + K_m^1[\Sigma, \vec{j}], \quad K_m^k[\Sigma, \vec{j}](x) = \int_{\Sigma} \vec{e}_k(x, y, \vec{j}(y)) d\sigma_y, \quad k = 0, 1,$$

$$\vec{e}_0(x, y, \vec{j}) = \frac{-\vec{j} + 3\vec{r}(\vec{r}, \vec{j})}{R^3}, \quad \vec{e}_1(x, y, \vec{j}) = (\vec{j} - 3\vec{r}(\vec{r}, \vec{j})) \frac{1 - e^{ikR} + ik e^{ikR}}{R^3} + (\vec{j} - \vec{r}(\vec{r}, \vec{j})) \frac{k^2 e^{ikR}}{R},$$

$R = |x - y|$ ,  $\vec{r} = (x - y)/R$ . Для аппроксимации гиперсингулярного интеграла используется приближенная формула, предложенная в работе [11]:

$$K_m^0[\sigma_i, \vec{j}](x) = \int_{\sigma_i} \vec{e}_0(x, y, \vec{j}_i^*(y)) d\sigma_y = \text{grad} \oint_{\partial\sigma_i} \frac{1}{|x - y|} (\vec{n}(y) \times \vec{j}_i^*(y), \vec{r}(y)) ds_y,$$

где  $\vec{j}_i^*(y)$  – касательное поле на ячейке  $\sigma_i$ , получаемое при проектировании вектора  $\vec{j}_i$  и определяемое равенством

$$\vec{j}_i^*(y) = (\vec{n}_i \times \vec{j}_i) \times \vec{n}(y).$$

Подынтегральные выражения в операторах  $K_m^1[\Sigma, \vec{j}]$  и  $\vec{n} \times R_m[\Sigma, \vec{j}]$  имеют особенность порядка  $O(1/R)$  при  $R \rightarrow 0$  (если для оператора  $\vec{n} \times R_m$  использовать выражение (7) и внести векторное произведение под знак интеграла). Их вычисление сводится к интегралам вида

$$u(x) = \int_{\Sigma} K(x, y) \varphi(y) d\sigma_y, \quad x \in \Sigma, \quad (28)$$

где  $\varphi(x)$ ,  $x \in \Sigma$ , – скалярная функция, являющаяся одной из компонент векторного поля  $\vec{j}(x)$ ,  $K(x, y)$  – некоторое ядро, представляющееся в виде

$$K(x, y) = \frac{K^*(x, y)}{|x - y|^\beta}, \quad K^*(x, y) \in C^1(\Sigma), \quad \beta = 1, 2, 3,$$

$$|K^*(x, y)| \leq O(|x - y|^{\beta-1}) \quad \text{при} \quad \beta = 2, 3,$$

$$\left| \frac{\partial K^*(x, y)}{\partial y_i} \right| \leq O(|x - y|^{\beta-2}), \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{при} \quad \beta = 3.$$

Рассмотрим квадратурные формулы для интеграла вида (28), где функция  $\varphi$  непрерывна по Гёльдеру с показателем  $\alpha \in (0, 1]$ . Для приближенного вычисления функции  $u(x)$  воспользуемся представлением

$$u(x) \approx \sum_{i=1}^n u_i(x) \varphi(x^i), \quad u_i(x) = \int_{\sigma_i} K(x, y) d\sigma_y, \quad x \in \Sigma. \quad (29)$$

Приближенно интегралы в формуле (29) предлагается вычислять по формулам типа прямоугольников с доразбиением ячеек  $\sigma_i$  и сглаживанием особенности в ядре  $K(x, y)$ . Разобьем дополнительно каждую ячейку  $\sigma_i$  на более мелкие ячейки  $\sigma_i^p$ ,  $p = \overline{1, P}$ . Пусть  $h'$  – максимальный из диаметров ячеек  $\sigma_i^p$ ,  $p = \overline{1, P}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Положим

$$\tilde{u}_i(x) = \sum_{p=1}^P K_\varepsilon(x, x_i^p) s_i^p, \quad K_\varepsilon(x, y) = K(x, y) \theta_\varepsilon(|x - y|), \quad (30)$$

где  $s_i^p$  – площадь ячейки  $\sigma_i^p$ ,  $x_i^p \in \sigma_i^p$  – узлы (в данном случае выбор узла произволен на ячейке  $\sigma_i^p$ ),  $\theta_\varepsilon(r)$  – сглаживающая функция, выбираемая так, что  $\theta_\varepsilon(r) \in C^1[0, \infty)$ ,  $\theta_\varepsilon(r) = 1$  при  $r \geq \varepsilon$ ,  $0 \leq \theta_\varepsilon(r) \leq C_0 r/\varepsilon$  при  $0 \leq r \leq \varepsilon$ ,  $C_0$  – константа, не зависящая от  $r$  и  $\varepsilon$ . Например, можно положить  $\theta_\varepsilon(r) = 3(r/\varepsilon)^2 - 2(r/\varepsilon)^3$ , при этом  $\varepsilon$  – малый параметр, который далее выбирается равным  $\varepsilon = 2h'$ .

Получим оценку для погрешности  $\Delta(x)$  квадратурной формулы (30):

$$\Delta(x) = u(x) - \tilde{u}(x), \quad \tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i(x) \varphi(x^i).$$

Сделаем следующие предположения о поверхности  $\Sigma$ . В произвольной точке  $x \in \Sigma$  построим специальную ортонормированную систему координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  с центром  $O = x$ , в которой ось  $O\xi_3$  ортогональна поверхности, и для каждого  $r > 0$  в этой системе координат построим цилиндр

$$C[x, r] = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mid |\xi_1^2 + \xi_2^2| \leq r, |\xi_3| \leq r\}.$$

Пусть существует  $r_0 > 0$  такое, что если  $r \leq r_0$ , то поверхность  $\Sigma[x, r] = \Sigma \cap C[x, r]$  – связное множество, которое задается уравнением  $\xi_3 = \psi(\xi_1, \xi_2)$ , где  $\psi$  – некоторая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\begin{aligned} \psi &\in C^2(S_r), \quad \psi = \partial\psi/\partial\xi_i = 0 \quad \text{при} \quad (\xi_1, \xi_2) = (0, 0), \\ |\partial\psi/\partial\xi_i| &\leq 1/2 \quad \text{при} \quad (\xi_1, \xi_2) \in S_r, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

$S_r$  – проекция поверхности  $\Sigma[x, r]$  на плоскость  $O\xi_1\xi_2$ .

Теперь разность  $\Delta(x)$  представим в виде

$$\Delta(x) = \Delta_1(x) + \Delta_2(x), \quad \Delta_1(x) = \int_{\Sigma} K(x, y) \varphi(y) d\sigma_y - \sum_{i=1}^n u_i(x) \varphi(x^i),$$

$$\Delta_2(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \varphi(x^i) - \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i(x) \varphi(x^i).$$

Для разности  $\Delta_1(x)$  справедливы оценки

$$|\Delta_1(x)| = \left| \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\sigma_i} K(x, y) (\varphi(y) - \varphi(x^i)) d\sigma_y \right\} \right| \leq Ch^\alpha \int_{\Sigma} |K(x, y)| d\sigma \leq Ch^\alpha \|\varphi\|_\alpha,$$

где

$$\|\varphi\|_\alpha = \sup_{x \in \Sigma} |\varphi(x)| + \sup_{\substack{x, y \in \Sigma \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

а через  $C$  обозначены константы, зависящие только от поверхности  $\Sigma$ , ядра  $K(x, y)$  и параметра  $\alpha$ , причем в различных выражениях значение константы  $C$ , вообще говоря, различно.

Разность  $\Delta_2(x)$  можно представить в виде

$$\Delta_2(x) = \Delta_{21}(x) + \Delta_{22}(x), \quad \Delta_{21}(x) = \sum_{\sigma_i^p: |x-x_i^p| < \varepsilon+h'} \varphi(x_i) \int_{\sigma_i^p} (K(x, y) - K_\varepsilon(x, x_i^p)) d\sigma_y,$$

$$\Delta_{22}(x) = \sum_{\sigma_i^p: |x-x_i^p| \geq \varepsilon+h'} \varphi(x_i) \int_{\sigma_i^p} (K(x, y) - K(x, x_i^p)) d\sigma_y.$$

Для величины  $\Delta_{21}(x)$  справедлива оценка

$$|\Delta_{21}(x)| \leq \|\varphi\|_\alpha \sum_{\sigma_i^p: |x-x_i^p| < \varepsilon+h'} \left( \int_{\sigma_i^p} |K(x, y)| d\sigma_y + |K_\varepsilon(x, y)| s_i^p \right) \leq C \|\varphi\|_\alpha \left( \int_{\Sigma[x, 4h']} \frac{d\sigma_y}{|x-y|} \right).$$

Переходя в специальную систему координат с центром в точке  $x$ , получаем оценку

$$|\Delta_{21}(x)| \leq C \|\varphi\|_\alpha h' (1 + |\ln h'|).$$

Модуль суммы  $\Delta_{22}(x)$  можем записать в виде

$$|\Delta_{22}(x)| = \|\varphi\|_\alpha \sum_{\sigma_i^p: |x-x_i^p| \geq \varepsilon+h'} \int_{\sigma_i^p} |K(x, y) - K(x, x_i^p)| d\sigma_y.$$

Представим разность в последнем подынтегральном выражении в виде

$$K(x, y) - K(x, x_i^p) = \frac{K^*(x, y) - K^*(x, x_i^p)}{|x-y|^\beta} + K^*(x, x_i^p) \left( \frac{1}{|x-y|^\beta} - \frac{1}{|x-x_i^p|^\beta} \right).$$

Заметим, что при  $|x-x_i^p| \geq \varepsilon+h'$ ,  $y \in \sigma_i^p$  выполнены следующие оценки:

$$|y-x_i^p| \leq h', \quad |y-x| \geq 2h', \quad |x-x_i^p|/2 \leq |x-y| \leq 2|x-x_i^p|.$$

Тогда

$$|K(x, y) - K(x, x_i^p)| \leq \frac{Ch'}{(|x-y|+h')^2} \quad \text{и} \quad |\Delta_{22}(x)| = Ch' \|\varphi\|_\alpha \int_{\Sigma} \frac{d\sigma_y}{(|x-y|+h')^2}.$$

Разбивая поверхность  $\Sigma$  на части  $\Sigma[x, r_0]$  и  $\Sigma \setminus \Sigma[x, r]$  и переходя в интеграле по поверхности  $\Sigma[x, r_0]$  в специальную систему координат с центром в точке  $x$ , несложно получить оценку

$$|\Delta_{22}(x)| = C \|\varphi\|_\alpha h' (1 + |\ln h'|).$$

Объединяя полученные оценки, окончательно имеем

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq C \|\varphi\|_\alpha [h^\alpha + h'(1 + |\ln h'|)].$$

**Дискретизация системы интегральных уравнений.** Наконец, осуществим дискретизацию системы интегральных уравнений (19)–(22).

При построении численной схемы разобьем поверхности  $\Sigma_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ , на систему ячеек  $\sigma_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Для каждой ячейки  $\sigma_i$  выберем точку коллокации  $x^i$ , орг вектора нормали  $\vec{n}_i = \vec{n}(x^i)$  и построим локальную ортонормированную систему координат с направляющими векторами  $\vec{e}_i^1$  и  $\vec{e}_i^2 = \vec{n}_i \times \vec{e}_i^1$  в касательной плоскости к поверхности.

Будем искать приближенные значения токов  $\vec{j}_E$  и  $\vec{j}_M$  в точках коллокации:  $\vec{j}_{E,i} \approx \vec{j}_E(x^i)$  и  $\vec{j}_{M,i} \approx \vec{j}_M(x^i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , записывая уравнения (19)–(22) в точках коллокации и аппроксимируя интегральные операторы описанными выше квадратурными формулами, основанными на аппроксимации выражений (27). При этом получаем следующую систему уравнений:

$$-\frac{1}{2}\vec{j}_{M,i} - \sum_{j: \sigma_j \in \Sigma_1} \frac{i}{\omega \varepsilon_1} \vec{n}_i \times K_1[\sigma_j, \vec{j}_{E,j}] + \sum_{j: \sigma_j \in \Sigma_1} \vec{n}_i \times R_1[\sigma_j, \vec{j}_{E,j}] \vec{n} \times [\Sigma_1, \vec{j}_M] =$$

$$= f_1^+(x^i), \quad i: \sigma_i \in \Sigma_1, \quad (31)$$

$$-\frac{1}{2}\vec{j}_{M,i} + \frac{i}{\omega \varepsilon_m} \sum_{j: \sigma_j \in \Sigma_{m-1}} \vec{n}_i \times K_m[\sigma_j, \vec{j}_{E,j}] - \sum_{j: \sigma_j \in \Sigma_{m-1}} \vec{n}_i \times R_m[\sigma_j, \vec{j}_{M,j}] -$$

$$-\frac{i}{\omega \varepsilon_m} \sum_{j: \sigma_j \in \Sigma_m} \vec{n}_i \times K_m[\sigma_j, \vec{j}_{E,j}] + \sum_{j: \sigma_j \in \Sigma_m} \vec{n}_i \times R_m[\sigma_j, \vec{j}_{M,j}] =$$

$$= f_m^+(x^i), \quad i: \sigma_i \in \Sigma_m, \quad m = \overline{2, M}, \quad (32)$$

$$-\frac{1}{2}\vec{j}_{M,i} + \frac{i}{\omega \varepsilon_{m+1}} \sum_{j: \sigma_j \in \Sigma_m} \vec{n}_i \times K_{m+1}[\sigma_j, \vec{j}_{E,j}] - \sum_{j: \sigma_j \in \Sigma_m} \vec{n}_i \times R_{m+1}[\sigma_j, \vec{j}_{M,j}] -$$

$$-\frac{i}{\omega \varepsilon_{m+1}} \sum_{j: \sigma_j \in \Sigma_{m+1}} \vec{n}_i \times K_{m+1}[\sigma_j, \vec{j}_{E,j}] + \sum_{j: \sigma_j \in \Sigma_{m+1}} \vec{n}_i \times R_{m+1}[\sigma_j, \vec{j}_{M,j}] =$$

$$= f_m^-(x^i), \quad i: \sigma_i \in \Sigma_m, \quad m = \overline{1, M-1}, \quad (33)$$

$$-\frac{1}{2}\vec{j}_{M,i} + \frac{i}{\omega \varepsilon_{m+1}} \sum_{j: \sigma_j \in \Sigma_m} \vec{n}_i \times K_{m+1}[\sigma_j, \vec{j}_{E,j}] - \sum_{j: \sigma_j \in \Sigma_m} \vec{n}_i \times R_{m+1}[\sigma_j, \vec{j}_{M,j}] =$$

$$= f_m^-(x^i), \quad i: \sigma_i \in \Sigma_m, \quad m = M. \quad (34)$$

Рассмотрим операторы, ставящие в соответствие вектору  $\vec{j}$  векторы  $\vec{u} = \vec{n}_i \times K_m[\sigma_j, \vec{j}](x^i)$  и  $\vec{v} = \vec{n}_i \times R_m[\sigma_j, \vec{j}](x^i)$ , ортогональные вектору  $\vec{n}_i$ . При этом вектор  $\vec{j}$  можно разложить по базису  $\vec{e}_j^1, \vec{e}_j^2$ , а векторы  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  – по базису  $\vec{e}_i^1, \vec{e}_i^2$ :

$$\vec{j} = j_1 \vec{e}_j^1 + j_2 \vec{e}_j^2, \quad \vec{u} = u_1 \vec{e}_i^1 + u_2 \vec{e}_i^2, \quad \vec{v} = v_1 \vec{e}_i^1 + v_2 \vec{e}_i^2.$$

Действие рассматриваемых операторов описывается в координатном виде равенствами

$$u_p = \sum_{q=1}^2 a_{ij}^{pq} j_q, \quad v_p = \sum_{q=1}^2 b_{ij}^{pq} j_q,$$

$$a_{ij}^{pq} = (\vec{n}_i \times K_m[\sigma_j, \vec{e}_j^q](x^i), \vec{e}_i^p), \quad b_{ij}^{pq} = (\vec{n}_i \times R_m[\sigma_j, \vec{e}_j^q](x^i), \vec{e}_i^p); \quad (35)$$

здесь  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение.

Теперь систему операторных уравнений (31)–(34) запишем в координатном виде. Разложим неизвестные векторы  $\vec{j}_{E,i}$  и  $\vec{j}_{M,i}$  по векторам локальных базисов:

$$\vec{j}_{E,i} = j_{E,i}^1 \vec{e}_i^1 + j_{E,i}^2 \vec{e}_i^2, \quad \vec{j}_{M,i} = j_{M,i}^1 \vec{e}_i^1 + j_{M,i}^2 \vec{e}_i^2, \quad i = \overline{1, N}.$$

Тогда для координат искомых векторов получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}j_{M,i}^p + \sum_{\substack{j=\overline{1,N} \\ q=1,2}} a_{ij}^{\pm pq} j_{E,j}^q + \sum_{\substack{j=\overline{1,N} \\ q=1,2}} b_{ij}^{\pm pq} j_{M,j}^q &= f_i^{\pm p}, \quad i = \overline{1, N}, \quad p = 1, 2, \\
 a_{ij}^{+pq} &= -\frac{i}{\omega \varepsilon_m} (\vec{n}_i \times K_m[\sigma_j, \vec{e}_j^q], \vec{e}_i^q), \quad b_{ij}^{+pq} = (\vec{n}_i \times R_m[\sigma_j, \vec{e}_j^q], \vec{e}_i^q) \\
 &\text{при } \sigma_i \in \Sigma_m, \quad \sigma_j \in \Sigma_m, \quad m = \overline{1, M}, \\
 a_{ij}^{+pq} &= \frac{i}{\omega \varepsilon_m} (\vec{n}_i \times K_m[\sigma_j, \vec{e}_j^q], \vec{e}_i^q), \quad b_{ij}^{+pq} = -(\vec{n}_i \times R_m[\sigma_j, \vec{e}_j^q], \vec{e}_i^q) \\
 &\text{при } \sigma_i \in \Sigma_m, \quad \sigma_j \in \Sigma_{m-1}, \quad m = \overline{2, M}, \\
 a_{ij}^{-pq} &= \frac{i}{\omega \varepsilon_{m+1}} (\vec{n}_i \times K_{m+1}[\sigma_j, \vec{e}_j^q], \vec{e}_i^q), \quad b_{ij}^{-pq} = -(\vec{n}_i \times R_{m+1}[\sigma_j, \vec{e}_j^q], \vec{e}_i^q) \quad (36) \\
 &\text{при } \sigma_i \in \Sigma_m, \quad \sigma_j \in \Sigma_m, \quad m = \overline{1, M}, \\
 a_{ij}^{-pq} &= -\frac{i}{\omega \varepsilon_{m+1}} (\vec{n}_i \times K_{m+1}[\sigma_j, \vec{e}_j^q], \vec{e}_i^q), \quad b_{ij}^{-pq} = (\vec{n}_i \times R_{m+1}[\sigma_j, \vec{e}_j^q], \vec{e}_i^q) \\
 &\text{при } \sigma_i \in \Sigma_m, \quad \sigma_j \in \Sigma_{m+1}, \quad m = \overline{1, M-1}, \\
 a_{ij}^{\pm pq} &= b_{ij}^{\pm pq} = 0 \quad \text{в остальных случаях,} \\
 f_i^{\pm p} &= (f^\pm(x^i), e_i^p), \quad i = \overline{1, N}, \quad p = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Таким образом, задача свелась к решению системы линейных уравнений (36) с квадратной матрицей относительно  $4N$  неизвестных.

В случае, когда внутренняя поверхность  $\Sigma_M$  является поверхностью идеально проводящего тела (здесь  $\Sigma_M$  может быть как замкнутой, так и разомкнутой поверхностью), задача сводится к той же системе уравнений (36) со следующими отличиями: мы полагаем, что  $j_{M,j}^q = 0$  при  $q = 1, 2$ ,  $\sigma_j \in \Sigma_M$ , тогда уравнения (36) на поверхности  $\Sigma_M$  принимают вид

$$\sum_{\substack{j=\overline{1,N} \\ q=1,2}} a_{ij}^{+pq} j_{E,j}^q = f_i^{+p}, \quad \sigma_i \in \Sigma_M, \quad p = 1, 2,$$

уравнения (36) с индексом “ $-$ ” не рассматриваются при  $\sigma_i \in \Sigma_M$  (т.е. мы не рассматриваем уравнения на поверхности идеального проводника с внутренней стороны). В данном случае мы имеем систему с квадратной матрицей относительно  $4(N-1) + 2N$  неизвестных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния: Пер. с англ. М., 1987.
2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
3. Лифанов И.К., Ставцев С.Л. Интегральные уравнения и распространение звука в мелком море // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 9. С. 1256–1270.

4. Гутников В.А., Кирякин В.Ю., Лифанов И.К. и др. О численном решении двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения и о распространении звука в городской застройке // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2007. Т. 47. № 12. С. 2088–2100.
5. Лебедева С.Г., Сетуха А.В. О численном решении полного двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения методом дискретных особенностей // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 2. С. 223–233.
6. Daeva S.G., Setukha A.V. Numerical Simulation of Scattering of Acoustic Waves by Inelastic Bodies using Hypersingular Boundary Integral Equation // AIP Conf. Proc. 1648. 390004. 2015.
7. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа. М., 2007.
8. Апарин А.А., Сетуха А.В. О распараллеливании вычислений в вихревом методе решения задач аэродинамики // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии: Электронный научный журнал. 2013. № 14. С. 406–418.
9. Давыдов А.Г., Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы // Докл. РАН. 1984. Т. 276. № 1. С. 96–100.
10. Davydov A.G., Zakharov E.V., Pimenov Yu.V. Hypersingular integral equations for the diffraction of electromagnetic waves on homogeneous magneto-dielectric bodies // Comp. Math. and Modeling. 2006. V. 17. № 2. P. 97–104.
11. Захаров Е.В., Рыжиков Г.В., Сетуха А.В. Численное решение трехмерных задач дифракции электромагнитных волн на системе идеально проводящих поверхностей методом гиперсингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 9. С. 1253–1263.
12. Хёнл Х., Мауэ А., Веспфаль К. Теория дифракции: Пер. с нем. М., 1964.

Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию  
22.04.2015 г.